FUNCIONES MATEMÁTICAS BÁSICAS.

EJEMPLOS DE APLICACIONES A LA EMPRESA

Bloque I. ANÁLISIS DE CONTEXTO

Ejemplos de funciones básicas para aplicaciones empresariales (I):

Ingresos=(Valor de venta por unidad) (Número de unidades vendidas)=p·x

Modelos de coste lineal *Coste total = Costes variables + Costes fijos*

Depreciación lineal *Tasa de depreciación (anual) =*
= (Valor inicial – Valor de desecho) / (Tiempo de vida en años).

Beneficio (Utilidad): Ingresos-Costes

Valores porcentuales y unitarios:

El *porcentaje* es un número asociado a una razón, que representa una cantidad dada como una fracción en *100* partes. También se le llama comúnmente tanto por ciento y se denota por *%*. Para obtener un tanto por ciento de un número, simplemente se multiplica por el porcentaje y se divide por *100*. Alternativamente, nos pueden dar la razón en tanto por uno, por lo que no hay que dividir por *100*.
Dado un valor unitario, por ejemplo, el coste c de un producto, y un número de unidades q, el valor total se obtiene multiplicando ambos números. Así, el *coste total* de todas las unidades fabricadas será $c \times q$.

Modelos de mercado

Uno de los modelos más sencillos y frecuentes es el denominado *oferta y demanda*. Para un bien determinado, relaciona el precio p y las cantidades vendidas q en un determinado período.

La función demanda determina las cantidades vendidas en función del precio desde el punto de vista del consumidor $D(p)$. Suele ser una función decreciente.

De la misma forma, se define una función $S(p)$ (usamos S por la palabra inglesa *supply*) que describe el comportamiento de las cantidades vendidas en función del precio de venta desde el punto de vista del proveedor o empresario. Suele ser una función creciente.

El mercado llegará a un equilibrio cuando ambas curvas se corten, siempre y cuando el corte de un precio y una cantidad positivos: $D(p) = S(p)$.

Este modelo puede tener en cuenta impuestos indirectos, es decir, una tasa fija T que un gobierno puede imponer en cada venta de un producto. Esto varía el punto de equilibrio, siendo ahora el nuevo punto aquel que cumple $D(p) = S(p - T)$. Es decir, el proveedor no obtendrá un precio p, sino que su ganancia se reducirá debido a la tasa del impuesto.

Una empresa opera en *competencia perfecta* cuando es pequeña y su producción no afecta al precio de mercado del bien en cuestión, es decir, el precio es fijo desde su punto de vista. En el caso opuesto, una empresa opera como un *monopolio* cuando suministra la totalidad de la producción de un determinado bien, por lo que su producción sí influye en el precio de venta.

<u>Interés simple y compuesto</u>:

Interés simple: supongamos que invertimos una cantidad inicial P (principal) a un tipo de interés r (expresada en tanto por uno) en un período de tiempo. Al cabo de ese período de tiempo habremos obtenido un incremento de capital, siendo la nueva cantidad $C = (1 + r)P$.

Interés compuesto: Si al cabo del primer período repetimos la inversión, siendo el tipo de interés constante e igual a r, al cabo de N períodos obtendremos una cantidad $C = (1 + r)^N P$. Al contrario, si queremos obtener un capital final C, la expresión que nos da la cantidad que debemos invertir es $P = (1 + r)^{-N} C$, y se denomina *valor actual*.

Anualidad: Como alternativa al incremento de capital, la gente invierte a menudo su dinero con el objetivo de obtener unos ingresos regulares, llamados *anualidad*. Supongamos que invertimos P y extraemos una cantidad I al final de cada año, durante N años, momento en el cual se retira el capital. En el año t el capital y_t se puede expresar en función del capital del año anterior y_{t-1}:

$$y_t = (1 + r)\, y_{t-1} - I$$

donde en el primer momento $y_0 = P$. Se puede demostrar que el capital en el año t será

$$y_t = \frac{I}{r} + \left(P - \frac{I}{r}\right)(1 + r)^t$$

Utilizando la condición de no dejar nada de capital después de N años:

