

LA DIFERENCIAL TOTAL Y LA REGLA DE LA CADENA

DEFINICIÓN La Diferencial total de una Función de dos variables $f(x,y)$ es la función d_f de cuatro variables x,y,h,k dada por la fórmula:

$$d_f(x,y,h,k) = f_x(x,y)h + f_y(x,y)k$$

Si F es una Función de 3 variables (x,y,z) definimos la diferencial total como la Función de 6 variables x,y,z,h,k,l dada por:

$$dF(x,y,z,h,k,l) = F_x(x,y,z)h + F_y(x,y,z)k + F_z(x,y,z)l$$

EJEMPLO: Hallar $d_f(x,y,h,k)$ y $\Delta_f(x,y,h,k)$ para los valores dados de x,y,h,k .

$$1. \quad f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 \quad ; \quad x = 2, \quad y = -1, \quad h = -0,01, \quad k = 0,02$$

$$f_x = 2x - y$$

$$f_y = -x + 4y$$

$$d_f(x,y,h,k) = (2x - y)h + (-x + 4y)k$$

$$d_f(2,-1,-0,01,-0,02) = (4+1)(-0,01) + (-2-4)0,02$$

$$d_f = -0,05 - 0,12 = -0,17$$

$$\Delta f = f(x+h,y+k) - f(x,y)$$

$$\Delta f = f(1,99,-0,98) - f(2,-1)$$

$$\Delta f = (1,99)^2 + 1,99 \cdot 0,98 + 2(0,98)^2 - (4 + 2 + 2) = -0,1689$$

2. Una caja tiene extremos de forma cuadrada con 11,98 cm. de lado y una longitud de 30,03 cm. Hallar su volumen en forma aproximada, usando diferenciales.

SOLUCION

$$f(x, y) = x^2 y$$

Deseamos hallar $f(11.98, 30.03)$

$$f(12, 30) = 12^2 \cdot 30 = 4320$$

$$x = 12 \rightarrow h = -0.02$$

$$y = 30 \rightarrow k = 0.03$$

$$\Delta f = f(x + h, y + k) - f(x, y)$$

$$*f(x + h, y + k) = f(x, y) + \Delta f$$

Aproximamos Δf mediante la diferencial d_f

$$d_f(x, y, h, k) = f_x h + f_y k$$

$$f_x = 2xy$$

$$f_y = x^2$$

$$\therefore d_f(x, y, h, k) = 2xyh + x^2 k$$

$$d_f(12, 30, -0.02, 0.03) = 2 \cdot 12 \cdot 30(-0.02) + 12^2(0.03) = -10.08$$

$\therefore$ en *

$$f(11.98, 30.03) = 4320 - 10.08 = 4309.92$$

Utilizando diferenciales, hallar el valor aproximado de:

$$\sqrt{(5.02)^2 + (11.97)^2}$$

SOLUCION

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(5,12) = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$$x = 5 \rightarrow h = 0.02$$

$$y = 12 \rightarrow k = -0.03$$

$$f(5.02;11.97) \approx f(5.12) + d_f$$

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d_f = \frac{5}{13}(0.02) + \frac{12}{13}(-0.03) = -0.02$$

$$f(5.02 ; 11.97) \approx 13 - 0.02 = 12.98$$

$$V_V = 12.980035$$

TEOREMA

La **Diferencial Total de una Función** f de varias variables se puede obtener por la Regla de la Cadena.

TEOREMA

Sea $z = f(x,y)$, y que x e y son funciones de otra variable. Entonces,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \leftrightarrow \text{Diferencial}$$



Diferencial

Si $\omega = g(x,y,z)$ tal que x, y, z son Funciones de otra variable. Entonces:

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz$$

EJEMPLO:

1. Sea $z = x^2 + xy - y$

$$x = r^2 + 2s^2$$

$$y = rs + 2 \quad \text{Hallar } d_z$$

SOLUCION

$$d_z = (2x + y)dx + (x - 1)dy$$

$$d_x = 2rh + 4sk$$

$$d_y = 5h + rk$$

$$\therefore d_z = (2x + y)(2rh + 4sk) + (x - 1)(sh + rk)$$

OTRO METODO:

$$d_z = \frac{\partial z}{\partial r}h + \frac{\partial z}{\partial s}k \quad \begin{cases} z = x^2 + xy - y \\ x = r^2 + 2s^2 \\ y = rs + 2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r} = (2x+y)2r + (x-1)s$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = (2x+y)45 + (x-1)r$$

$$d_z = [(2x+y)2r + (x-1)5] h + [(2x+y)45 + (x-1)r] k$$

$$d_z = (2x+y)2rh + (x-1)sh + (2x+y)45k + (x-1)rk$$

$$d_z = (2x+y)(2rh + 45k) + (x-1)(sh + rk)$$