FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
DERIVADAS PARCIALES

Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una Función de *n* variables la Derivada Parcial de *f* con respecto a su j-ésima variable x_j, se representa por fx_j y se define como la Función obtenida diferenciando *f* con respecto a x_j, tratando a todas las otras variables como constantes.

DEFINICIÓN: **Sea $f \in IR^2$; $f(x, y)$ claramente tendremos dos Derivadas Parciales una con respecto *a x* y la otra con respecto a *y*.**

SIMBOLOGIA USUAL

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad\qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Colocadas vectorialmente forma el gradiente de la función.

Observación

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ **Derivada Ordinaria**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$ **(Derivada parcial de *f* respecto x, aquí *y* es constante)**

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$ **(Derivada parcial de *f* respecto y, aquí x es constante)**

EJEMPLO 6:

Si $f(x, y) = x^2 y$ **calcular** $\frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}$

Usando la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$ ***y* Constante**

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2)y - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{y\left(x^2 + 2hx + h^2 - x^2\right)}{h} = \lim_{h \to 0} y(2x+h) = 2x$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$ **x Constante**

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2(y+h) - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2(y+h) - y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 h}{h} = x^2$$

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Derivadas Parciales de Derivadas Parciales.

Si $f(x,\ y) = 8x^5y^4 - 2xy$

Entonces,

$$f_x = 40x^4y^4 - 2y$$
$$f_y = 32x^5y^3 - 2x$$

Al calcular las Derivadas Parciales de $fx \quad \wedge \quad fy$ **obtenemos:**

$$f_{xx} = (fx)x = 160x^3y^4 \qquad f_{yy} = (fy)y = 96x^5y^2$$

$$f_{xy} = (fx)y = 160x^4y^3 - 2 \qquad (fy)x = 160x^4y^3 - 2$$

OBSERVACIÓN

$f_{xy} = f_{yx}$ **Para muchas funciones ocurre que las “Derivadas Cruzadas” coinciden.**

TEOREMA

Si $z = f(x,y)$ **tiene Derivadas Parciales Continuas**

f_x , f_y , f_{xy} y f_{yx} **entonces,** $f_{xy} = f_{yx} \quad \leftrightarrow \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

La notación ∂ **para las 4 derivadas de segundo orden.**

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Colocados matricialmente forman el Hessiano de la función.