$$0 = \frac{I}{r} + \left(P - \frac{I}{r}\right)(1 + r)^N$$

Reajustando

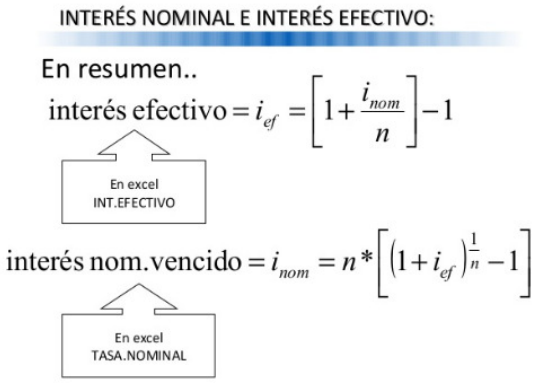
$$I(P) = \left(\frac{r(1 + r)^N}{(1 + r)^N - 1}\right) P$$

<u>Modelos logísticos</u>

$$y = y_m(1 + Ce^{-kt})$$

Otros ejemplos de funciones: matemáticas financieras

Diferencia entre tasa nominal y tasa efectiva de interés de una inversión…$i_{ef}=(1+i)^k-1$



Composición contínua

Valor después de n años=$P\cdot e^{in}$

donde $i=R/100$

Tasa de crecimiento poblacional en n años: $P_0(1+i)^n=P(n)$

donde $i=R/100$*, dicho P(n) suele ser una función exponencial.*

Modelo logístico de un crecimiento restringido: $y=y_m/(1+Ce^{-kt})$

donde y es el tamaño de la población en el instante t y el resto son constantes positivas.

Suele ser muy utilizado en el análisis de crecimientos de poblaciones con restricciones de sus entornos.

(ver anexo para ampliación de estos conceptos)

Planes de ahorro $S=I(P)\cdot s_{n|i}$

donde S es el valor futuro de un plan de inversión o ahorro después de n períodos, I(P) es capital invertido en cada período, i es la tasa de interés y $s_{n|i}=i^{-1}[(1+i)^n-1]$*.*

Anualidades $I(P)=P/a_{n|i}$

donde P es el valor inicial o presente (esto es, la cantidad que se debe pagar para adquirir dicha anualidad), I(P) es la anualidad por período, para n periodos y $a_{n|i}=i^{-1}[1-(1+i)^{-n}]$*.*

Se observa que $s_{n|i}=(1+i)^n a_{n|i}$

Amortización $P=I(P)\,a_{n|i}$

Otros ejemplos: Curva de aprendizaje , Tasa de sustitución lineal , Tasa efectiva Crecimiento de ventas, Aumento IPC, Impuestos especiales.

Expresiones matemáticas del módulo de funciones financieras de Excel 2010 (opcional).

Programación lineal, a través de SOLVER (opcional).

Aproximación polinómica y obtención de funciones a partir de BigData (opcional).

Bloque II. ANÁLISIS DE COMPATIBILIDAD

Existen diferentes métodos para determinar la/s solución/es de sistemas de ecuaciones lineales.

- **Método de Gauss** (a partir de matrices y utilizando un método de reducción)
- **Regla de Cramer** (a partir de determinantes)
- **Matriz Inversa**: AX=B => $X=A^{-1}B$. Muy útil para resolver varios sistemas de ecuaciones líneas con la misma matriz de coeficientes A.
- **Modelo de Insumo-Producto** (Prof Leontief, años 40, premio Nobel 1973 por su estudio de la economía en USA): se trata de una aplicación particular para resolver problemas donde se incorporan interacciones entre diferentes industrias o sectores que integran la economía. Su objetivo es permitir a los economistas predecir los niveles de producción futuros de cada industria a fin de satisfacer demandas futuras para diversos productos.
  Producto tot de la ind P = Unid consum por P+ Unid consum por Q+….+ Demanda final.
  Que expresado en forma algebraica sería: X=AX+D, donde X es la matriz de producción, A la matriz insumo-producto (sus elem son los coeficientes insumo-producto), D es la demanda, y se resuelve así: $X=(I-A)^{-1}D$, donde I es la matriz identidad.
- ***Cadenas de Markov (opcional)****: se trata de una sucesión de ensayos similares u observaciones en la cual cada ensayo tiene el mismo número finito de resultados posbles y en donde también la probabilidad de cada resultado para un ensayo dado depende sólo del ensayo inmediatamente precedente y no de cualquier resultado previo.* $A_{k+1}=A_kP$*, donde* A_k *es la matriz de estado después de k ensayos (o etapas),* A_{k+1} *la matriz estado siguiente (siguiente ensayo k+1) y P es el vector estado (*p_1*,* p_2*, …*p_n *son las probabilidades de que el sistema se encuentre en los estados 1, 2, …n).*

