

# Matemáticas, Control y Robótica

Por

Sonia Martínez Díaz y Jorge Cortés Monforte

University of California, San Diego y University of California, Santa Cruz

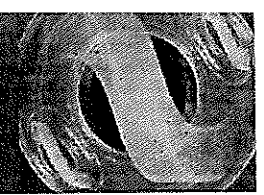
## Abstract

In the near future, new generations of robots and autonomous vehicles will play a fundamental role in scientific and commercial applications of great social impact. Some of their uses include distributed monitoring and surveying (e.g., crop monitoring and management), rapid deployment in disaster relief and situation awareness operations, environmental monitoring (e.g., study of oceanographic and atmospheric interactions), health monitoring of civil infrastructure (bridges, buildings, oil pipes, etc); and distant planet image generation (e.g., mobile satellites equipped with interferometers). In these contexts, coordinated, sensor-equipped vehicles will carry out a variety of search and rescue, data gathering and fusion, detection and estimation tasks.

The complexity of these multi-robot systems presents new challenges that lie at the confluence of communication, computation and control. Although the new technology provides the physical components to build such sensor networks, the potential benefits of such systems have not been realized yet. As of today, there is a lack of understanding of how to coordinate and assemble the individual devices together. In other words, there are not systematic methodologies that allow to control large-scale distributed systems like these. As a consequence, there is a great necessity to expand the currently available set of tools and paradigms to design and manage these systems in an efficient manner. In particular, it is envisioned that new substantial contributions will be made from the Mathematical Sciences. In this article we enumerate some of the challenges that are associated with robotic systems of this nature.

## Introducción

En un futuro cercano, nuevas generaciones de robots y vehículos autónomos jugarán un papel crítico en aplicaciones científicas y comerciales de gran impacto social. Algunas de estas aplicaciones incluyen sistemas de observación y supervisión del medio ambiente (por ejemplo, grupos de sensores químicos portátiles capaces de detectar componentes tóxicos), sistemas de



despliegue rápido en situaciones catastróficas (por ejemplo, redes de robots móviles para prevención de desastres naturales y atención de emergencia), redes autónomas de muestreo en estudios biológicos y oceanográficos (por ejemplo, observación de especies amenazadas, validación de modelos micro-climáticos), supervisión de infraestructuras críticas (puentes, edificios, gaseoductos, etc) o estudio y obtención de imágenes de planetas distantes (por ejemplo, por medio de grupos de vehículos espaciales equipados con interferómetros navegando en formación). En estos contextos, sensores y vehículos coordinados desarrollarán operaciones de búsqueda y rescate, reconocimiento, recogida y fusión de datos, detección y estimación de polución, etc. La Figura 3 muestra algunas plataformas en desarrollo.

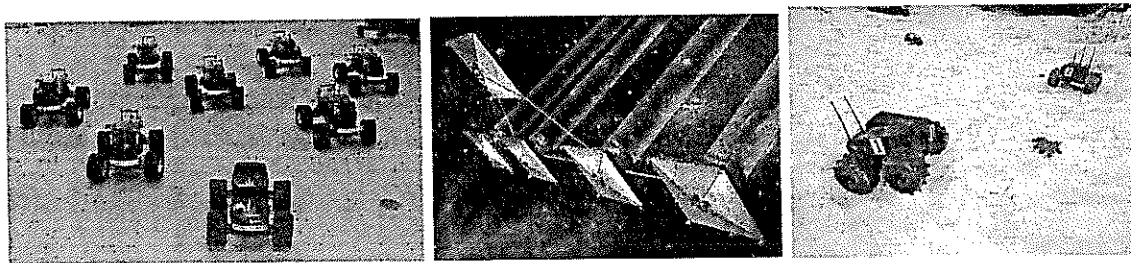


Figura 3: De izquierda a derecha, ejemplos tomados de UIUC Multi Rover Laboratory, NASA Terrestrial Planet Finder y Sandia National Laboratory.

