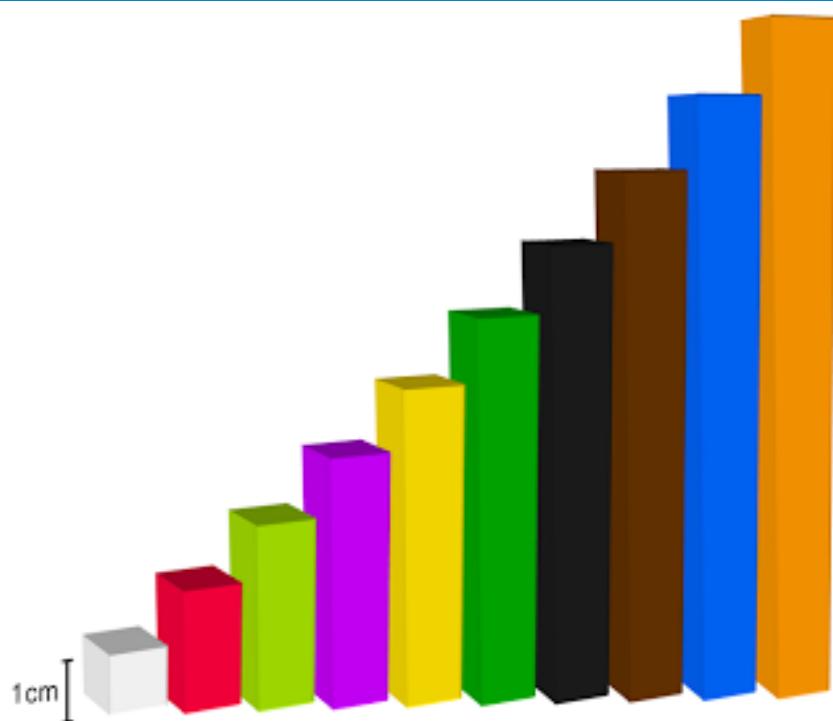


PROBLEMAS ARITMÉTICOS ESCOLARES DE UNA ETAPA



CEU

Fundación San Pablo
Andalucía

Desarrollo del pensamiento en educación infantil.

2. Problemas aritméticos elementales (PAEs) de estructura aditiva y multiplicativa

2.1 Resolución de problemas en Educación Infantil

2.2. Problemas Aritméticos Elementales

2.2.1. Clasificación de los PAEs

2.3. PAEs de una etapa y estructura aditiva

2.3.1. Contenido: criterios de clasificación

2.3.2. Aprendizaje: dificultades

2.3.3. Enseñanza: estrategias de resolución

2.4. PAEs de estructura multiplicativa

Para reflexionar... (Bienes, 2008, p. 30-31)

Problema 1: *Te compran una raqueta por 15 euros y la vendes por 20 ¿ganas o pierdes?*
El niño contestó: *Pierdo porque me quedo sin raqueta*

Problema 2: A un niño de cuatro años le dan un chicle y empieza a protestar porque quiere dos. Su primo, más mayor, para acabar con sus protestas se levanta, le parte el chicle y le dice: toma, uno y dos. El niño, bien contento, para de protestar.

Problema 3: *Tienes cuatro cerezas y María te da dos más ¿cuántas tendrás?* La alumna, impertérrita, contesta: *A mí no me gustan las cerezas.*

2.1 Resolución de problemas en Educación Infantil.

La importancia de la contextualización de la enseñanza de las matemáticas se hace más necesaria cuanto más novedosos son los estudiantes: la abstracción, esa característica fundamental que tiene esta ciencia, se alcanza gradualmente y no se consolida hasta las primeras etapas de la educación secundaria.

Como consecuencia de esta máxima, investigaciones recientes muestran que la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de la aritmética deben relacionarse con la resolución de problemas; es decir, no debemos enseñar el algoritmo de la suma para después resolver problemas de suma sino al revés: al problematizar una situación de suma, trabajar el concepto *suma* y, posteriormente, llegar al aprendizaje razonado del procedimiento *algoritmo para sumar*. Por tanto, el problema debemos verlo no como una aplicación de algoritmos previamente aprendidos, sino como un medio para desarrollar una **comprensión significativa** del **concepto de operación** y del significado de los **símbolos** (números, que indican cantidades) y **signos** (que indican relaciones y acciones, es decir, operaciones, entre los números), además de trabajar los procesos característicos de la actividad matemática como: formular conjjeturas, argumentar, probar, etc., lo que permitirá desarrollar en el niño su capacidad de aplicar estrategias para resolver situaciones problemáticas cada vez más sofisticadas. (Muñoz-Catalán, 2014)

Para cada diferente tipo de problema el niño irá estableciendo diferentes estrategias de resolución, que irán evolucionando con su comprensión de los números y de las relaciones que se pueden establecer entre ellos, por lo que es fundamental establecer la relación entre estos tres conceptos: tipo de problema, estrategia de resolución y significado del número en cada momento del aprendizaje en educación infantil.