Bloque III. ANÁLISIS DE COMPORTAMIENTO

Aplicaciones:

- Funciones económicas:

  Análisis marginal: coste marginal, ingreso marginal y beneficio marginal

  Elasticidad de la demanda y clasificación.

- Optimización de funciones.

Ejemplos de funciones básicas para aplicaciones económico-financieras (II):

Coste marginal: es el valor límite del coste promedio por cada artículo extra cuando ese número de artículos extra tiende a cero.

$$C_{Marg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = C'(x)$$

Ingreso marginal: representa las entradas adicionales producidas por un artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos.

$$I_{Marg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = I'(x)$$

NOTA: recordar que I(x)=x·p, donde p suele estar relacionado con la *x* a través de la ecuación de la demanda.

Beneficio marginal: representa el beneficio total por la venta de x unidades, siendo pues el beneficio adicional por cada artículo extra si la producción sufre un pequeño incremento.

$$B_{Marg}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta x} = B'(x)$$

donde *B(x)=I(x)-C(x)*, e *I(x)=x·p*, y *p* y *x* suelen estar relacionados por la ecuación de la demanda.

Elasticidad de la demanda: es el valor límite de la razón de cambio porcentual en la demanda respecto al cambio porcentual en el precio, cuando el cambio en el precio tiende a cero. Elasticidad de x respecto a p, donde *x=f(p)* que represente la curva de demanda:

$$\frac{E_x}{E_p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta x / x}{100\ \Delta p / p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{p}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p)$$

Clasificación de la elasticidad, a partir de $\eta = |E_x/E_p|$:

$\eta=0$ ⇒ perfectamente inelástica (la cantidad demandada del bien no se modifica en absoluto al variar el precio)

$0<\eta<1$ ⇒ inelástica (la demanda varía en forma proporcionalmente menor a lo que varía el precio).

$\eta=1$ ⇒ unitaria (la demanda varía en igual proporción que el precio)

$\eta>1$ ⇒ elástica (varía en proporción mayor que el precio)

$\eta=\infty$ ⇒ perfectamente elástica.

Obtención de funciones económico-financieras (videos, ejemplos):

Tipos de funciones de costes:
https://www.youtube.com/watch?annotation_id=annotation_3503253309&feature=iv&src_vid=_HwBYx2MZQg&v=eFstaV5LQks

Obtención de la función de costes a corto plazo:

https://www.youtube.com/watch?v=_HwBYx2MZQg

Generación de funciones de producción corto plazo:

https://www.youtube.com/watch?v=3t-N2QduAWQ

Anexo

Matemáticas para la economía y las finanzas",
Martin Anthony y Norman Biggs.
Cambridge University Press. 2001.

4

Elementos financieros

4.1. Interés e incremento del capital

En este capítulo nos ocuparemos de uno de los modelos básicos que se utilizan en la economía financiera y desarrollaremos sus propiedades apoyándonos en la teoría general de las recurrencias lineales de primer orden.

Supongamos que en los mercados finacieros se pone a disposición de los inversores una tasa r de interés fijo anual. Expresaremos r como un número en lugar de hacerlo como porcentaje, de manera que lo que comúnmente se da como una tasa del 8% por año, aquí se corresponderá con $r = 0{,}08$. En tal caso, si invertimos 100 dólares, al cabo de un año tendremos 100\$ + 8\$ = 108\$. Dicho de forma más general, si invertimos P, al cabo de un año dispondremos de $P + rP = (1 + r)P$. (De ahora en adelante, omitiremos las unidades monetarias por cuanto resultan irrelevantes a efectos de cálculo).

