DERIVADAS

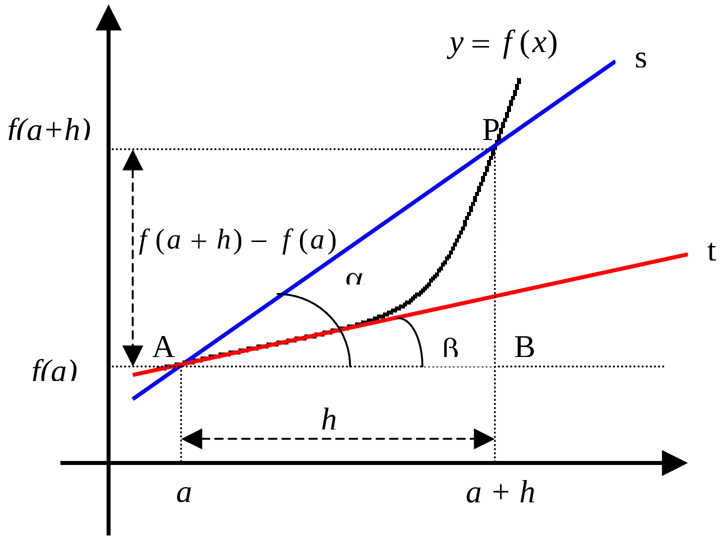
Definición de derivada.

La derivada de una función *f* en el punto de abscisa x = *a*, se define como el siguiente límite, si existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A la derivada de una función en un punto se le llama también tasa de variación instantánea.

Interpretación geométrica de la derivada.



La recta secante ***s***, corta a la curva *y = f(x)*, en los puntos *A* y *P*.

Su pendiente es: $tg\alpha = \frac{PB}{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Si el punto *P* se va acercando al punto *A*, hasta confundirse con él, la recta secante *s*, se transforma en la recta tangente *t* y el ángulo α se transforma en el ángulo β, es decir, Cuando $P \to A$, que es equivalente a decir que $h \to 0$, el límite de la recta secante *s*, es la recta tangente *t*

Pero cuando $\alpha \to \beta$, $tg\alpha \to tg\beta$ que es equivalente a $\lim_{h \to 0} tg\alpha = tg\beta$

Por tanto, $tg\beta = \text{pendiente de t} = \lim_{h \to 0} tg\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Queda probado que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Derivadas laterales.

Las definimos por las siguientes fórmulas:

Derivada por la derecha: $f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Derivada por la izquierda: $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Para que una función sea derivable en un punto tienen que existir las derivadas laterales y estas ser iguales.

Ejercicio 1:

Halla la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ en el punto $x = 3$ usando la definición.

Ejercicio 2:

Dada la función $f(x) = x^2$, halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x = 2.

Función derivada.

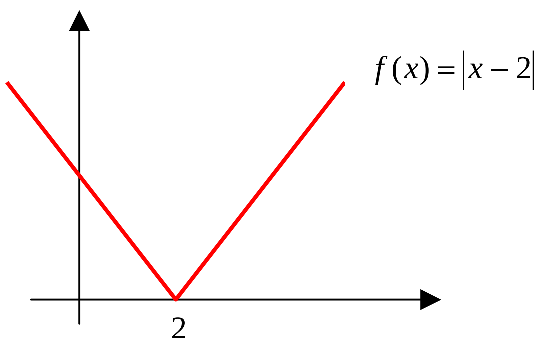
La derivada de una función en un punto de abscisa x = a, asigna a dicho punto un número real, que es el valor de la derivada en dicho punto.
También podemos considerar una función que asocie a cada punto x, el valor de la derivada en ese punto. Recibe el nombre de función derivada o simplemente derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivación y continuidad.

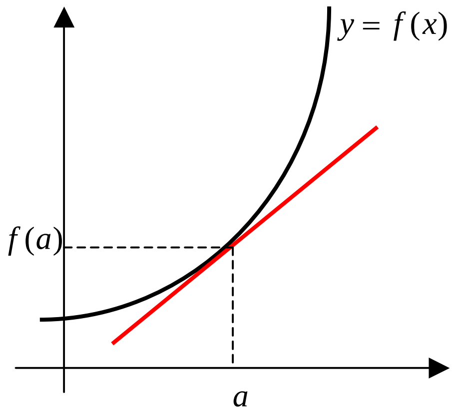
Si una función es derivable en un punto, es continua en dicho punto. Si la función es continua no tiene por qué ser derivable.

Ejercicio 3



¿Es continua en x = 2? ¿Y derivable en x = 2?.

Ecuación de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.



Para halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = a$, procedemos de la forma siguiente:

- Hallamos el valor de la función en dicho punto, *f(a)* con lo que obtenemos el punto por donde pasa la recta tangente: $(a, f(a))$
- Calculamos la pendiente de la recta que es el valor de la derivada en el punto considerado: $m = f'(a)$
- Aplicamos la fórmula de la ecuación punto – pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, es decir, $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Ejercicio 4:

Ecuación de recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x + 1$, en el punto de abscisa x = 4

Ejercicio 5:

Demuestra, aplicando la definición, que la derivada de una constante es 0.

Ejercicio 6:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 0 \\ x+1 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ 2x - 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$

Estudia si es derivable en los puntos $x = 0$ y $x = 2$

Ejercicio 7:

Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + x + 1$ en el punto de abscisa x = 2. Escribe la ecuación de dicha recta.

Ejercicio 8:

¿Qué valores han de tener *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & si \quad x \leq 2 \\ ax^2 + b & si \quad x > 2 \end{cases}$

sea derivable en *x = 2?*

Ejercicio 9:

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3sen2x$ en el punto de abscisa x = 0.

Ejercicio 10:

El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t) = 3t^2 - t + 1$donde s se mide en metros y t en segundos. Calcula la velocidad en el instante t = 2 segundos.

Ejercicio11:

Utilizando la definición de derivada, demuestra que la derivada de $y = ax$ es a.

Ejercicio 12:

Di si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \ \ \mathrm{x} \leq 1 \\ \mathrm{2x - 2} & si \ \ x > 1 \end{cases}$ es derivable en x = 1.