MATRICES

Matriz.

Se llama matriz de orden $m \times n$ a una tabla de números que consta de m filas y n columnas. La expresamos en la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ ....a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ ....a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} \ a_{m2} \ ....a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cuando m = n la matriz es cuadrada.

En una matriz el elemento a_{ij} se encuentra en la fila i y en la columna j.

abreviadamente una matriz podemos escribirla así:

$$A = (a_{ij}) \ ; \quad i = 1, 2, 3, 4, ..., m \ ; \qquad j = 1, 2, 3, 4, ..., n$$

Dada una matriz cualquiera, por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, podemos escribirla

separando sus filas, es decir, $A_1 = (\ 2, 1, 3\ )$; $A_2 = (3,\ 0, 2\ )$

o bien, sus columnas: $A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Esto significa que podemos pensar en una matriz bien como una tabla de elementos, bien como un conjunto de vectores puestos en fila,

$$A = (A_1, A_2, ..., A_n)$$

bien como un conjunto de vectores puestos en columna.

$$A = (A^1, A^2, ..., A^n)$$

Igualdad de matrices.

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall_{ij}$

Matriz traspuesta.

Dada una matriz $A = (a_{ij})$, se llama traspuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas.

Si A es de orden $m \times n$ A^t es de orden $n \times m$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ que es de orden 2 x 3 $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ que es de orden 3 x 2.

Matriz simétrica.

Una matriz cuadrada es simétrica si coincide con su traspuesta.

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ es simétrica como puede comprobarse.

Obsérvese que doblada por la diagonal principal los números que coinciden son iguales.

Matriz diagonal.

Es la que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal. (subíndices iguales).

Ejemplo:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz unidad.

Es la que tiene la diagonal principal formada por unos y los demás elementos nulos. Se designa por I.

Operaciones con matrices.

Designamos por M_{mxn} el conjunto de las matrices de m filas y n columnas. Dadas las matrices $A = (a_{ij}) \epsilon M_{mxn}$ y $B = (b_{ij}) \epsilon M_{mxn}$

Se define la suma de A y B en la forma siguiente:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij}) = C$$

El producto de un número real λ por una matriz $A = (a_{ij})$ se define así:

$$\lambda.A = \lambda.(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

Ejercicio:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

Calcula para las anteriores matrices $A + B$, $3.A$ y $A\text{-}2B$

Dos matrices A y B son multiplicables si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

El producto de matrices se define de la forma siguiente:

$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$; $B = (b_{jk}) \in M_{n\times p}$

$C = A.B = (a_{ij}).(b_{jk}) = (c_{ik}) \in M_{m\times p}$

siendo $c_{ik} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}.b_{hk}$, es decir, si

$$\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} . & b_{1k} & . \\ . & b_{2k} & . \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ . & b_{nk} & . \end{pmatrix}$$

(n columnas) (n filas)

$c_{ik} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}.b_{nk}$

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $A.B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$

El producto de matrices no es conmutativo en general.

Ejercicio: calcula el producto de B.A. ¿Este ejercicio demuestra la frase anterior?

Matriz inversa.

Dada una matriz cuadrada A, Si existe otra matriz B, tal que A.B = B.A = I, se dice que A es invertible y la matriz B recibe el nombre de inversa de A. Se expresa por A^{-1}.

DETERMINANTES

Determinante de segundo orden.

Sea una matriz cuadrada de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se llama determinante de la matriz A al número real obtenido de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

es decir, la diferencia entre los productos cruzados de sus elementos.

El valor obtenido se denota también por det(A).

Determinante de tercer orden

Sea una matriz cuadrada de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se llama determinante de la matriz *A* al número real obtenido de la siguiente forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{23}.a_{32}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Regla de Sarrus

Sirve para recordar la definición de determinante de tercer orden:

Productos positivos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Productos negativos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Ejemplos: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - 1.(-2) = 14$;

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 1.5.10 + (2).6.(-7) + 3.4.8 - 3.5.(-7) - 6.8.1 - 10.4.(-2) = 367$$

Menor complementario y adjunto.

