Teoría Bloque IV: Análisis de Elección Óptima

Matemáticas Aplicadas a la Empresa

Universidad Francisco de Vitoria. Curso 2016-2017. JMCU. v0.0

1. Derivadas Parciales

Si $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv f(\mathbf{x})$ es una función de n variables, la *derivada paracial* de f respecto a la j-ésima variable x_j en el punto $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \equiv (\mathbf{a})$ se define como

$$f_{x_j}(\mathbf{a}) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_j + h, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n)}{h},$$

es decir, es la derivada estándar con respecto a la variable x_j suponiendo el resto de variables constantes. Fíjese en las dos notaciones que se pueden utilizar. En el caso particular de sólo dos variables $f(x_1, x_2)$, se suele emplear la notación $z = f(x, y)$, por lo que las dos derivadas parciales serán

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$$

Al igual que en las derivadas de funciones de una variable, aplicando la definición a todos los puntos del dominio de definición, obtenemos las *funciones* derivadas parciales.

Si construimos el vector de orden n (o matriz columna $\mathbb{R}^{n\times 1}$) con las derivadas parciales, obtenemos el *gradiente* de la función:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

El vector gradiente de f evaluado en un punto genérico $\mathbf{x} = \mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ del dominio de f, indica la dirección en la cual el campo f varía más rápidamente y su módulo representa el ritmo de variación de f en la dirección de dicho vector gradiente.

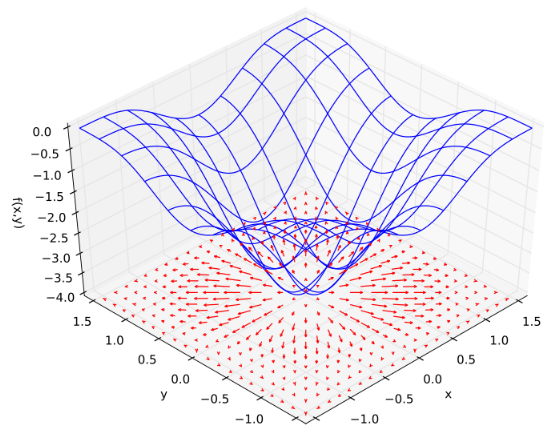

Figura 1: Función $f(x,y) = -\left(\cos^2 x + \cos^2 y\right)^2$. Sobre el plano horizontal se muestra el campo de vectores gradiente.

Dada una función de varias variables, se define las *curvas de nivel* o *isolíneas* o *contorno* a las curvas obtenidas al hacer igualar la función a una constante. Es decir, en las curvas de nivel el valor de la función es constante, y por tanto el vector gradiente es tangente a dichas líneas. Se calculan haciendo

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k,$$

siendo k una constante.

Para el caso particular de funciones de sólo dos variables, podemos representarlas por medio de un gráfico en tridimensional usando 3 ejes coordenados $X - Y - Z$. En el plano horizontal $X - Y$ representamos las variables independientes x e y, y el valor de la función $z = f(x,y)$ lo reprentamos como la altura en el eje Z. En las figuras 1 y 2 se muestran dos ejemplos.

Si aplicamos sucesivamente la definición de derivadas parciales, obtenemos las derivadas de orden superior. Así, en el caso de dos variables, tenemos 4 derivadas parciales de orden 2:

$$f_{xx} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad f_{yx} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad f_{yy} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

A las derivadas f_{xy} y f_{yx} se las denomina derivadas cruzadas. De igual modo obtendríamos las 8 derivadas terceras $f_{xxx} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $f_{xxy} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}$, etc.

