4

Matemática Financiera

Por
Santiago Carrillo Menéndez
Universidad Autónoma de Madrid

Abstract

Mathematical finance is now a recognized part of applied mathematics. It began with derivative pricing (the well known Black-Scholes formula) and there are many open problems related with the pricing of complex derivatives, in particular related with credit risk, that require advanced mathematics (like Malliavin calculus, for example) and advanced computational methods. Nevertheless, risk management offers new and more complex challenges to mathematician in quest for applications.

Introducción

A partir de 1973 con la célebre fórmula de Black-Scholes, la Matemática Financiera ha conocido un desarrollo espectacular del que dan fe las numerosas publicaciones especializadas que han eclosionado en los últimos años en paralelo con la expansión de los mercados. Entre otras razones este fenómeno se debe a la desregularización del dólar, y al desarrollo de las comunicaciones y de la informática que han aportado una eficacia (numérica) hasta entonces desconocida a la hora de pasar órdenes lo cual ha permitido una interconexión de los mercados.

Es en este contexto se afianzó la idea de gestionar el riesgo y se desarrollaron (debido a una demanda creciente) los instrumentos derivados correspondientes. Con el paso del tiempo, los productos han sido cada vez más complejos, precisando de un conocimiento matemático y de recursos computacional cada vez mayores. Las inversiones en derivados se miden hoy en billones de euros.

Entre otros elementos importantes, la Matemática Financiera se caracteriza por un uso intensivo de:

- Cálculo estocástico,

- Procedimientos numéricos avanzados y uso intensivo de cálculo científico,
- Ecuaciones en derivadas parciales.

Todo ello explica por qué la Matemática Financiera se ha ido consolidando como una rama de las matemáticas (en general del Cálculo de Probabilidades) en la mayor parte de los países de nuestro entorno. Una primera consecuencia de este hecho ha sido un cambio drástico en los perfiles demandados en los departamentos de riesgo o en las mesas de derivados de las principales entidades financieras del planeta, mayormente matemáticos, físicos o ingenieros.

Sin pretender ser exhaustivo y procurando no ser excesivamente técnico, el objeto de estas líneas es dar una visión de las que, a juicio del autor, pueden ser las áreas más pujantes y más demandantes de métodos cuantitativos en las finanzas actuales.

Para ello, distinguiremos dos campos de aplicación de las matemáticas en finanzas: la valoración de derivados y la gestión de riesgos.

La selección de una bibliografía para un trabajo de este tipo siempre supone el riesgo de cierta arbitrariedad. Se ha procurado citar algunos de los trabajos seminales. Para referencias más recientes se remite al lector a la búsqueda por palabras clave en Internet o a contactar con el autor si necesita referencias más concretas.

Valoración de derivados

El punto de partida del éxito de las Matemática Financiera es la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica temporal de un activo (una acción) S_t:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t \quad \text{es decir:} \quad S_t = S_0 \exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\}$$

siendo r el rendimiento de la cuenta bancaria, W_t un movimiento browniano que modeliza la llegada de la información al mercado y determina el comportamiento aleatorio del activo y σ, la volatilidad, que representa la desviación típica de los rendimientos instantáneos del subyacente.

En este marco, la fórmula de Black-Scholes (1973) permite valorar el derivado más habitual: la *call europea* que da derecho a obtener una acción de dicho subyacente en un instante futuro T a un precio K (llamado de ejercicio) fijado ahora. El precio de dicho derivado es:

$$C(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 N(d_+) - Ke^{-rt} N(d_-)$$

siendo N la función de distribución de la normal tipificada y

$$d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log \frac{S_0}{Ke^{-rT}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

De los distintos parámetros del modelo, sólo σ no viene dada y hay que estimarla a partir de datos de mercado. Un procedimiento consiste en partir de los precios cotizados en los mercados y deducir cual es la *volatilidad implícita* que, usada en la fórmula de Black-Scholes, la hace coincidir con el precio de mercado.