Las ventajas potenciales que resultarán de utilizar colecciones de sensores son numerosas. Por ejemplo, ciertas tareas son difíciles, si no imposibles, cuando son realizadas por un solo agente. Además, un grupo de agentes ofrece de manera inherente una resistencia más robusta ante fallos de los agentes individuales o de los canales de comunicación. En las aplicaciones mencionadas, se emplearán sistemas autónomos tales como robots móviles; vehículos anfibios y todo-terreno; robots espaciales para construcción y servicio; robots con patas, robots-serpiente, robots-peiz y otros robots biomiméticos. Estos sistemas robóticos estarán gobernados por dinámicas híbridas no lineales y se moverán en medios cambiantes y probablemente inseguros. Interaccionarán con su entorno vía ligaduras de rodamiento, impactos y fuerzas viscosas. Los avances tecnológicos en computación, procesos de fabricación y comunicaciones harán posible que estos dispositivos puedan operar con niveles cada vez mayores de autonomía y destreza.

Tales sistemas estarán controlados mediante esquemas jerárquicos que les permitirán operar autónomamente, interaccionar y cooperar con otros robots, y recibir órdenes de un operador humano. Una de las capacidades más básicas e importantes de un robot es la habilidad para planificar y ejecutar con seguridad sus propios movimientos. Esta capacidad es crucial para poder desarrollar lenguajes de programación robótica más sofisticados y poder realizar comportamientos grupales tales como la creación de formaciones y la manipulación cooperativa.

Desde una perspectiva matemática, numerosas áreas de investigación, tanto fundamental como aplicada, tienen una relevancia directa en los problemas de control y robótica a los que nos enfrentamos para hacer posible estos avances. En la actualidad, conceptos, herramientas y métodos de Mecánica Geométrica, Teoría de Sistemas Dinámicos, Teoría de Estabilidad, Análisis No-diferenciable, Teoría de Sistemas, Investigación Operativa, Optimización Distribuida, Ciencias de la Computación, Geometría Computacional, Algoritmos Distribuidos, Teoría de Grafos, Control de Topologías, Estimación y un largo etcétera, están jugando un papel fundamental en el desarrollo de estas capacidades. *El papel de las Matemáticas es crítico a la hora de hacer realidad los escenarios descritos anteriormente.*

Los futuros escenarios y las novedosas aplicaciones de robots autónomos hacen necesario el desarrollo del conjunto de herramientas de control actualmente disponibles. En este informe,

nos centramos en dos clases de problemas en los que los avances matemáticos prometen tener un gran impacto:

- (i) el control de movimientos de sistemas autónomos (Sección );
- (ii) la coordinación de grupos de sistemas autónomos para realizar cooperativamente tareas específicas (Sección ).

## Control de movimientos de sistemas autónomos

Hoy en día disponemos en gran variedad de ambientes de toda clase de sistemas —desde satélites en el espacio hasta sumergibles en el océano— que operan con cada vez mayores niveles de autonomía (ver Figura 4). El funcionamiento correcto de estos sistemas se basa en la selección y ejecución de algoritmos que les permiten realizar sus tareas y adaptarse a las condiciones imprevistas de su entorno. En particular, todo sistema que requiera algún tipo de movilidad precisa resolver el problema fundamental del *control de movimientos*.

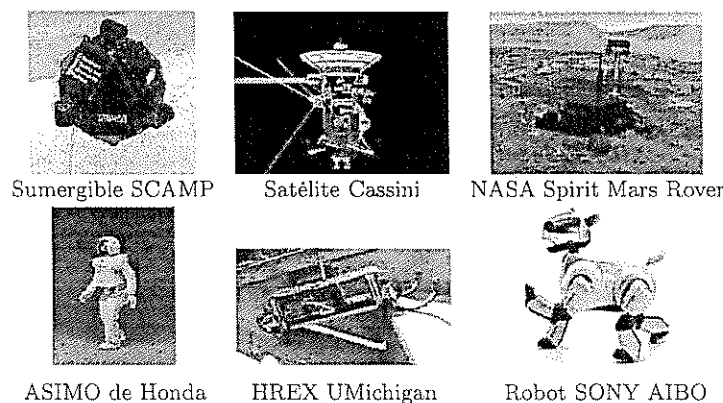


Figura 4: Vehículos autónomos y robots *biomiméticos*.