2.2 . Problemas Aritméticos Elementales (PAEs)

Son los primeros que aparecen en el currículo escolar de matemáticas y se distinguen porque presentan cantidades y preguntas que buscan la determinación de una o varias cantidades y porque se resuelven utilizando operaciones aritméticas. En educación infantil nos resultarán útiles para introducir las operaciones básicas, pues en los estudios más recientes se señala la importancia de introducir la aritmética en la enseñanza aprendizaje en los primeros niveles relacionándola con los PAEs; así el concepto de operación y el significado de los símbolos se

genera en el proceso de resolución de problemas. Esta perspectiva se apoya en dos ideas fundamentales:

1. La capacidad gradual de aplicar estrategias de contar y pensar al resolver situaciones-problema de la vida real genera en el niño la comprensión significativa de la idea de operación.
2. Plantear la enseñanza de las operaciones a partir de la resolución de problemas aritméticos de la vida real ayuda a la comprensión de los símbolos y algoritmos.

Distinguiremos primero los problemas en una o varias etapas, siendo los primeros aquellos que necesitan una única operación para ser resueltos y el resto, más de una. En esta etapa escolar, nos centraremos en los **problemas de una sola etapa**.

En el enunciado de estos problemas podemos distinguir dos partes: la informativa, en la que aparecen todos los datos necesarios para su resolución, y la pregunta, en la que nos informan de lo que nos requieren. Puede ser que la pregunta contenga total o parcialmente la parte informativa; tendremos, además, tres cantidades: dos dadas y una tercera que resultará la incógnita o dato buscado.

Pueden tener estructura aditiva o multiplicativa, dependiendo de si se resuelven con sumas y restas o con multiplicaciones y divisiones, respectivamente.

Actividad 1:

Distingue las partes de cada uno de los siguientes problemas, su estructura y decide cuántas etapas tienen:

1. Un niño compra 10 caramelos de naranja y se gasta 2€, luego compra 10 de limón y se gasta 3€. Antes de llegar a casa, le regala a su amigo 5 caramelos de cada sabor. ¿Cuánto dinero se ha gastado? ¿Con cuántos caramelos llega a casa?
2. Si María tiene dos pelotas y Pepa tiene tres, ¿Cuántas pelotas tiene Pepa más que María?
3. Por cada mesa que tiene mi clase, hay seis sillas. ¿Cuántas sillas hay en total si tenemos 4 mesas?
4. En clase hay 24 sillas colocadas en las mesas. ¿Cuántas mesas hay si alrededor de cada una hay 6 sillas?
5. La compra de hoy le ha costado a papá 50€. Se ha gastado 25€ en carne y 10 en verdura. ¿Cuánto se ha gastado en todo lo demás?
6. En un autobús van 7 niños y 10 niñas. En la primera parada se bajan 4 personas ¿Cuántos quedan en el autobús?

2.2.1. Clasificación de PAEs

Según Puig y Cerdán (1988), podemos distinguir dos tipos de clasificación de los problemas aritméticos escolares de una etapa: centrado en palabras o atendiendo al análisis global del enunciado, dentro del cual podremos distinguir a su vez entre la estructura lógica subyacente, la componente sintáctica y la componente semántica.

Si tenemos en cuenta el **análisis centrado en palabras**, distinguiremos entre las palabras clave, que nos dan información necesaria para la resolución y el resto, que sirven, por ejemplo, para contextualizar el problema, pero que no nos aportan información relevante. Dentro de las primeras, podemos distinguir entre (Puig, Cerdán, 1988, p 5):

1. *palabras propias de la terminología matemática y, por tanto, con significado preciso en el contexto matemático (añadir, doblar, substraer, dividir, repartir...).*
2. *Palabras tales como conectivas, verbos, etc. que no son propias de la terminología matemática, pero cuyo significado en el contexto del problema suele ser suficiente para decidir la operación que hay que realizar para resolver el problema.*
3. *Palabras –o grupos de palabras– que expresan relaciones*

Dentro del **análisis global del enunciado**, la componente **sintáctica** y la **estructura lógica** revisan la organización del problema. Es importante tenerlas en cuenta en educación infantil porque el lenguaje está construyéndose y debemos facilitar la comprensión del problema. Por ejemplo, a pesar de que los siguientes enunciados son equivalentes:

Mi mamá me ha regalado dos caramelos y yo tenía otros dos, ¿cuántos tengo ahora?

¿Cuántos caramelos tengo ahora si antes, tenía dos y mi mamá me ha regalado otros dos?

Para los alumnos de educación infantil resultará más sencillo el primero que el segundo.

La **componente semántica** puede ser hecha de forma global o fragmentada, que ya se ha descrito anteriormente en el análisis centrado en palabras. Nos centramos ahora en el análisis global del enunciado, que según diversos autores es el más significativo para comprender las estrategias que utilizan los alumnos para resolver los problemas. Dichas estrategias serán vistas en apartados posteriores.

