Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{a}_{1\mathrm{n}}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

si tenemos en cuenta el producto y la igualdad de matrices, podemos expresarlo en la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots. \\ b_m \end{pmatrix}$$

Esta expresión recibe el nombre de forma matricial.

Teorema de Rouché.

En un sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{a}_{1\mathrm{n}}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

llamaremos matriz de coeficientes A, a la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas y matriz ampliada A^*, a la que resulta de agregar a la anterior la columna de los términos independientes, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots\ldots a_{1n} & \mathrm{b}_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}\ldots\ldots\ldots a_{mn} & \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

, o bien,

$$A = \{\mathrm{A}^1,\ \mathrm{A}^2, \qquad \mathrm{A}^\mathrm{n}\}; \qquad A^* = \{\mathrm{A}^1,\ \mathrm{A}^2, \qquad \mathrm{A}^\mathrm{n}, \mathrm{B}\}$$

El teorema de Rouché dice:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada.

Demostración:

Supongamos que el sistema tiene solución: Entonces el vector B puede escribirse como combinación lineal de A^1, A^2, ...,A^n, es decir, $B = \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + ... + \alpha_n A^n$, luego $rang\{A^1, A^2, ..., A^n\} = rang\{A^1, A^2, ..., A^n, B\}$

Supongamos ahora que A y A^* tienen el mismo rango: Si rang A = rang A^* , habrá r vectores que son linealmente independientes: $A^{1,}$ A^2, ...,A^r.

Si $\{A^1, A^2, ..., A^r\}$ es una base del espacio vectorial que engendran, el vector B podrá escribirse como combinación lineal de los vectores que integran la base:

$B = \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + ... + \alpha_r A^r$, es decir,

$B = \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + ... + \alpha_r A^r + 0A^{r+1} + 0A^{r+2} + ... + 0A^n$

y entonces la colección de números $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, 0, 0, , , , , 0)$

es una solución del sistema.

La solución es única si el rango es igual al número de incógnitas.

Si el rango de las matrices es menor que el número de incógnitas, existen infinitas soluciones y el sistema se llama indeterminado.

Sistemas homogéneos:

En los sistemas homogéneos siempre hay solución: (0, 0, ...0). Para que exista solución distinta de la trivial se ha de cumplir que rang(A)<número de incógnitas.

Regla de Cramer.

Un sistema de Cramer es un sistema de ecuaciones lineales donde el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\}$$

que podemos expresarlo en forma vectorial realizando las siguientes transformaciones: $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ a_{31}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_1 \\ a_{22}x_x \\ a_{32}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13}x_3 \\ a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

es decir, $x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

y entonces resulta $x_1A^1 + x_2A^2 + x_3A^3 = B$ que es la ecuación vectorial del sistema.

Si desarrollamos el determinante de $(B, A^2, A^{3)}$ resulta:

$$Det(B, A^2, A^3) = Det(x_1A^1 + x_2A^2 + x_3A^3, A^2, A^3) =$$

$$= x_1.Det(A^1, A^2, A^3) + x_2.Det(A^2, A^2, A^3) + x_3.Det(A^3, A^2, A^3)\text{, es decir,}$$

$Det(B, A^2, A^3) = x_1.Det(A^1, A^2, A^3)$ porque los otros determinantes valen cero.

y despejando x_1 se obtiene: $x_1 = \dfrac{Det(B, A^2, A^3)}{Det(A^1, A^2, A^3)}$

De forma similar se obtiene:

$x_2 = \dfrac{Det(A^1, B, A^3)}{Det(A^1, A^2, A^3)}$ y $x_3 = \dfrac{Det(A^1, A^2, B)}{Det(A^1, A^2, A^3)}$

<u>Cálculo de la matriz inversa a través de determinantes.</u>

Se siguen los siguientes pasos:

1. Se halla el determinante de la matriz. Si es cero no existe inversa.
2. Se hallan los adjuntos de la matriz dada, A_{ij}
3. Se forma la matriz traspuesta de los de adjuntos obtenida dividida por Det(A).