En la década de los ochenta quedó de manifiesto que el cálculo de la volatilidad implícita para distintos valores del precio de ejercicio, quedando fijos los demás parámetros, conducía a diferentes valores para σ.

Luego $\sigma = \sigma(K)$ es una función del precio de ejercicio y es indispensable tener en cuenta este hecho a la hora de valorar los posibles derivados obtenidos a partir del subyacente S_t. Este fenómeno se conoce como la *sonrisa de volatilidad*, debido a la forma que tenía en las primeras observaciones la gráfica de σ.

La cosa se complica cuando se quieren modelizar opciones en las que intervienen diversos subyacentes como, por ejemplo, en el caso de las opciones de la familia *mountain*: una clase de derivados introducida en 198 por Socièté Générale y cuya función de pago hace intervenir una cesta de numerosos (n) subyacentes de los cuales pueden ser tomados en consideración sólo una parte de los mismos (por ejemplo, se excluyen los n_1 peores y los n_2 mejores, obviamente con $n_1 + n_2 < n$).

Otro factor de complejidad radica en la posibilidad de cancelar el producto anticipadamente o en la posibilidad de que la fecha de ejercicio esté abierta (opciones americanas).

Todo ello requiere la capacidad de modelizar de forma apropiada la dinámica de los subyacentes y de sus volatilidades para poder resolver el problema de valoración mediante simulación Montecarlo. Es este un problema no resuelto de manera satisfactoria y en el cual existe un amplio campo de trabajo para los matemáticos.

Los derivados sobre acciones (renta variable) representan sólo una pequeña parte del mercado global de derivados. Otra parte la constituyen los derivados de renta fija y divisa y los de riesgo de crédito.

Los derivados de renta fija tienen como finalidad la gestión de la incertidumbre derivada de los movimientos de los tipos de interés y los derivados de divisas aquella asociada a los tipos de cambio. Su cuota de mercado es muy superior a la de los derivados de renta variable.

Los modelos usados en renta fija son más complejos que los anteriores al tener que integrar la información relativa a distintos plazos. Por ejemplo, la siguiente ecuación se corresponde con una versión simplificada del Libor Market Model, uno de los modelos más usados en este momento en los mercados para la dinámica de los *forward* (tipos a plazo):

$$\frac{dF_i(t)}{F_i(t)} = \sum_{j=m(t)}^{i} \frac{\delta_j F_j(t) \sum_{q=1}^{p} \lambda_{j-m(t),q} \lambda_{i-m(t),q}}{1 + \delta_j F_j(t)} dt + \sum_{q=1}^{p} \lambda_{i-m(t),q} dW_t^q$$

Aquí las $\lambda_{j,q}$ son volatilidades observadas para los tipos forward a diferentes plazos y los W_t^q son movimientos brownianos. El número p de factores tiene que determinarse para proceder a los ajustes.

Las observaciones hechas más arriba, en particular la existencia de una sonrisa dinámica que hay que tener en cuenta en la valoración, también son de aplicación en este contexto, agravadas por la complejidad añadida. Esto explica por qué la valoración de estos derivados moviliza hoy en día una gran cantidad de *quants*.

Los derivados de riesgo de crédito, que permiten cubrirse del incumplimiento (*default*) de una contrapartida, son el otro gran foco de interés en este momento de los mercados financieros. En general descansan en la modelización conjunta de los subyacentes susceptibles de incumplimiento, una cesta más o menos grande, con el énfasis puesto en estos posibles incumplimientos (first to default, second to default, etc.).

El uso de este tipo de derivados ha supuesto la introducción de lo que hasta hace poco se habría considerado como supercomputación, el uso de decenas o centenares de procesadores en paralelo, en no pocas instituciones financieras. En muchos casos, la simulación Montecarlo tiene la dificultad añadida de una dimensionalidad alta. Son muchos los desafíos, tanto matemáticos como computacionales, existentes en este campo.