El teorema de *Clariaut* o de *Schwarz* dice que si existen las derivadas cruzadas y éstas son contínuas, entonces son iguales. Es decir, en el caso de dos variables

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Si las derivadas segundas se colocan formando una matriz cuadrada de orden n, siendo n el número de variables, obtenemos la matriz *Hessiana*:

$$H_f(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}).$$

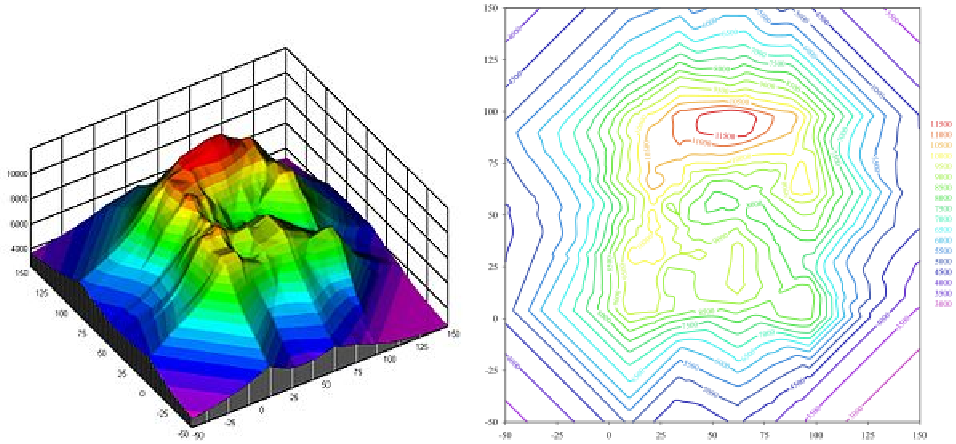

Figura 2: Función de dos variables representada como una superficie tridimensional. A la derecha se muestra el gráfico de isolíneas o curvas de nivel.

Por el teorema de Schwarz, la matrix Hessiana (o *Hessiano*) será un matriz simétrica.

Para el caso de un función de dos variables $z \equiv f(x, y)$, definimos su *diferencial total* como

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

donde dx y dy son incrementos arbitrarios de las variables independientes. Sirve para aproximar el incremento de la función cuando incrementamos las variables independientes una cantidades finitas $\triangle x$ y $\triangle y$. Así aproximamos el incremento de la función como

$$\triangle z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial z}{\partial y} \triangle y.$$

De forma similar al diferencial total, con las derivadas parciales podemos aproximar una función mediante su plano tangente (Fig. 3). Sea una función de dos variables $z = f(x, y)$. Entonces su plano tangente en el punto (x_0, y_0) es

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Si a su vez x e y son funciones de otra tercera variable t, aplicando la regla de la cadena obtenemos la derivada total. Es decir si $z \equiv f(t, x(t), y(t))$ se obtiene el diferencial $dz = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ y dividiendo por dt tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Las derivadas parciales nos pueden servir para calcular las derivadas ordinarias de un afunción dada en forma implícita. Así, supongamos que nos dan una relación implícita entre dos variables de la siguiente forma: $g(x, y) = 0$. Supongamos que queremos calcular la derivada de la función

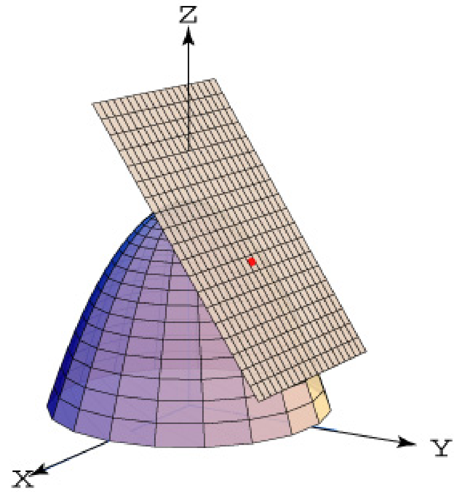

Figura 3: Plano tangente a un paraboloide.

y con respecto a x. Suponiendo entonces $g(x, y(x)) = 0$. Entonces la derivada buscada se puede calcular como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

En particular, podemos obtener la pendiente a las curvas de nivel. Así sea una función $f(x, y)$ de dos variables y sus líneas de contorno o isolíneas definidas de la forma usual

$$\{(x, y) \,|\, f(x, y) = cte\}$$

Aplicando la regla de derivación de la función implícita, podemos obtener las pendientes de las isolíneas:

$$f(x, y) = cte \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Si una función f es tal que

$$f(cx, cy) = c^D f(x, y),$$

diremos que es *homogénea* de grado D. El número D se le denomina *grado de homogeneidad*. Estas funciones modelizan el concepto de *economías de escala*.