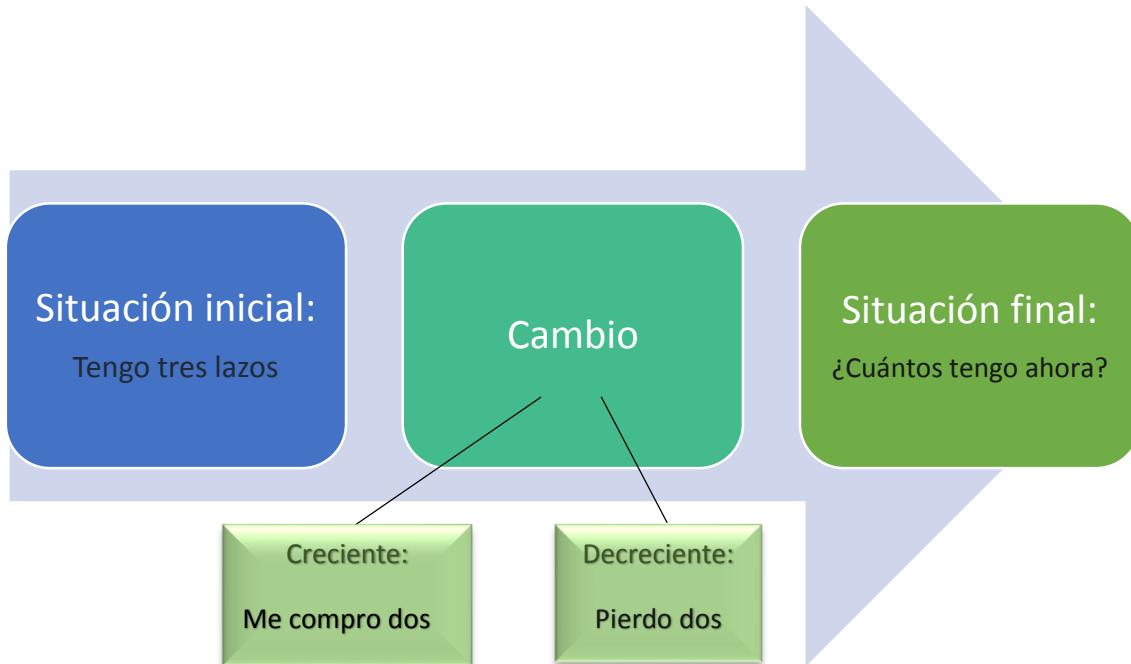
2.3 PAEs de una etapa y estructura aditiva

Como ya hemos definido anteriormente, un problema aritmético de una etapa que se resuelve con suma o resta es un PAE aditivo. Teniendo en cuenta la variable semántica, tenemos cuatro grandes categorías en su clasificación: cambio, combinación, comparación e igualación (Puig y Cerdán, 1988).

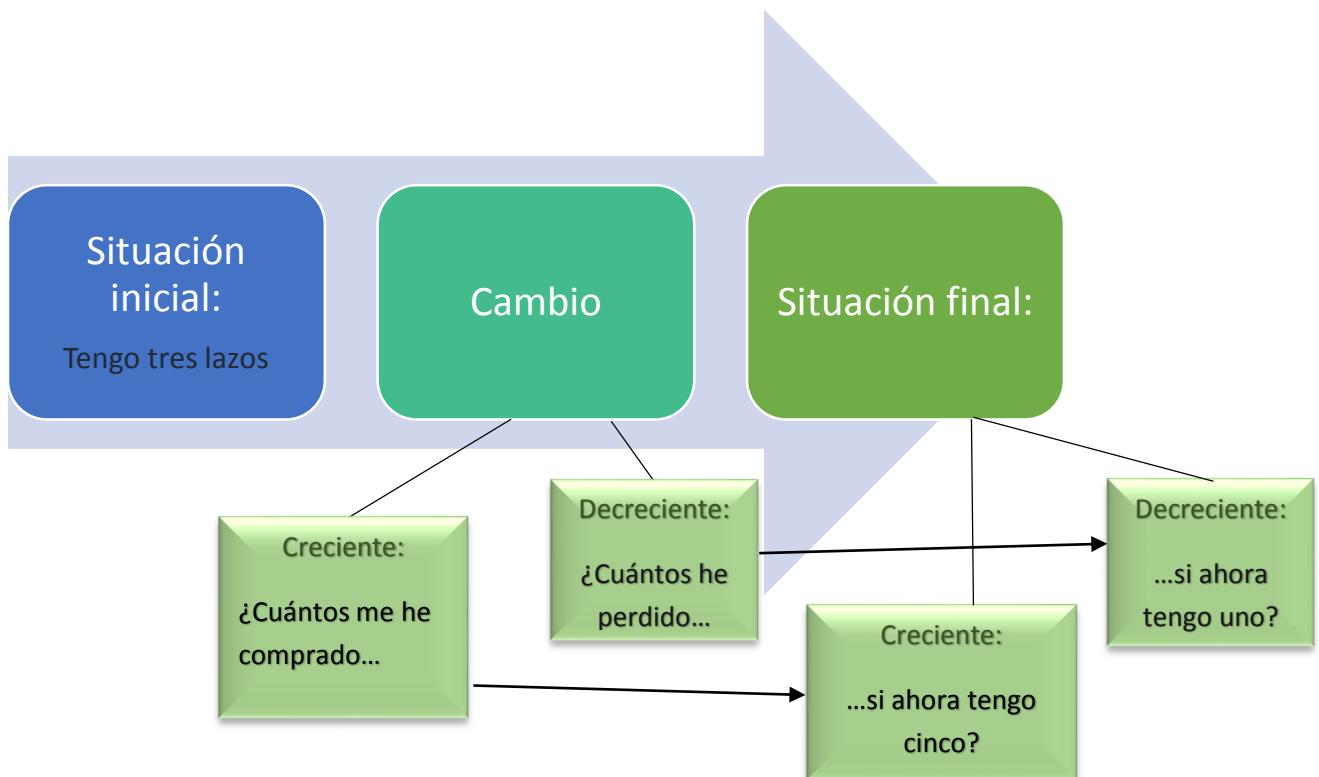
2.3.1. Contenido: criterios de clasificación

