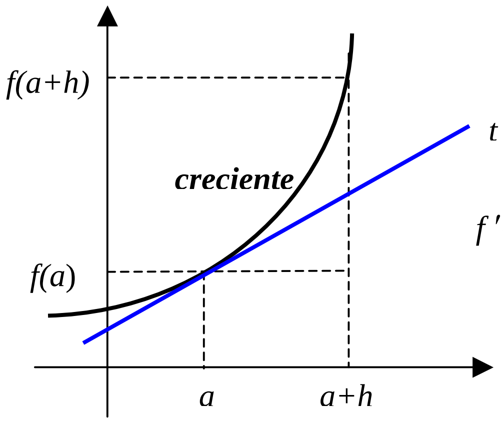
APLICACIONES DE LA DERIVADA

Crecimiento y decrecimiento.

Cuando una función es derivable en un punto, podemos conocer si es creciente o decreciente en dicho punto:

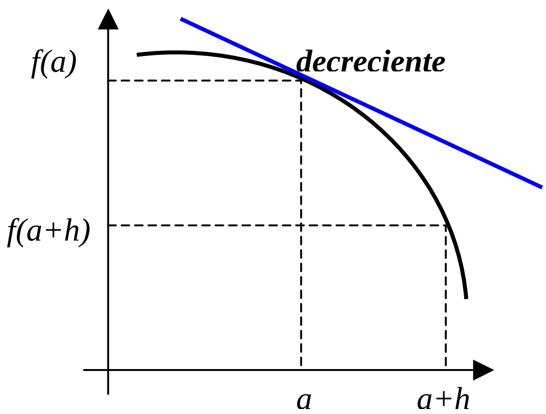
☞ Una función *f(x)* es creciente en un punto *a*, si su derivada es positiva
☞ Una función *f(x)* es decreciente en un punto *a*, si su derivada es negativa.
Es decir,

$$\text{Si } f'(a) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } x = a$$
$$\text{Si } f'(a) < 0 \Rightarrow f \text{ es decreciente en } x = a$$



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

Como $f(a+h) - f(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) > f(a)$,es decir, la función es creciente en $x = a$



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$$

En este caso $f(a+h) - f(a) < 0 \Rightarrow f(a+h) < f(a)$, es decir, la función es decreciente en $x = a$
Estudiar la monotonía de una función es hallar los intervalos en los que es creciente y decreciente.

Se procede de la siguiente forma:

- Se halla la derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante
- Con los puntos en los que se anula la derivada dividimos el dominio en intervalos.

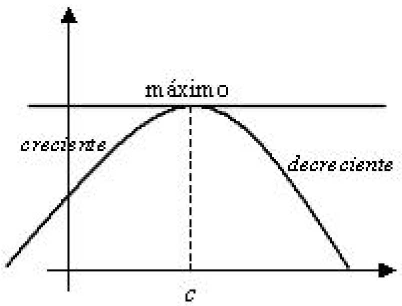
- Se estudia el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada uno de los intervalos resultantes.

Ejemplo 1.

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

Máximos y mínimos.
Son los puntos en que la función cambia de monotonía.

☞ Si una función derivable presenta un máximo o un mínimo en un punto $c \in (a,b)$, entonces $f'(c) = 0$



En el punto de abscisa *x* = *c* la función pasa de creciente a decreciente

Geométricamente significa que la tangente en el punto *x* = *c* es horizontal
☞ Si $f'(c) = 0$ y existe la segunda derivada, se verifica:
Si $f''(c) > 0$, hay un mínimo relativo en el punto c
Si $f''(c) < 0$, hay un máximo en dicho punto.

Para la determinación de máximos y mínimos podemos utilizar los siguientes criterios:

Criterio de la primera derivada:

- Se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Existe máximo relativo en los puntos en que la función pasa de creciente a decreciente.
- Existe mínimo relativo en los puntos en que pasa de decreciente a creciente.

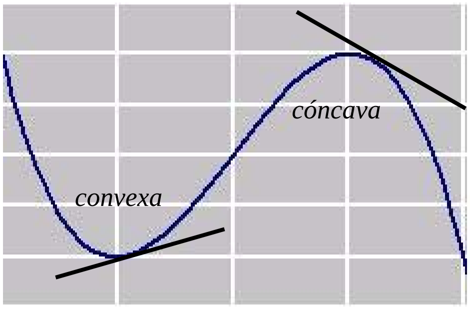
Criterio de la segunda derivada:
- Calculamos la primera derivada, la igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante.
- Hallamos la segunda derivada.
- Las raíces de la ecuación obtenida se sustituyen en la segunda derivada.
- Si el resultado obtenido es positivo existe mínimo y si es negativo máximo.

Ejemplo 2.

Halla los máximos y mínimos de la función $f(x) = 3x - x^3$

Concavidad y convexidad.

Los conceptos con convexidad y concavidad son relativos.
Adoptaremos el siguiente criterio:
La función es convexa en un intervalo si la gráfica de la función queda encima de la recta tangente en un punto cualquiera del intervalo.
La función es cóncava cuando la gráfica queda por debajo.



Puntos de inflexión son aquellos en los que la función cambia de convexa a cóncava o de cóncava a convexa.

☞ Una función derivable es convexa en un intervalo *(a, b)*, si $f''(x) > 0,\ \forall x \in (a, b)$
☞ Una función derivable es cóncava en un intervalo *(a, b)*, si $f''(x) < 0,\ \forall x \in (a, b)$

Estudiar la curvatura de una función consiste en hallar los intervalos en los que es cóncava y convexa.
Se procede de la siguiente forma:

- Se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante.
- Con los puntos en los que se anula la derivada dividimos el dominio en intervalos.
- Se estudia el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada uno de los intervalos resultantes.

Ejemplo 3.
Halla los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$