T1: Matrices y Determinantes (Hoja 1)

1.- Comprobar que $(A + B)^t = A^t + B^t$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.- Comprobar usando las matrices anteriores que: $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$

3.- Resolver la ecuación matricial AX – B = X, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

4.- Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ para los distintos valores de t.

5.- Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 5X + 3Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

6.- Comprueba que las identidades algebraicas

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ y $(A+B).(A-B) = A^2 - B^2$

no son ciertas para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Modifica el segundo miembro de esas identidades para obtener fórmulas válidas para todas las matrices cuadradas A y B.

¿Para qué matrices son válidas las fórmulas establecidas?.

7.- Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Determina el rango.

8.- Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^2 - 3A - I$ donde I es la matriz identidad.

9.- Resuelve la ecuación matricial A.X.B = C, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10.- Calcula aplicando propiedades de los determinantes: $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

11.- Prueba sin desarrollarlo que $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

12.- Demuestra la siguiente propiedad de los determinantes:
Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes, el valor del determinante no varía, es decir, $Det(A^1, A^2, A^3) = Det(A^1 + \alpha A^2 + \beta A^3, A^2, A^3)$

13.- Prueba que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab$. Calcula el rango de la matriz para los distintos valores de los parámetros.

14.- El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para a = 3. Comprueba que es así sin desarrollarlo.