2. Extremos Relativos

Dada una función f de varias variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, diremos que tiene un *máximo relativo* en $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$ si

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

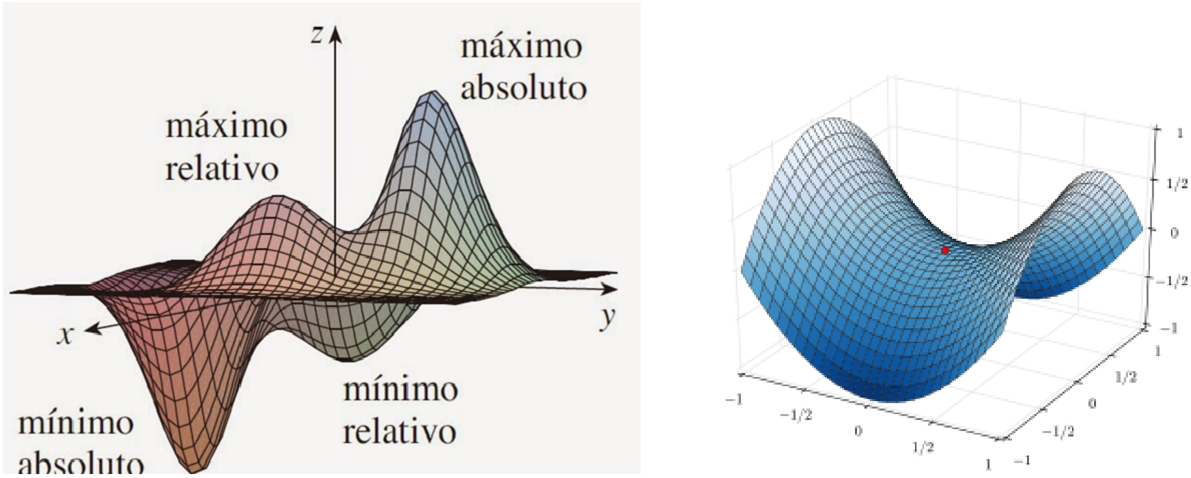

Figura 4: Extremos relativos y absolutos para una función de dos variables (izquierda) y punto de silla (derecha).

De igual modo, la funcón f tendrá en el punto $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in D$ un *mínimo relativo* o local si

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

Al conjunto de todos los valores que toma la función se denomina *rango* o *imagen*.

Una función f es contínua si no tiene "agujeros" en su superficie. La definición rigurosa se da al final del capítulo.

Un *conjunto cerrado* en un espacio de varias dimensiones es aquel que contiene a su frontera. Así, por ejemplo, en un espacio de dos dimensiones podemos definir los puntos del círculo unidad como $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$. Como vemos, es cerrado por que se incluye la circunferncia dentro del conjunto. Un *conjunto abierto* es aquel que no contiene a su frontera. Así, el conjunto $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto porque no contiene la circunferencia unidad, su frontera.

El teorema de los *valores extremos* o de *Weierstrass* nos dice que una función continua en un conjunto cerrado y acotado alcanza sus valores máximo y mínimo en puntos del conjunto.

Un punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ es un *punto crítico* o *estacionario* de f si en dicho punto se anulan todas las derivadas parciales: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \forall i = 1, \cdots, n$. Un *punto de silla* o *punto de ensilladura* es el punto sobre una superficie en el que la pendiente es cero pero no se trata de un extremo local (máximo o mínimo), ver Fig. 4. Es el punto sobre una superficie en el que la elevación es máxima en una dirección y mínima en la dirección perpendicular. El nombre proviene del parecido con una silla de montar de las superficies en torno a un punto de silla. Dicho de otro modo, un punto de silla es un punto crítico que no es ni máximo ni mínimo local.