- **Cambio**

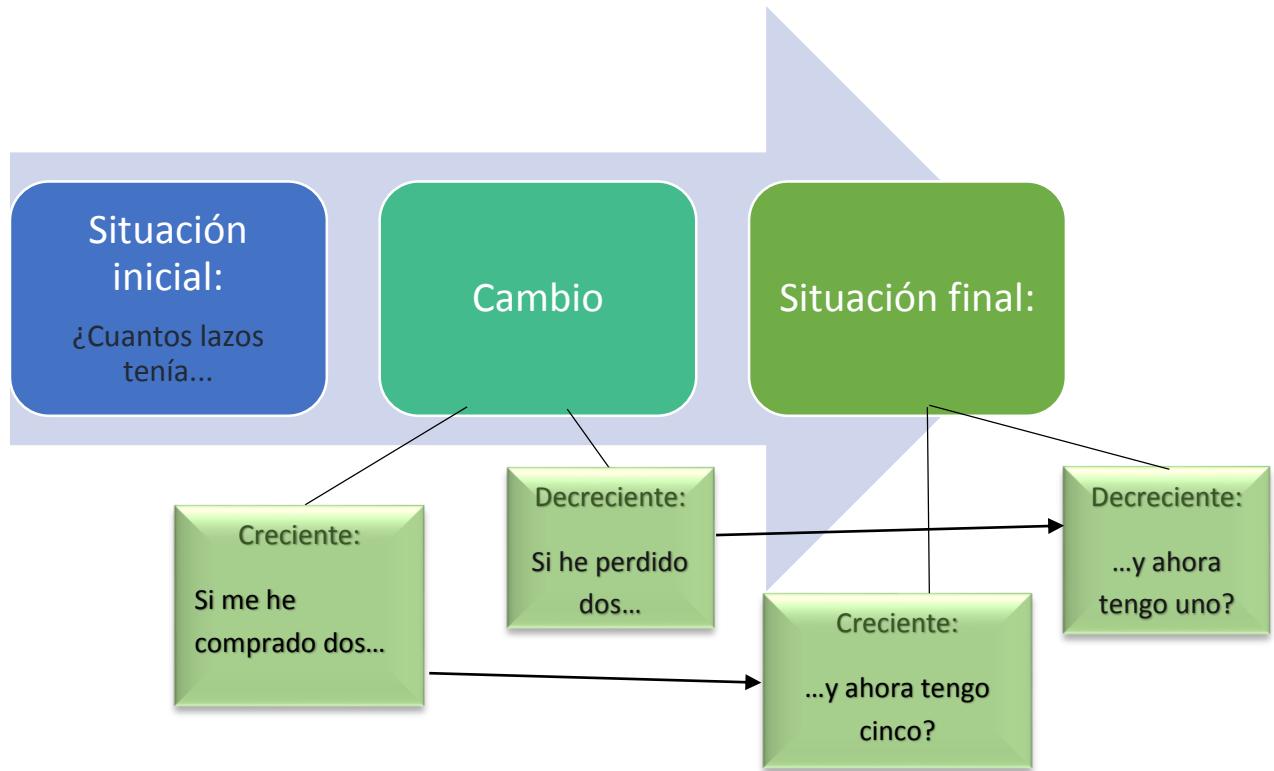
Los PAEs de una etapa de cambio implican una historia: una situación inicial en la que se produce un cambio y se genera una situación final, siendo tal cambio creciente o decreciente:



No solo puede variar el tipo de cambio (creciente o decreciente), sino también el lugar en el que se encuentre la incógnita: en la situación final, como en el ejemplo anterior, en el cambio:



O en la situación inicial:



Dependiendo, entonces, de dónde esté la incógnita y de si el cambio resulta creciente o decreciente, tendremos seis tipos de problemas de **cambio**:

	Inicial	Cambio	Final	Crece	Dec.	Prop. abierta	Resolución
Cambio 1 Yo tenía cuatro rotuladores y mi mamá me regaló por mi cumpleaños un estuche con otros 5 rotuladores, ¿cuántos tengo ahora?	D	D	I	Sí		$a+b=?$	Suma
Cambio 2 Yo tenía cuatro rotuladores y le di a mi hermano 3 rotuladores, ¿cuántos tengo ahora?	D	D	I		Sí	$a-b=?$	Resta
Cambio 3 Yo tenía cuatro rotuladores. Mi mamá me regaló por mi cumpleaños un estuche con más rotuladores y ahora tengo 9 ¿cuántos me ha dado?	D	I	D	Sí		$a+?=c$	Resta
Cambio 4 Yo tenía cuatro rotuladores. Le di algunos a mi hermano y ahora tengo 1, ¿cuántos rotuladores le he dado a mi hermano?	D	I	D		Sí	$a-?=c$	Resta
Cambio 5 Yo tenía algunos rotuladores. Mi mamá me ha regalado por mi cumpleaños un estuche con otros 5 rotuladores y ahora tengo 9 ¿cuántos tenía antes?	I	D	D	Sí		$?+b=c$	Resta
Cambio 6 Yo tenía algunos rotuladores y mi hermano me pidió 3. Me quedan 2, ¿cuántos tenía ahora?	I	D	D		Sí	$?-b=c$	Suma