Este sencillo modelo lo podemos utilizar para describir el *incremento del capital*. Supongamos que invertimos P durante N años a una tasa constante r de interés anual. Si y_t fuera el capital al final del t-ésimo año, tendríamos $y_0 = P$ y la recurrencia

$$y_t = (1 + r)y_{t-1}, \quad (t = 1, 2, 3, ...).$$

Esta recurrencia está en la forma estándar que veíamos en el capítulo anterior, con $a = (1 + r)$ y $b = 0$. La solución es bien obvia (incluso sin ningún tipo de teoría): es $y_t = (1 + r)^t P$. En particular, el capital C, tras N años, será y_N, es decir

$$C = (1 + r)^N P.$$

57

Resulta bastante instructivo contemplar la relación entre P y C desde la perspectiva del lenguaje de las funciones matemáticas, como en la Figura 4.1. Aquí el input es el *principal* P, la función es la «inversión durante N años a una tasa de interés r» y el output es el capital C, tal como se veía en la fórmula anterior. En otras palabras, C viene determinado como función de P por la fórmula $C(P) = (1 + r)^N P$.

Figura 4.1. Relaciones entre principal y capital.

Supongamos, ahora, que hacemos la pregunta al revés. Si nos queremos asegurar de que el capital final sea C, ¿cuál deberá ser el principal P? Es evidente que esto se puede hallar, simplemente, reajustando la ecuación, de tal manera que obtengamos P en términos de C, es decir,

$$P(C) = \frac{C}{(1+r)^N}.$$

Expresándolo en lenguaje matemático, hemos hallado la inversa de la función del Incremento de Capital (véase, de nuevo, la Figura 4.1). En economía y en finanzas esto se conoce como el cálculo del *valor actual* de una suma de capital C, que se obtiene en N años a una tasa de interés r. Y esto es muy importante porque nos permite comparar el retorno garantizado procedente de una inversión a una tasa fija con el retorno que procede de otras formas de inversión del principal.

Ejemplo: Si alguien me ofrece, como donación, bien 6.000$ en estos momentos o bien 10.000$ dentro de siete años, ¿cuál de las dos ofertas debo aceptar, dada una tasa de interés fijo anual del 8%?

Tendremos que calcular aquí $P(C)$ cuando $C = 10.000$, con los parámetros $r = 0{,}08$ y $N = 7$. La fórmula nos dará

$$P = \frac{10.000}{(1{,}08)^7},$$

y, por medio de la aproximación $(1{,}08)^7 = 1{,}71382427$, obtenemos un valor actual de 5.834,90$. Por lo tanto, debo aceptar los 6.000$ ahora. Si el razonamiento anterior no hubiese quedado lo suficientemente claro, piénsese de esta otra forma: el hecho de que el valor actual de 10.000$, tras 7 años contados desde ahora y a una tasa de interés prevalente, sea menor que 6.000$, equivale a decir que 6.000$ invertidos *ahora* generarían más de 10.000$ al cabo de 7 años. En otras palabras, si estamos dispuestos a esperar siete años, estaremos dispuestos, de igual manera, a aceptar la suma que se nos ofrece ahora e ingresarla en una cuenta bancaria a la tasa de interés dada y dejarla ahí, sin tocar, durante siete años. La cantidad que se generaría de esta manera es de $6.000(1{,}08)^7 = 10.282{,}95$, que es mayor que 10.000. (Desde luego, uno podría decidirse a no ir por este camino si tiene deudas, o si quiere una casa nueva, o un coche, o lo que sea, *ahora mismo*. Por decirlo de otra forma, este análisis tiene sentido cuando alguien se plantea invertir su dinero. Si, por el contrario, lo que se tiene en mente es gastar dicha suma, lo mejor sería valorar la utilidad de poseer los objetos que se pretenden comprar). □

4.2. Generación de ingresos

Como alternativa al incremento de capital, la gente invierte a menudo su dinero con el objetivo de obtener unos ingresos regulares, a los que normalmente denominamos *anualidad*. Supongamos que invertimos P y extraemos una cantidad I al final de cada año, durante N años, momento en el cual se retira el capital. ¿Qué ingresos se pueden generar a partir de un principal P? O matemáticamente hablando, ¿cómo sería I en función de P?