Una condición necesaria para que exista un extremo relativo en el punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ es que dicho punto sea crítico.

Dado un punto crítico en $\mathbf{a}$ de la función f, calculamos la matriz Hessiana $H_f(\mathbf{a})$ en dicho punto. Analizando cómo es esa matriz, podemos estudiar si nos encontramos ante un máximo, un mínimo o un punto de silla. En el caso general utilizamos el concepto de matriz definida positiva (ver al final del temario). Para el caso particular de dos variables, calculamos el determinante del Hessiano como $|H_f(\mathbf{a})| = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$. Entonces

1. Si $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$, f tiene un punto de silla en $\mathbf{a}$.
2. Si $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ y $f_{xx} < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $\mathbf{a}$.
3. Si $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ y $f_{xx} > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $\mathbf{a}$.

Si el determinante del Hessiano es 0, no podemos concluir nada.

Una buena herramienta on-line para el pintado de funciones de dos variables es: *https://academo.org/demos/surface-plotter/*

Y para pintar contornos o isolíneas: *https://academo.org/demos/contour-plot/*

3. Aplicación de las Derivadas Parciales a las Ciencias Económicas

El concepto de función *marginal* se utiliza del mismo modo que en funciones de una variable. Así, por ejemplo, dada una *función de producción*

$$Y = F(K, L)$$

que nos da las cantidades producidas Y de un determinado bien en función del *capital* empleado K y del *trabajo* o mano de obra L, podemos definir la *productividad marginal del capital* como

$$\frac{\partial F}{\partial K}$$

y la *productividad marginal del trabajo* como

$$\frac{\partial F}{\partial L}.$$

Usando el concepto de diferencial total, las productividad marginal del capital nos dan el incremento aproximado de producción cuando se incrementa en una unidad el capital, manteniendo constante la mano de obra. Del mismo modo para la productividad marginal del trabajo.

Las curvas de nivel de una función de producción se denominan *isocuantas*.

Las derivadas parciales también se aplican para el estudio de la demanda de productos interelacionados. Así, supongamos que se la demanda de las cantidades de dos productos A y B se modelizan del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} Q_A \equiv Q_A(p_A, p_B) \\ Q_B \equiv Q_B(p_A, p_B) \end{array}\right\}$$

es decir, las cantidades demandadas de los productos Q_A y Q_B dependen simultáneamente de los precios de ambos p_A y p_B. Para estudiar la relación entre precio y cantidades demandadas, se utiliza la función *elasticidad*. La elasticidad para el producto A se calcula del siguiente modo:

$$E_A \equiv \frac{p_A}{Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}.$$

Del mismo modo se define la elasticidad del producto B. La *elasticidad cruzada* de la demanda o elasticidad precio cruzada de la demanda mide la respuesta de la demanda para un bien al cambio en el precio de otro bien. Así, la elasticidad cruzada de A respecto a B sería

$$E_{A,B} \equiv \frac{p_B}{Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}.$$

Por ejemplo, si, en respuesta a un incremento del 10 % en el precio de la gasolina, la demanda de coches nuevos que no son eficientes en términos de consumo de gasolina decreciera en un 20 %, la elasticidad cruzada de la demanda sería $-20/10 = -2$. La elasticidad cruzada negativa denota que dos productos son *complementarios*, mientras que una elasticidad cruzada positiva denota que son dos productos *sustitutivos*.