Por esta razón, uno de los temas principales en robótica es el diseño de mecanismos novedosos de locomoción, tanto físicos como de software, que permitan la fabricación de prototipos más ágiles y hábiles. Así por ejemplo, se han desarrollado múltiples variaciones de herramientas básicas, tales como la rueda. En el *Spirit*, uno de los dos rovers enviado a Marte por la NASA en el 2004, cada rueda posee un motor individual para lograr mayor versatilidad sobre terrenos rugosos [8]. Otra alternativa viene dada por los robots “con patas” (ver Figura 4), que estarían mejor adaptados a suelos con escaleras y hoyos. Esta solución está claramente inspirada en la Naturaleza y es parte de un esfuerzo más amplio por reproducir toda una clase de sistemas “biomiméticos” o “biomorfos”. La motivación tras esta línea de investigación va desde la búsqueda de nuevas formas de locomoción, pasando por la posible explotación comercial (robots de entretenimiento), hasta su utilización como herramienta para entender y reproducir el funcionamiento de los seres vivos (lo que se ha dado en llamar “integrative biology” [7]). En cualquier caso, la fabricación del robot es uno de los pasos necesarios para la realización de un sistema autónomo. Otro aspecto fundamental es el desarrollo de los algoritmos que nos permitan obtener el máximo partido de la tecnología disponible.

Una tendencia generalizada en la búsqueda de algoritmos para el control de movimientos de un robot es la definición de métodos ad hoc, que funcionan muy bien para un sistema robótico concreto, pero no pueden ser extrapolados a otros sistemas similares. Sin embargo, se

puede observar que gran número de prototipos poseen características comunes que hacen posible su tratamiento de forma unificada. *Esta perspectiva ha generado algoritmos válidos para una amplia clase de sistemas, que hacen un uso extensivo de la estructura matemática de sus modelos (ver, por ejemplo, [1, 2, 5]).* Estos algoritmos sirven para definir *primitivas del movimiento*, es decir, movimientos sencillos que pueden combinarse en un comportamiento global de sistema. El control de los sistemas robóticos mediante primitivas se

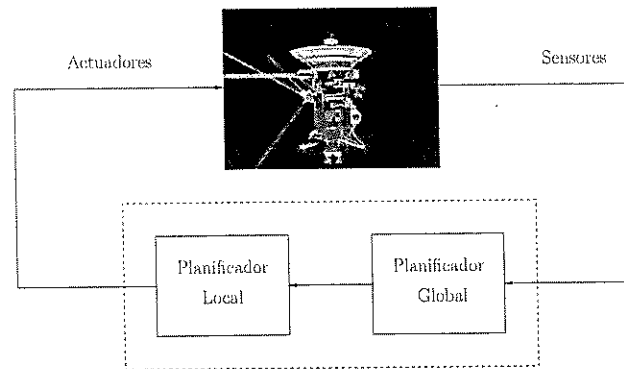


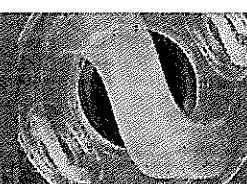
Figura 5: Sistema moderno de control.

emplea en gran número de prototipos y se conoce como *control de bajo nivel* de un *sistema embebido*. Tal y como se ilustra en la Figura 5, el Planificador Global o *control de alto nivel* del sistema autónomo es el encargado de elegir la combinación adecuada de primitivas que el Planificador Local o *control de bajo nivel* genera en respuesta a las condiciones externas del sistema. Esto da lugar a un control por realimentación o por “feedback”, garantizando robustez frente a perturbaciones externas. Las características deseables de las primitivas son: que sean robustas, implementables en tiempo real y poco costosas desde el punto de vista computacional y sensorial. En este sentido, el tipo de algoritmos que están desarrollando desde esta perspectiva unificadora son aplicables a sistemas con un número limitado de medios de acción o “actuadores” y, por tanto, no tan costosos desde el punto de vista del hardware. Como consecuencia, estas primitivas pueden ser útiles en la definición de mecanismos de seguridad para sistemas en los que puedan fallar algunos de sus actuadores.