Aquí, la ecuación recurrente es

$$y_t = (1 + r)y_{t-1} - I, \quad \text{donde} \quad y_0 = P.$$

Éste es otro caso de recurrencia lineal de primer orden, en forma estándar, con $a = (1 + r)$ y $b = -I$. La solución independiente del tiempo sería, por tanto, $y^* = I/r$. La solución general es $y_t = y^* + (y_0 - y^*)a^t$, y puesto que $y_0 = P$, obtenemos

$$y_t = \frac{I}{r} + \left(P - \frac{I}{r}\right)(1+r)^t.$$

Para llegar a determinar I como una función de P deberemos utilizar la mencionada condición de no dejar nada de capital después de los N años, esto es, que $y_N = 0$. Esta condición se expresa como

$$\frac{I}{r} + \left(P - \frac{I}{r}\right)(1+r)^N = 0.$$

ecuación que, al reajustarla, nos dará

$$\frac{I}{r}\left((1+r)^N - 1\right) = P(1+r)^N,$$

de tal forma que

$$I(P) = \left(\frac{r(1+r)^N}{(1+r)^N - 1}\right)P.$$

También aquí es lógico que consideremos la función inversa. La pregunta sería entonces: ¿qué principal P se requiere para obtener una renta anual I durante los próximos N años? O bien, ¿cuál es la función inversa de $P(I)$? Despejando la ecuación obtenemos

$$P(I) = \frac{I}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right).$$

Y esto nos da el valor actual que habrá de generar renta anual I cada año, durante los N siguientes años.

Ejemplo: ¿Cuál es el valor actual correspondiente a una renta anual de 10.000$ cada año y durante los siete próximos años, dada una tasa de interés fija del 8%?

La fórmula nos da que

$$P = \frac{10.000}{0{,}08}\left(1 - \frac{1}{(1{,}08)^7}\right).$$

Utilizando la aproximación $(1{,}08)^7 = 1{,}71382427$ obtenemos la respuesta

$$P = \frac{10.000}{0{,}08}\left(1 - \frac{1}{1{,}71382427}\right) = 52.063{,}70.$$

Por la misma equivalencia que representa la fórmula, una suma de 52.063,70$ invertida al 8% nos proporcionaría 10.000$ por año durante los próximos 7 años. □

4.3. Intervalos de cómputo

En las anteriores discusiones hemos tomado r como la tasa anual de interés, asumiendo que el interés se añadía como una suma global al final de cada año. Sin embargo, resulta muy edificante preguntarnos qué ocurriría si el interés se añadiera con más frecuencia. Supongamos, por ejemplo, que se añade un 4% de interés dos veces al año, una a mitad de año y la otra al final del mismo. (Decimos que la «tasa de interés anual equivalente» es del 8% aunque, como veremos, dicha convención no tiene los mismos efectos que un solo pago del 8%). Si el principal es de 100$, el capital depués de un año será

$$100(1 + 0{,}04)^2 = 108{,}16,$$

lo que supone algo más de los 108$ que resultarían de una única suma anual. Si el interés se añade trimestralmente, después de un año, el capital sería

$$100\,(1 + 0{,}02)^4 = 108{,}24,$$

aproximadamente. En general, cuando el año se divide en m períodos iguales, la tasa equivalente es r/m para cada período, y el capital tras un año es

$$100\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m.$$

Nuestros experimentos numéricos nos indican que esta cantidad se incrementa uniformemente al aumentar el número m de intervalos de cómputo. (*Ejercicio*: Hallar la solución si un determinado interés se añade diariamente, es decir, si $m = 365$). Una pregunta obvia a este respecto, a la que responderemos en el Capítulo 7, es: ¿qué ocurre si $m \to \infty$?

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.1: *Escribir fórmulas explícitas para:*

(a) el valor final $C(P)$ de una cantidad P invertida al 5% de interés anual durante 10 años si no hay retiradas anuales.

(b) la renta anual constante $I(P)$ generada por una cantidad P invertida al 5% anual durante 10 años, si no hay capital final.

[Utilizar la aproximación $(1{,}05)^{10} = 1{,}629$].

Escribir las funciones inversas $P(C)$ y $P(I)$ e interpretarlas en términos de valor actual.

Solución: En el caso de (a) nos apoyaremos en el hecho de que un principal, invertido a una tasa anual constante r durante t años, crecerá hasta $P(1 + r)^t$. Aquí, la tasa de interés es del 5%, por lo que $r = 0{,}05$. La respuesta es, por tanto, $C(P) = P(1 + 0{,}05)^{10}$, o bien $C(P) = 1{,}629P$, aproximadamente.