Para poder estudiar las preferencias individuales de los consumidores ante varios bienes simultáneos, se definen las llamadas funciones de utilidad $U(x, y)$. Esta función asigna un valor de preferencia a las cantidades de dos bienes A y B. De esta forma se puede establecer una jerarquía de preferencias. Por ejemplo, si A son manzanas y B son peras, y asignamos $U(1,3) = 1$ y $U(3,1) = 3$, quiere decir que para este consumidor prefiere 3 manzanas y una pera a tener una manzana y 3 peras, aunque en ambos casos el número de artículos totales es el mismo. Los valores de las funciones utilidad no son monetarios y no tienen sentido compararlos entre consumidores diferentes. Las isolíneas de una función de utilidad representa aquella combinación de artículos que satisfacen de igual forma al consumidor. Por ello se les denomina curvas de *indiferencia*.

4. Extensión de Temario

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces se dice que el límite de f cuando $\mathbf{x}$ se aproxima al punto $\mathbf{a}$ es l si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$, entonces $|f(\mathbf{x}) - l| < \epsilon$.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces se dice que f es continua en $\mathbf{a}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta$, entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \epsilon$.

De forma equivalente, podemos decir que si f es continua en $\mathbf{a}$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

La función distancia d en las definiciones anteriores puede ser de varios tipos. Típicamente se utiliza la distancia euclídea o norma 2: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Se define el límite *direccional* o según una dirección si nos aproximamos al punto $\mathbf{a}$ según una dirección determinada. Para un caso de n variables, se define la dirección con las pendientes $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Entonces, el límite según esa dirección se calcula como

$$\lim_{h\to 0} f(a_1 + \lambda_1 h, \cdots, a_n + \lambda_n h).$$

Si el límite existe, debe ser igual a los límites direccionales.

Una matrix $A \in \mathbb{R}^n$ es definida positiva si para todo vector $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ no nulo $x^t A x > 0$. Si $x^t A x < 0$, la matriz es definida positiva. Si $x^t A x \geq 0$ la matriz es semidefinida positiva. Si $x^t A x \leq 0$ la matriz A es semidefinida negativa. Una matriz que no es ni semidefinida positiva, no semidefinida negativa, es indefinida.

Dado un punto crítico en $\mathbf{a}$ de la función f, calculamos la matriz Hessiana $H_f(\mathbf{a})$ en dicho punto. Entonces

1. Si $H_f(\mathbf{a})$ es definida positiva, entonces f tiene mínimo en $\mathbf{a}$.

2. Si $H_f(\mathbf{a})$ es definida negativa, entonces f tiene máximo en $\mathbf{a}$.

3. Si $H_f(\mathbf{a})$ es indefinida, entonces f tiene un punto de silla en $\mathbf{a}$.

En el primer apartado de este documento se ha introducido las derivadas parciales de una función, es decir, el concepto de derivabilidad. Para funciones de varias variables existe un concepto más complejo denominado *diferenciabilidad*. La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\mathbf{a}$ si exiten todas las derivadas parciales en $\mathbf{a}$ y además se cumple

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i)}{d(\mathbf{x}, \mathbf{a})} = 0.$$

Toda función diferenciable es contínua y derivable. Pero existen funciones contínuas no diferenciables. Existen incluso funciones derivables no diferenciables. Además, existen funciones derivables no contínuas.

Dada la función implícita $F(x, y) = 0$, no siempre existe la función $y = f(x)$ que explicita la y. Para ello se utiliza el teorema de *existencia* de la función implícita. Dice así: Sea D una región del plano en la cual está definida la función $F(x, y)$ y sea (x_0, y_0) un punto de dicha región. Si se verifica

1. $F(x_0, y_0) = 0$.

2. $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ son continuas en D.

3. $\frac{\partial F}{\partial y}$ no se anula en (x_0, y_0).

Entonces existe un entorno de x_0 en el cual existe $y = f(x)$ y se cumplen lo siguiente:

1. $y_0 = f(x_0)$.

2. $F[x, f(x)] = 0$.

3. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}$

Referencias

[1] M. Anthony y N. Biggs, "Matemáticas para la Economía y las Finanzas", Cambridge University Press, 2001.

[2] J. V. García y J. Rodríguez, "Matemáticas para la Economía. Curso Práctio. Álgebra y Cálculo", Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, 1999.