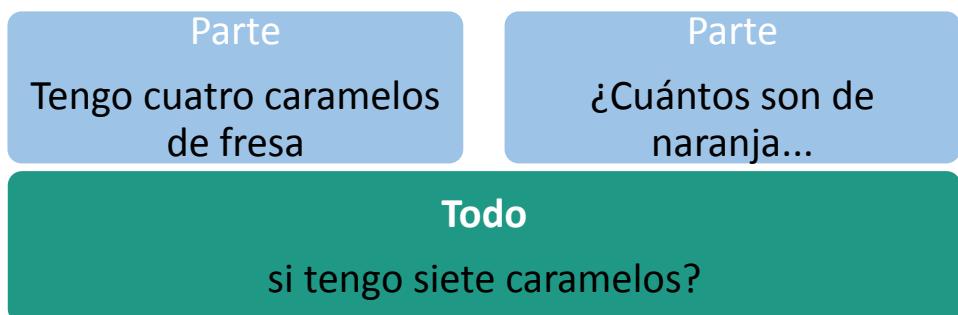
- **Combinar**

Se observa una relación entre tres conjuntos: dos partes disjuntas (sin elementos comunes) conforman un conjunto total. Las partes se unen para formar el todo y el todo se puede descomponer en sus partes. No hay cambios: son problemas estáticos. Por ejemplo: tengo una bolsa con caramelos de limón y de naranja; en la clase hay niños y niñas; en el equipo de baloncesto hay jugadores y suplentes...

Podrían preguntarme por el total:



o por una de las partes:



No hablamos de un tercer tipo porque las partes son intercambiables:



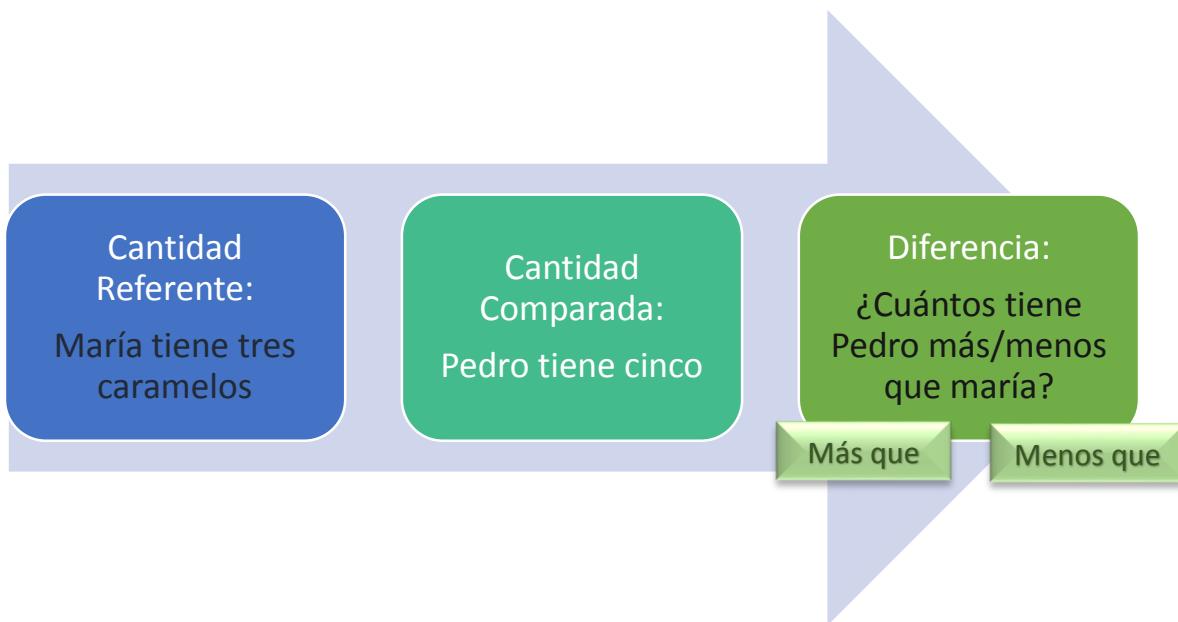
Dependiendo, entonces, de dónde esté la incógnita, tendremos dos tipos de problemas de **combinar**:

	Parte	Parte	Todo	Prop. abierta	Resolución
Combinar 1 En el autobús del cole vamos 5 niños y 4 niñas ¿cuántos somos en total?	D	D	I	$a+b=?$	Suma
Combinar 2 En el autobús del cole somos 9 en total. Si somos 4 niñas ¿cuántos niños hay?	D	I	D	$a+?=c$ $?+b=c$	Resta

- **Comparar**

Tenemos dos cantidades (*referencia* y *comparada*) y las comparamos obteniendo una *diferencia* entre ellas, sin cambios (son problemas estáticos). Las expresiones más comunes en la comparación son *más que* y *menos que*, por lo tanto, la referencia, cantidad con la que comparo, siempre irá detrás de estas construcciones. Por ejemplo: *Juan tiene cuatro peluches, tres más que Pedro, que tiene uno*: la cantidad de referencia es el número de peluches que tiene Pedro y la cantidad comparada es el número de peluches que tiene Juan.