Para la subpregunta (b), utilizaremos la fórmula que se daba en la Sección 4.2, con $r = 0{,}05$ y $N = 10$:

$$I(P) = \left(\frac{r(1+r)^N}{(1+r)^N - 1}\right)P = \left(\frac{0{,}05(1{,}05)^{10}}{(1{,}05)^{10} - 1}\right)P$$

$$= \left(\frac{(0{,}05)(1{,}629)}{0{,}629}\right)P = 0{,}1295P.$$

A la hora de determinar la función inversa $P(C)$, nótese que $C = 1{,}629P$ es equivalente a $P = C/1{,}629 = 0{,}6139C$, de tal manera que $P(C) = 0{,}6139C$. Ésta sería la cantidad de dinero que daría un capital C tras 10 años a una tasa de interés fija del 5%.

Para determinar la función inversa $P(I)$, habremos de tener en cuenta que $I = 0{,}1295P$ es equivalente a $P = I/0{,}1295 = 7{,}722I$. De donde $P(I) = 7{,}722I$. Éste sería el principal que generaría una renta anual I durante los 10 años siguientes; es decir, el valor actual de una renta anual I durante los próximos 10 años, dada una tasa de interés fija del 5%. □

Ejemplo 4.2: *Supongamos que ha ganado Ud. un concurso en un periódico de tirada nacional y que puede elegir entre una suma global de 100.000\$ ahora o un pago de 20.000\$ al final de cada año durante los próximos siete años. ¿Qué premio deberá Ud. escoger, suponiendo que la mayor tasa de interés que puede obtener es constante y del 7% para dicho período de siete años?*

Solución: Calculamos el valor actual de la sucesión de ingresos (es decir, de la renta anual) y lo comparamos con 100.000\$. Utilizando la fórmula con $r = 0{,}07$, $N = 7$, $I = 20.000$, vemos que el valor actual de 20.000 al final de cada año, y durante los siete siguientes, es de

$$P = \frac{I}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right) = \frac{20.000}{0{,}07}\left(1 - \frac{1}{(1{,}07)^7}\right) = 107.785{,}79.$$

Dado que esta cantidad es superior a 100.000, si actúa Ud. racionalmente deberá aceptar la renta anual en lugar del pago en una sola vez. (Por supuesto, y tal como mencionábamos en el Ejemplo de la Sección 4.1, este análisis sólo tiene sentido si Ud. invierte la suma global, en caso de que se decida a aceptarla). □

Ejemplo 4.3: *Se invierte una cantidad de 1.000\$ con un interés a una tasa equivalente del 10% por año. Hallar el total tras un año, si el interés se computa (a) anualmente, (b) trimestralmente, (c) mensualmente, (d) diariamente. (Suponiendo que el año no es bisiesto).*

Solución: Dado el hecho de que si el interés se abona en m pagos parciales igualmente espaciados, el total tras un año es de $1000\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$ donde $r = 0{,}1$ y $m = 1, 4, 12, 365$ en los cuatro casos. Por consiguiente, las respuestas son las siguientes:

(a) $1.000(1 + 0{,}1) = 1.100.$

(b) $1.000\left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^4 = 1.103{,}81.$

(c) $1.000\left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{12} = 1.104{,}71.$

(d) $1.000\left(1 + \frac{0{,}1}{365}\right)^{365} = 1.105{,}16.$ □

Ejemplo 4.4: *Demostrar que el valor actual de una anualidad I durante N años, dada una tasa fija de interés r, es*

$$P = \frac{I}{(1+r)} + \frac{I}{(1+r)^2} + \frac{I}{(1+r)^3} + \dots + \frac{I}{(1+r)^N}.$$

Además, utilizar la fórmula $(1-x)(x + x^2 + x^3 + \dots + x^N) = (x - x^{N+1})$ para demostrar que ésta da para $P(I)$ la misma expresión que la que se daba en la Sección 4.2.

Solución: Para entender mejor el enfoque general del problema, imagínese que le han ofrecido 1.000\$ para dentro de un año *junto con* otros 1.000\$ para dentro de dos, y que la tasa de interés es constante al 8%. ¿Cómo podrá Ud. determinar el valor actual de esta renta anual? Una forma de hacerlo sería observando que el valor actual de los primeros 1.000\$ es 1.000/1,08 (dado que la operación se hará al cabo de un año) y que el valor actual de los segundos 1.000\$ (dentro de dos años) es de $1.000/(1{,}08)^2$; y, así, el valor actual de la renta anual deberá ser la suma de los dos valores actuales anteriores, es decir, $1.000/1{,}08 + 1.000/(1{,}08)^2$.

Consideremos ahora el caso general, donde la renta anual es I y la tasa de interés es r. El valor actual del primer pago es $I/(1+r)$; el valor actual del segundo pago es de $I/(1+r)^2$ y, en general, el valor actual del i-ésimo pago será de $I/(1+r)^i$. A esto se sigue que el valor actual de la renta anual, que es la suma de los valores actuales para $i = 1, 2, \dots, N$, es el que se decía anteriormente.

Usando la fórmula con $x = 1/(1+r)$, tendremos

$$\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \dots + \frac{1}{(1+r)^N} = \frac{\frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+r)^{N+1}}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right).$$

Y multiplicando por I obtendremos la expresión requerida para $P(I)$.

□

Principales conceptos

- Interés, incremento de capital y significado de valor actual.
- Ecuaciones recurrentes en problemas de anualidades.
- Intervalos de cómputo.

Notaciones, términos y fórmulas clave

- Principal, P; capital, C.
- En cómputo anual, $C = (1+r)^N P$.
- Valor actual en cómputo anual, $P(C) = \frac{C}{(1+r)^N}$.
- Renta generada cada anualidad, $I(P) = \left(\frac{r(1+r)^N}{((1+r)^N - 1)}\right)P$.
- Valor actual de la renta anual, $P(I) = \frac{I}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$.

Ejercicios

Ejercicio 4.1: *Supongamos que una cuenta de ahorro paga un interés anual a una tasa del 5%. Una inversora deposita una cantidad determinada, P\$, que es lo suficientemente grande como para asegurarle que cada año, durante los quince siguientes, podrá extraer 1.000\$ de su cuenta al final del año y mantener un saldo que no sea negativo. Siendo y_t la cantidad de dinero en la cuenta tras t años, de tal forma que $y_0 = P$, explicar por qué*

$$y_t = 10{,}5y_{t-1} - 1.000,$$

para $t = 1,2,3,\dots$. Hallar una expresión para y_t, y de ahí, demostrar que

$$P \geq 20.000\left(1 - \frac{1}{(1{,}05)^{15}}\right).$$

Ejercicio 4.2: *Imagínese que dispone Ud. de \$200.000 para invertir a una tasa constante del 9%, y que quiere Ud. extraer una cantidad fija I al final de*

cada año, durante los veinte próximos. ¿Cuál será el valor máximo posible de I para que esto sea así? Contestar la misma pregunta si las extracciones de I se llevan a cabo al principio de cada uno de los próximos veinte años (incluyendo el presente).

Ejercicio 4.3: *¿Cuánto tendría Ud. que invertir ahora en una cuenta bancaria, a una tasa constante de interés del 7%, para poder extraer 1.000\$ al final de cada uno de los próximos treinta años?*

Ejercicio 4.4: *Suponga que ha ganado Ud. un concurso en el que tiene la oportunidad de elegir entre 180.000\$ ahora, o bien 10.000\$ al principio de cada año, durante el resto de su vida. Asumiendo que el banco tiene una tasa de interés constante del 6% y que Ud. no tiene deudas en la actualidad (de tal forma que su decisión sería una decisión puramente racional, basada en el «valor actual»), ¿qué opción elegiría si piensa Ud. vivir (a) hasta los 65 años; (b) hasta los 100; (c) para siempre. (Naturalmente, ignore (a) si ya tiene Ud. más de 65 años).*

Ejercicio 4.5: *Se invierte una cantidad de 2.000\$ a una tasa de interés equivalente del 8% anual. Hallar los respectivos totales tras un año de imposición si el interés se computa (a) anualmente; (b) trimestralmente; (c) diariamente. (Suponiendo que el año no es bisiesto).*