Gestión de riesgos

Ya hemos señalado la relación entre derivados y gestión del riesgo, pero esta tiene otra faceta: el capital económico o regulatorio. Las entidades financieras están obligadas a tener parte de su capital invertido en instrumentos muy líquidos con el fin de poder hacer frente a posibles pérdidas por riesgo de mercado, riesgo de crédito o riesgo operacional.

El Nuevo Acuerdo de Capital (Basilea II) y su próxima plasmación en normativa europea define la manera de calcular dicho capital. Estos instrumentos más líquidos son menos rentables por lo que el cálculo eficiente del capital económico es crítico en la gestión de una entidad financiera.

A la hora de calcular este capital económico se trata de hallar un determinado percentil de la distribución de pérdidas, previamente determinada. Este es otro ámbito de trabajo para un matemático.

De los tres tipos de riesgos mencionados, el de mercado puede ser el más conocido aunque el menos relevante en términos de capital. Sin embargo queda mucho por hacer en cuanto a su modelización, especialmente en cuanto a colas pesadas se refiere: las distribuciones empíricas presentan unas colas con un peso mayor que el estimado a partir de una normal lo cual implica una probabilidad mayor de sucesos extremos que la que cabe inferir a partir de la normal. xxxx así como a la dinámica del mismo.

El riesgo operacional ha sido el último en ser incorporado por el Comité de Basilea y está suponiendo el uso de modelos actuariales (*loss distribution approach*) con la dificultad añadida de tener que calcular un percentil elevado (99,9) por lo que la implementación de este tipo de modelos exige combinar procedimientos estadísticos avanzados, métodos numéricos y soluciones informáticas innovadoras (*grid*).

El riesgo de crédito plantea una situación algo distinta: aquí el regulador ha impuesto un modelo unifactorial gaussiano a partir del cual se obtiene el capital económico. Sin embargo cabe esperar que en los próximos años se vayan abriendo camino los modelos multifactoriales que permiten recoger el *efecto diversificación* de las carteras de crédito y este es otro campo en el cual los matemáticos tendrán algo que decir.

Las entidades financieras están trabajando ya muy activamente en la implantación del acuerdo de Basilea. No cabe duda que en este proceso surgirán no pocas oportunidades de colaboración universidad-empresa en cuanto a matemática aplicada y computación se refiere.

Otros aspectos

Aún sin tener la pretensión de exhaustividad, es obligado mencionar, aunque sea brevemente, otros aspectos de los posibles campos de aplicación de las matemáticas en finanzas.

En primer lugar, conviene señalar que el modelo de Black-Scholes antes mencionados tiene varios inconvenientes entre los que destaca su carácter simétrico y el hecho que las pérdidas realmente observadas sean mayores y más frecuentas que las previstas por los mismos. De ahí la existencia de un esfuerzo por la búsqueda de modelos que describan mejor el comportamiento de los mercados. Señalemos en esa línea los trabajos destinados a sustituir el movimiento browniano por procesos de Levy. También cabe destacar los esfuerzos realizados para la aplicación del Cálculo de Malliavin a las finanzas o una nueva línea de trabajo en lo que se ha denominado *optimización robusta.*

En no pocas situaciones surgen problemas de optimización complejos. La asignación eficiente de capital, la determinación de activos para titulizar, la optimización de carteras que aparece en muy diversas situaciones: fondos de pensiones o de inversión, fondos de gestión alternativa (hedge funds) y otros, son alguno ejemplos de este tipo de problemas. Son muchas las cosas todavía por hacer en estos campos

Es interesante señalar que la gestión de riesgos ha saltado del mundo de las finanzas a otros sectores: o el energético (derivados de energía), el medio ambiente (emisiones de dióxido de carbono), o el de los seguros (bonos catástrofe o derivados de meteorología). Todos ellos plantean nuevos retos relacionados con la modelización de nuevos subyacentes, en general no gaussianos, con productos derivados poco líquidos, pero que son, sin lugar a dudas, una de las nuevas fronteras para las matemáticas del riesgo.

Por último diremos que el mundo de los seguros está en vísperas de una revolución similar a la que se ha producido en finanzas. La irrupción del cálculo estocástico en seguros es ya una realidad y los trabajos de *Solvencia II* anuncian un marco regulatorio parecido al de Basilea II. Sin lugar a dudas un nuevo campo de acción para enfoques cuantitativos.

Bibliografía

[1] Bachelier, L.: *Théorie de la Spéculation.* Ann. Sci. Ecole Norm Sup. 17 21-86. Reprinted in The random character of stock market prices MIT Press, Cambridge, Mass. (1964) p.17-78.

[2] Black, F. & Scholes, M. *The pricing of options and corporate liabilities.* Journal of Political Economy 81 637-59 (1973).

[3] Bones J.: *Elements of a Theory of Stock-Options Value.* Journal of political Economy 72 (April 1964) 163-175.

[4] Brace A., Gatarek D., Musiela M.: *The market model of interest rate dynamics.* Mathematical Finance, 7 (1997) 127-154.

[5] Carr P. Ellis K. Y Gupta V.: *Static hedging of exotic options.* Journal of Finance 53 (1998).

[6] Duffie D. Y Singleton K.: *Modeling term structures of defaultable bonds.* The Review of Financial Studies, 12-4 (1999), 687-720

[7] Ho T.S.Y., Lee S.B. *Term structure movements and pricing interest rate contingent claims.* Jour. Fin. 41 (1986), 1011-1028.

[8] Harrison, J.M. & Kreps, D.M.: *Martingales and arbitrage in multiperiod security markets.* J. Econom. Theory, 20, 381-408 (1979).

[9] Harrison J.M. Pliska S.R.: *Martingales and Stochastic Integrals in the theory of continuous trading.* Stochastic processes and their applications. 11 (1981) 215-260.

[10] El Karoui N. & Karatzas I.: *The optimal stopping problem for a general American put-option.* Mathematical Finance IMA vol. 65 (1995) 77-88. Springer-Verlag, New York.

[11] El Karoui N. Geman H & Rochet Y.: *Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing,* Journal of Applied Probability 32 (1995) 443-458.

[12] Mc Kean, H.P. (Jr): *A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics,* Industrial Management Review 6 (1965) p. 13-21.

[13] Longstaff F.A., Schwartz E.S.: *Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model.* Jour. Fin. 47 (1992) 1259-1282.

[14] Mandelbrot B.: *The variation of certain speculative prices.* Journal of Business 36 (1963) 394-419.

[15] Markovitz, H.: *Portfolio selection.* J. Finance 8 77-91 (1952).

[16] Merton R.C.: *Theory of Rationnal Option Pricing.* Bell Journall of Economics and Mangement Sciences 4 (1973) 141-83.

[17] Osborne, *Brownian Motion in the stock market.* Operation Research 7 (1959) 145-173.

[18] Ross S.A. : *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing.* Journal of Economic Theory 13 341-360 (1976).

[19] Samuelson, P.A.: *Rational theory of warrant pricing.* Industrial Management Review 6 (1965) p. 13-21.

[20] Samuelson, P.A.: *Mathematics of speculative price.* SIAM Review a 15, 1-42 (1973).

[21] Sharpe W.: *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under conditions of risk.* J. of Finance September 1964 425-442 .

[22] Vasicek, O.A.: *An equilibrium characterization of the term structure.* Journal of Financial Economics 5 177-88 (1977).

Santiago Carrillo Menéndez
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias
y RiskLab-Madrid
Universidad Autónoma de Madrid
CP 28049
Correo electrónico: santiago.carrillo@uam.es