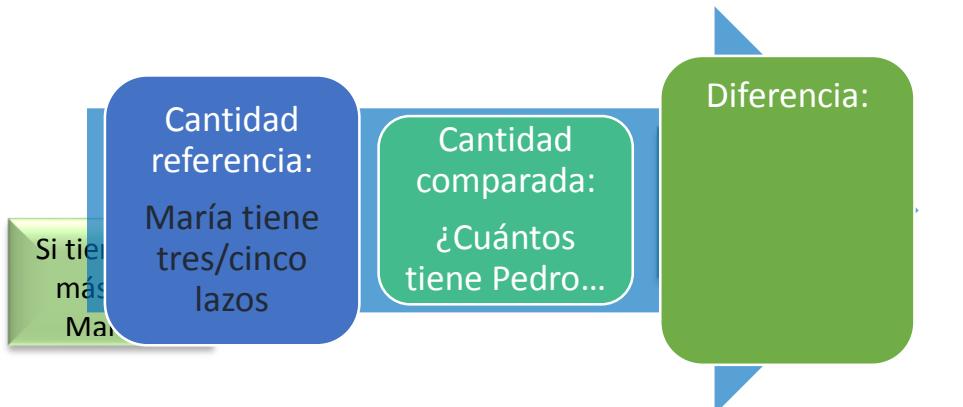
La comparación puede ser, como hemos dicho, más que o menos que, y la incógnita puede estar en cualquiera de las tres cantidades, así que tendremos de nuevo seis tipos de problemas de **comparar**:



Dependiendo de dónde esté la incógnita, tendremos un tipo de problema. Si tenemos la incógnita en la diferencia:



Si la incógnita está en la cantidad comparada:



O en cantidad referencia:



	Referencia	Comparada	Diferencia	Más	Menos	Resolución
Comparar 1 Juan tiene 5 rotuladores y Pedro tiene 3 ¿cuántos tiene Juan más que Pedro?	D	D	I	Sí		Resta
Comparar 2 Juan tiene 5 rotuladores y Pedro tiene 3 ¿cuántos tiene Pedro menos que Juan?	D	D	I	Sí		Resta
Comparar 3 Pedro tiene 3 rotuladores. Juan tiene 2 más que Pedro. ¿Cuántos tiene Juan?	D	I	D	Sí		Suma
Comparar 4 Pedro tiene 3 rotuladores. Juan tiene 2 menos que Pedro. ¿Cuántos tiene Juan?	D	I	D	Sí		Resta
Comparar 5 Juan tiene 5 rotuladores, dos más que Pedro. ¿Cuántos tiene Pedro?	I	D	D	Sí		Resta
Comparar 6 Juan tiene 2 rotuladores, 3 menos que Pedro. ¿Cuántos rotuladores tiene Pedro?	I	D	D	Sí		Suma

- **Igualar**

Tenemos dos cantidades (*referencia* y *comparada*) y tras un cambio (ganar, perder, añadir, quitar,...) las comparamos para saber cuánto falta o sobra para que sean iguales: la *diferencia* entre ellas. Son un híbrido de problema de cambio y comparación, por tanto, problemas dinámicos. La referencia de clasificación de estos problemas son los de comparación, así que tendremos seis tipos diferentes.

	Referencia	Comparada	Diferencia	Más	Menos	Resolución
Igualar 1 Juan tiene 3 monedas y Pedro tiene 5. ¿Cuántas le faltan a Juan para tener tantas como Pedro?	D	D	I	Sí		Resta
Igualar 2 Juan tiene 5 monedas y Pedro tiene 3. ¿Cuántas tiene que perder Juan para tener tantas como Pedro?	D	D	I	Sí		Resta
Igualar 3 Pedro tiene 3 monedas. Si Juan gana 2 tendrá tantas como Pedro. ¿Cuántas tiene Juan?	D	I	D	Sí		Resta
Igualar 4 Pedro tiene 3 monedas. Si Juan pierde dos, tendrá tantas como Pedro. ¿Cuántas tiene Juan?	D	I	D	Sí		Suma
Igualar 5 Juan tiene 5 monedas. Si gana dos tendrá tantas como Pedro. ¿Cuántas tiene Pedro?	I	D	D	Sí		Suma
Igualar 6 Juan tiene 2 monedas. Si pierde 3. Tendrá tantas como Pedro. ¿Cuántas tiene Pedro?	I	D	D	Sí		Resta

Actividad 2:

Clasifica los siguientes problemas respecto de su componente semántica:

1. Tengo cinco caramelos y me regalan dos, ¿cuántos tengo ahora?
2. Tenía algunos caramelos, regalo 2 y me quedan 3. ¿Cuántos tenía?
3. Pelayo tiene dos peluches y Marta tiene cuatro, ¿Cuántos tienen entre los dos?
4. Entre Marta y Pelayo tienen 5 peluches. Si Marta tiene 3, ¿cuántos tiene Pelayo?
3. María tenía tres casas y ahora sólo una, ¿cuántas casas ha vendido?
4. Irene tiene cinco perros y Juan dos, ¿cuántos perros tiene Irene más que Juan?
5. Juan tiene 3 cajas de bombones con 5 bombones en cada caja. ¿Cuántos bombones tiene en total?