Dada una matriz cuadrada de orden *n* y uno de sus elementos a_{ij}, se llama menor complementario de dicho elemento al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila *i* y la columna *j*.

Adjunto de a_{ij} es el menor complementario precedido del signo + o – según que $i + j$ sea par o impar. Se representa por A_{ij}

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Menor complementario del elemento 3: $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

Adjunto del elemento 3: $A_{23} = (-)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$.

Se pone signo negativo porque 2 + 3 es impar.

Adjunto del elemento 0: $A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$. Se pone signo positivo porque 2 +2 es par.

El cálculo de un determinante de orden 3 se puede reducir al cálculo de un determinante de orden 2 aplicando el siguiente teorema:

El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de una columna o fila multiplicados por sus correspondientes adjuntos.

Sea la matriz de orden 3 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Si elegimos, por ejemplo, la 1ª fila y aplicamos el teorema, resulta:

$$|A| = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{23}.a_{32}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

resultado que coincide con la definición que hemos dado para los determinantes de tercer orden.
Igualmente ocurre si elegimos otra fila o cualquier columna.

Propiedades de los determinantes.

1ª) El determinante de una matriz no varía si se cambian filas por columnas.

$$\mathrm{Det(A)} = \mathrm{Det}(\mathrm{A}^t)$$

2ª) El determinante de la matriz unidad vale 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

3ª) Si se intercambian entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo

$$Det(A^1, A^2, A^3) = -Det(A^2, A^1, A^3)$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ como puede comprobarse.

4ª) Si se multiplica una fila o columna por un número el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$Det(kA^1, A^2, A^3) = k.Det(A^1, A^2, A^3)$$

5ª) Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales su valor es cero.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ como puede comprobarse.

6ª) Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales su valor es cero

$$Det(A^1, kA^1, A^3) = k.Det(A^1, A^1, A^3) = 0$$

7ª) Si una fila o columna puede descomponerse en suma de otras dos, por ejemplo, $A^1 = B + C$, entonces $Det(B+C, A^2, A^3) = Det(B, A^2, A^3) + Det(C, A^2, A^3)$

8ª) Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes, el valor del determinante no varía.

$$Det(A^1, A^2, A^3) = Det(A^1 + \alpha A^2 + \beta A^3, A^2, A^3)$$

9ª) Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes, el valor del determinante es cero.

$$Det(A^1, A^2, \alpha A^1 + \beta A^2) = Det(A^1, A^2, \alpha A^1) + Det(A^1, A^2, \beta A^2) = 0 + 0 = 0$$

Cálculo de determinantes.

Para resolver determinantes de órdenes 2 y 3 podemos usar directamente la definición. En general, el cálculo de un determinante de cualquier orden se puede reducir al de un determinante de un orden inferior, desarrollándolo por los elementos de una fila o columna. Para facilitar el proceso lo desarrollaremos por la fila o columna que contenga más ceros.

Usando el método de Gauss podemos transformarlo en el determinante de una matriz triangular con lo que su valor es el producto de los elementos de la diagonal principal.

El rango de una matriz y los determinantes.

Si las filas de una matriz cuadrada son l.i. su determinante es distinto de cero.

Si las filas de una matriz son l.d. entonces el determinante es cero.

Rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 13 & -8 & 6 \end{pmatrix}$

Para calcular su rango buscamos un menor no nulo. En este caso el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$ es distinto de cero por lo que partiremos de él.

Ahora buscamos los menores de orden 3 que resultan de orlarlo para ver si alguno de ellos es distinto de cero.

(Orlar un menor es formar un menor de orden una unidad superior tomando una fila más y una columna más de las que forman el menor inicial)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 10 \\ 0 & -13 & -8 \end{vmatrix} = 8 - 234 + 130 + 96 = 0\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 78 - 72 = 0$$

Todos los menores de orden 3 son nulos, por tanto, el rango es 2.