## Coordinación de sistemas autónomos

La coordinación de sistemas autónomos está adquiriendo una gran importancia en numerosas áreas de la ingeniería. El despliegue de grandes grupos de sensores móviles y vehículos autónomos está convirtiéndose en una realidad gracias a los avances tecnológicos en redes y en miniaturización de sistemas electro-mecánicos. Estas y otras tecnologías emergentes han ido llenando rápidamente el vacío que existía para poder fabricar grandes cantidades de pequeños dispositivos, autónomos, baratos y energéticamente eficientes, equipados con las capacidades de comunicarse entre sí, medir y estimar fenómenos físicos en su entorno, procesar los datos que adquieren y decidir su movimiento con la información procesada.

La complejidad de tales sistemas móviles presenta nuevos desafíos en la frontera entre la *comunicación*, la *computación* y el *control*. Aunque la tecnología suministra los componentes físicos de tales redes de sensores, y aunque estos sistemas tendrían un impacto positivo en



numerosas aplicaciones, los beneficios potenciales de tales sistemas no se han *materializado* todavía.

*A día de hoy, la limitación fundamental es la falta de entendimiento para coordinar los dispositivos individuales en un todo coherente.*

Dicho de otra manera, no existen metodologías sistemáticas para controlar sistemas distribuidos y fiables a gran escala, tales como una red de sensores desarrollando tareas complejas. Como consecuencia de estas limitaciones tecnológicas, existe una fuerte necesidad por expandir el conjunto de paradigmas y herramientas actualmente disponibles para el diseño de redes escalables de sensores y la verificación formal de su rendimiento. *Y en esta tarea, varias áreas de las Matemáticas tienen mucho que aportar.* Algunos desafíos a la hora de diseñar algoritmos de coordinación para realizar tareas cooperativas son los siguientes: los algoritmos deben ser

**Adaptativos:** los algoritmos de coordinación deben dotar a la red de la habilidad para responder y adaptarse a diversas tareas, ambientes dinámicos y topologías variables (debido a llegadas, salidas o fallos de agentes individuales). La red ha de ser capaz de reaccionar a gran variedad de condiciones cambiantes.

**Distribuidos:** los algoritmos de coordinación deben depender de la menor cantidad posible de información global, y en cambio, es deseable que el comportamiento de cada agente dependa sólo de información local. Los algoritmos distribuidos tienen la ventaja de ser escalables (es decir, funcionan en redes formadas por un número arbitrario de agentes y satisfacen las limitaciones de ancho de banda en las comunicaciones), y robustos ante los fallos en la comunicación o el mal funcionamiento de los agentes individuales. A medida que la red evoluciona, las relaciones de vecindad cambian. Por tanto, los algoritmos distribuidos para grafos de comunicación fijos (habituales, por ejemplo, en computación paralela y en ciertos tipos de aplicaciones en internet) no son aplicables a este tipo de situaciones dinámicas.

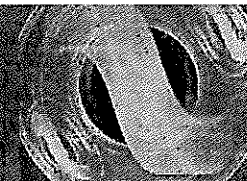
**Asíncronos:** los algoritmos de coordinación deben ser implementables de manera asíncrona. Esto significa que los agentes de la red pueden estar evolucionando con distintas velocidades, y con diferentes capacidades de computación y comunicación. Además, no existe un *reloj global* para toda la red, sino que cada agente evoluciona de acuerdo a su propia noción de tiempo. Casi en cualquier escenario real, la información se propaga entre los agentes con cierto retraso, y además éste nunca es el mismo. Estas características hacen a la vez crucial y complicado establecer garantías formales acerca del comportamiento de la red.

**Corrección asintótica verificable:** Mientras se completa la tarea asignada, los algoritmos de coordinación han de garantizar una convergencia segura frente a posibles fallos en el sistema (colisiones, atascos de comunicación, fallos de los dispositivos en cada robot, etc.). La importancia de la verificación formal crece con la dimensión y la complejidad de la red de robots considerada.

Motivados por estos problemas (ver también [3, 4]), en la actualidad, se está desarrollando un gran esfuerzo interdisciplinar en esta dirección en el que están implicados investigadores de diferentes departamentos. El trabajo [6] recoge un tratamiento más técnico del progreso hecho hasta la fecha, y de algunas perspectivas futuras.

## Conclusiones

En términos generales, los retos fundamentales a los que nos enfrentamos para hacer posible este nuevo horizonte de aplicaciones tecnológicas, son los de 1) optimizar y desarrollar cada uno



de los aspectos que definen a un sistema autónomo (movilidad, comunicación, computación...) para hacerlos mas eficaces y 2) saber integrar de forma óptima las múltiples componentes de distinta índole que forman parte de cada sistema y que caracterizan la relacion de sistema a sistema.

En particular, estos objetivos no podrán realizarse sin el correspondiente desarrollo de las herramientas matemáticas que nos permitan analizar todas las facetas involucradas. A grandes rasgos se hace necesario:

- El desarrollo de herramientas matemáticas para la modelización y el análisis de los sistemas autónomos y robóticos. Esto es fundamental para generar sistemas con mayores niveles de autonomía, más versátiles y precisos.
- El análisis pormenorizado de los límites fundamentales que la tecnología impone y, teniendo esto en cuenta, el diseño de mecanismos de control y herramientas matemáticas que sepan explotar las características particulares de dicha tecnología.
- El análisis matemático se puede y se debe complementar con técnicas de simulación avanzadas que permitan un mayor entendimiento de cómo integrar los distintos aspectos de comunicación, computación, sensores y actuadores de estos sistemas complejos.

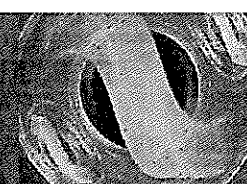
El estudio sistemático de la estructura matemática de los problemas descritos en este informe (control de movimientos y coordinación de sistemas autónomos) promete ser de una gran utilidad en numerosos dominios científicos y comerciales. En nuestra opinión, esta afirmación está ampliamente refrendada por la realidad investigadora actual en estos campos, y, al menos en los EEUU, existe un consenso generalizado al respecto (ver, por ejemplo, [4, 7]).

## Bibliografía

- [1] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Number 24 in Interdisciplinary Texts in Mathematics. Springer Verlag, 2003.
- [2] F. Bullo and A. D. Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems*, volume 49 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, New York, 2004.
- [3] Y. Uny Cao, A. S. Fukunaga, and A. Kahng. Cooperative mobile robotics: Antecedents and directions. *Autonomous Robots*, 4(1):7–27, 1997.
- [4] Committee on Networked Systems of Embedded Computers. *Embedded, Everywhere: A Research Agenda for Networked Systems of Embedded Computers*. National Academy Press, 2001.
- [5] S. Martínez. *Geometric Methods in Nonlinear Control Theory with Applications to Dynamic Robotic Systems*. PhD thesis, University Carlos III, Madrid, Spain, 2002.
- [6] S. Martínez, J. Cortés, and F. Bullo. Motion coordination with distributed information. *IEEE Control Systems Magazine*, November 2005. Submitted.
- [7] R. M. Murray, editor. *Control in an Information Rich World*. SIAM, Philadelphia, 2003. Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics and Systems.
- [8] NASA rover website. <http://marsrovers.jpl.nasa.gov>.

Sonia Martínez  
Mechanical and Aerospace Engineering  
Jacobs School of Engineering  
University of California, San Diego





La Jolla, CA 92093, USA  
Correo electrónico: [soniamd@ucsd.edu](mailto:soniamd@ucsd.edu)  
Página web: <http://flyingv.ucsd.edu/sonia>

Jorge Cortés  
Applied Mathematics and Statistics  
Baskin School of Engineering  
University of California, Santa Cruz  
Santa Cruz, CA 95064, USA  
Correo electrónico: [jcortes@ucsc.edu](mailto:jcortes@ucsc.edu)  
Página web: <http://www.ams.ucsc.edu/~jcortes>