6. Hay 50 libros en una librería, y en cada estante hay 10 libros ¿Cuántos estantes hay?
7. Carmen tiene varios lápices en el estuche, Cinta le regala cuatro y ahora en total tiene en el estuche siete, ¿cuántos lápices tenía al principio?

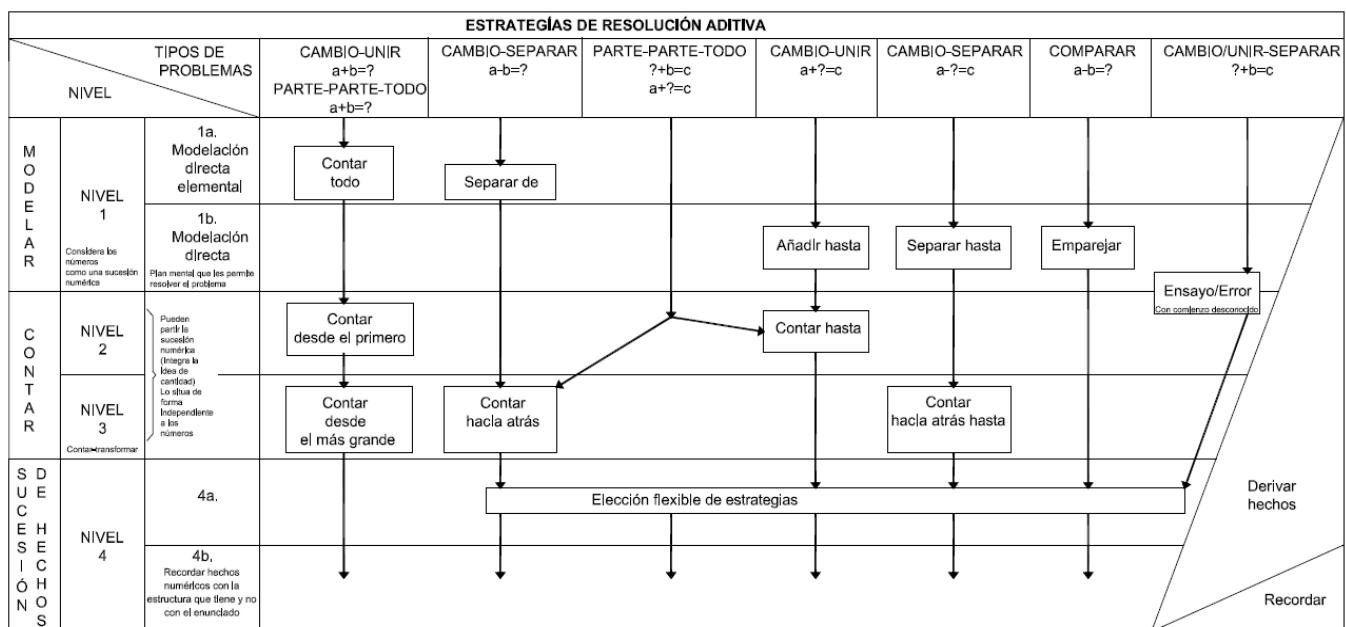
2.3.2. Aprendizaje: dificultades

Las dificultades que se presentan están relacionadas principalmente con

- Proposiciones abiertas que subyacen al problema, es decir, con la estructura matemática del mismo. Es más sencillo cuando el dato que falta es el resultado (situación final en los problemas de cambio, diferencia en los problemas de comparar e igualar, el todo en los problemas de combinar)
- Dificultades sintácticas, relacionadas con el lugar en el que se encuentra la pregunta. Puede ser un problema de cambio 1 y, sin embargo, añadirle dificultad al poner la pregunta al comenzar el problema: *¿Cuántos caramelos tengo si tenía tres y me regalaron otros dos?*
- Dificultades semánticas. Los problemas de cambio son los más sencillos, mientras que los más complicados son los de igualación. Dentro de ellos, son más complicados los de tipo 5 y 6 que los demás.

2.3.3. Enseñanza: estrategias de resolución.

Documento Estrategias de resolución empleadas por los niños (Fenema y Carpenter, 1989)



Nivel modelación directa: el nº es entendido en contextos orales, cada número es ‘anterior a’ y ‘posterior a’

Nivel de conteo. El número como contador: existe la noción de cantidad, se añade la idea de que el 3 se corresponde con un conjunto como III

Nivel de hechos numéricos. El número transformador y transformable: el número se entiende como una entidad flexible, compuesto por otros. Aparece la idea de que, por ejemplo, que $4 = \frac{8}{2} = 1 + 3 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}$

