SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición.

En general, un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son las incógnitas, los números reales a_{ij} reciben el nombre de coeficientes de las incógnitas y los números $b_1, b_2, ..., b_m$ son los términos independientes.

Si pasamos los términos independientes al primer miembro, el sistema podemos escribirlo en forma abreviada:

$$\begin{cases} E_1(x) = 0 \\ E_2(x) = 0 \\ .... \\ E_m(x) = 0 \end{cases}$$

siendo:

$E_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - b_1$

etc.

Se llama solución de un sistema general de ecuaciones lineales a los números reales ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que verifica todas las igualdades del sistema.

Atendiendo al número de soluciones podemos clasificar los sistemas en la forma siguiente:

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: CLASIFICACIÓN			
Incompatibles (No tienen solución)		Compatibles (Tienen solución)	
		Determinados (Tienen solución única)	Indeterminados (Tienen infinitas soluciones)

Sistemas homogéneos.

Son los que tienen todos los términos independientes nulos. Estos sistemas siempre admiten la solución (0, 0, 0,......,0) que recibe el nombre de solución trivial, por tanto, los sistemas homogéneos son siempre compatibles.

Combinaciones lineales de ecuaciones.

Es una suma de ecuaciones multiplicadas por números cualesquiera y sumadas.

En el sistema

$$\begin{cases} E_1(x) = 0 \\ E_2(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_m(x) = 0 \end{cases}$$

la ecuación $\lambda_1 E_1(x) + \lambda_2 E_2(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n E_m(x) = 0$ es una combinación lineal.

Los números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda_m$ se llaman coeficientes de la combinación lineal.

Sistemas equivalentes.

Son los que tienen las mismas soluciones; es decir, toda solución del primero es solución del segundo y viceversa. Los sistemas

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\}$$

no son equivalentes como puede comprobarse. Además el segundo tampoco es lineal.

Es fácil probar que las siguientes transformaciones, efectuadas sobre las ecuaciones de un sistema lineal, lo convierten en otro equivalente:

- Cambiar el orden de las ecuaciones.
- Multiplicar una de las ecuaciones por un número distinto de cero.
- Sumar a una de las ecuaciones una combinación lineal de las demás.
- Sustituir una ecuación por una combinación lineal en la que ella intervenga, siempre que su coeficiente sea distinto de cero. (Teorema fundamental de equivalencia)
- Suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las demás.

Método de Gauss.

Se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Consiste en sustituir el sistema por otro equivalente. Después de sucesivas transformaciones se llega a un sistema escalonado, es decir, que tiene nulos todos los coeficientes debajo de la diagonal del sistema.

Se realizan tres operaciones fundamentales:

1ª Intercambio de ecuaciones (el primer coeficiente de la 1ª ecuación ha de ser distinto de cero y, a ser posible, que valga 1)

2ª Multiplicación de una ecuación por un número distinto de cero.

3º Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.

Para iniciar el proceso se empieza por colocar todos los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes en una tabla.

Dicha tabla recibe el nombre de matriz asociada al sistema de ecuaciones.

Discusión del método.

Aplicado el método de Gauss, en el sistema escalonado resultante puede ocurrir:

1º Que haya alguna ecuación de la forma 0 = c; c≠0.

Sistema incompatible.

2º Que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas.

Sistema compatible determinado.

3º Que el número de ecuaciones sea menor que el número de incógnitas.

Sistema compatible indeterminado.

Resolución de sistemas.

Para los siguientes ejemplos describe cuales son las transformaciones que se van realizando de acuerdo con el método de Gauss descrito con anterioridad.

I.- Consideremos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{array}\right\}$$

Escribiendo la matriz asociada y realizando transformaciones resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{pmatrix}$$

Se ha obtenido un sistema escalonado.

La 3ª ecuación es 45z = 45 y de ella resulta z = 1

La 2ª ecuación es – y + 8z = 6 por lo que – y +8.1 = 6, es decir, y =2

Finalmente la 1ª ecuación es x – y – 2z = -1 y teniendo en cuenta los valores de ***y*** y de ***z*** obtenidos sale x = 3.

II.- Sea el sistema siguiente: $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=3 \\ -x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Procediendo como en el caso anterior resulta z = 0;   y = -4 ; x = -5.

III.- Veamos ahora el caso de un sistema incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=6 \\ 4x-2y+6z=9 \\ x-y+z=3 \end{array}\right\}$$

A fin de tener un 1 en la parte superior izquierda de la matriz podemos intercambiar ecuaciones y resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

De la 3ª fila de la matriz resulta 0z = -3, es decir, 0 = -3 lo que es absurdo. Por tanto, el sistema no tiene solución.

IV.- Veamos finalmente un sistema con infinitas soluciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=4 \\ 2x-y-z=6 \\ 3x-2y+2z=10 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el número de ecuaciones del sistema equivalente obtenido es menor que el número de incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado.

Para resolverlo escribimos la 2ª ecuación:

$$y - 72z = -2 \text{ , es decir, } y = -2 + 7z \text{ (valor de y).}$$

Sustituyendo dicho valor en la 1ª ecuación:

$$x - (-2 + 7z) + 3z = 4 \text{, es decir, } x = 2 + 4z.$$

Haciendo $z = \lambda$, las soluciones del sistema son:

$$\begin{aligned} x &= 2 + 4\lambda \\ y &= -2 + 7\lambda \\ z &= \lambda; \quad \lambda \in \mathrm{R} \end{aligned}$$