PAEV Cambio	Inicial	Cambio	Final	Crece/decrece	ESTRATEGIA Modelación	ESTRATEGIA Conteo
Cambio 1 Yo tenía cuatro rotuladores y mi mamá me regaló por mi cumpleaños un estuche con otros 5 rotuladores, ¿cuántos tengo ahora?	D	D	I	Crece	contar todos	Contar desde el primero, o bien, Contar desde el más grande
Cambio 2 Yo tenía cuatro rotuladores y le di a mi hermano 3 rotuladores, ¿cuántos tengo ahora?	D	D	I	Decrece	Separar de	Contar hacia atrás desde
Cambio 3 Yo tenía cuatro rotuladores. Mi mamá me regaló por mi cumpleaños un estuche con más rotuladores y ahora tengo 9 ¿cuántos me ha dado?	D	I	D	Crece	Añadir hasta	Contar hacia delante hasta
Cambio 4 Yo tenía cuatro rotuladores. Le di algunos a mi hermano y ahora tengo 1, ¿cuántos rotuladores le he dado a mi hermano?	D	I	D	Decrece	Separar hasta	Contar hacia atrás hasta
Cambio 5 Yo tenía algunos rotuladores. Mi mamá me ha regalado por mi cumpleaños un estuche con otros 5 rotuladores y ahora tengo 9 ¿cuántos tenía antes?	I	D	D	Crece	Ensayo-error	
Cambio 6 Yo tenía algunos rotuladores y mi hermano me pidió 3. Me quedan 2, ¿cuántos tenía ahora?	I	D	D	Decrece	Ensayo-error	

PAEV Combinación	Parte	Parte	Todo	ESTRATEGIA Modelación	ESTRATEGIA Conteo
Combinación 1 En el autobús del cole vamos 5 niños y 4 niñas ¿Cuántos somos en total?	D	D	I	Contar todos	Contar desde el primero, o bien, Contar desde el más grande
Combinación 2 En el autobús del cole somos 9 en total, si somos 4 niñas ¿Cuántos niños más hay?	D	I	D		Contar hasta, O bien, Contar hacia atrás

Actividad 3:

Un profesor plantea el siguiente problema: *María tiene 10 globos y en el camino a su casa tres globos salen volando. ¿Cuántos globos tiene cuando llega a la casa?*

Mario dice: “10, 9 (levantando un dedo en su puño derecho), 8 (levanta el dedo siguiente del mismo puño), (realiza una pausa), 7 (levanta el dedo siguiente del mismo puño). Le quedan 7 globos”.

Pepa lo resuelve de la siguiente manera; extiende sus dos manos y dobla 3 dedos de manera consecutiva. A continuación cuenta los dedos que quedan extendidos: “1, 2, 3, 4, 5 y 7; le quedan 7 globos”.

¿De qué tipo de problema se trata y por qué? Justifica qué estrategia utilizan Mario y Pepa y en qué nivel de desarrollo se encuentran. Comenta el papel de los dedos en cada estrategia empleada.

2.4 PAEs de una etapa multiplicativos

Aunque parezca que es un contenido para cursos superiores, en educación infantil podemos interpretar la multiplicación como una suma reiterada y la división como un reparto o una medida:

<http://www.youtube.com/watch?v=0gAidHFX3kw&feature=related>

Problema	Estrategias de modelación
Multiplicación: sabemos cuántos grupos tenemos y cuánto mide cada uno, queremos saber cuántos elementos tenemos en total. <i>Pedro tiene 4 cajas de lápices. Hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices tiene Pedro?</i>	Agrupar Hacer 4 grupos con 6 contadores en cada grupo. Contar todos los contadores para encontrar la respuesta.
División medida: tenemos la medida de los grupos y cuántos elementos tenemos en total; queremos saber cuántos grupos hay. <i>Pedro tiene 24 lápices. Hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántas cajas de lápices tiene?</i>	Medición Coger los 24 contadores. Ir separando grupos de 6. Contar los grupos formados para encontrar la respuesta.
División reparto: tenemos la cantidad de grupos y cuántos elementos tenemos en total; queremos saber cuánto mide cada uno. <i>Pedro tiene 24 lápices. Quiere repartirlos en 4 cajas de modo que haya el mismo número de lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices hay en cada caja?</i>	Reparto Contar 24. Se van repartiendo los 24 contadores en 4 lugares separados, uno en cada lugar, continuando el proceso hasta que se hayan utilizado todos. Cuando termina, cuenta los contadores en un grupo para encontrar la respuesta.

Problema	Estrategias de conteo
Multiplicación Pedro tiene 4 cajas de lápices. Hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices tiene Pedro?	Agrupar Hacer 4 grupos con 6 contadores en cada grupo. Contar todos los contadores para encontrar la respuesta.
División medida Pedro tiene 24 lápices. Hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántas cajas de lápices tiene?	Medición Coger los 24 contadores. Ir separando grupos de 6. Contar los grupos formados para encontrar la respuesta.
División reparto Pedro tiene 24 lápices. Quiere repartirlos en 4 cajas de modo que haya el mismo número de lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices hay en cada caja?	Reparto Contar 24. Se van repartiéndo los 24 contadores en 4 lugares separados, uno en cada lugar, continuando el proceso hasta que se hayan utilizado todos. Cuando termina, cuenta los contadores en un grupo para encontrar la respuesta.

Referencias

- Bienés, P. (2008). Conversaciones matemáticas con María Antònia Canals. Barcelona: Graó. P. 30-31.
- Muñoz-Catalán, Mª de la Cinta (2015). Desarrollo del Pensamiento Matemático en Educación Infantil. Apuntes no publicados.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis.