Bloque I – ANALISIS DE CONTEXTO

Introducción a las Matemáticas / Apuntes

A título recopilatorio, se incluyen en este primer bloque, las definiciones de los elementos básicos del lenguaje de las matemáticas, como son los conjuntos, los números y sus operaciones, y algunas de sus primeras aplicaciones como son las sucesiones, expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones, su significado, expresión, representación y aproximación matemática.

En otros documentos de este bloque I, se describen algunos modelos matemáticos para la economía y la empresa, así como, algunos casos prácticos para la aplicación inmediata de los conceptos introducidos.

1. Los conjuntos y sus elementos

Un *conjunto* define un grupo de objetos de tal forma que especifica si un objeto pertenece o no al grupo. Se suelen denotar con letras mayúsculas. Los objetos pertenecientes a un determinado conjunto X se representan dentro de llaves, por ejemplo $X=\{2,3,4,5,6\}$. A estos objetos se les denomina *elementos* o *miembros*.

Cuando un objeto x pertenece a un conjunto S escribimos $x \in S$, en caso contrario, escribimos $x \notin S$. También podemos definir un conjunto por las propiedades que deben cumplir sus elementos. Por ejemplo $Z=\{n \mid n>5\}$.

Un conjunto sin elementos se llama *conjunto vacío* y se denota con $\{\emptyset\}$.

Decimos que un conjunto U es un *subconjunto* de V y escribimos $U \subseteq V$, si todo elemento de U es a su vez elemento de V.

Dados dos conjuntos A y B definimos la *unión* de ambos, y escribimos $A \cup B$, como el conjunto en el que los elementos pertenecen a A o a B (o a ambos). Definimos la *intersección* de ambos conjuntos, y lo denotamos por $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos.

2. Los números y sus operaciones.

Naturales $\mathbb{N}$={ 1,2,3,4,... }

Cuenta *unidades discretas* y positivas no-nulas. Es un conjunto ordenado (dado dos números, siempre el primero será menor, mayor o igual que el segundo). En base 10, usamos los dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9, pero el más pequeño de dicho conjunto de números es el 1.

Operaciones: son reglas que permiten obtener las reglas básicas matemáticas para combinar los números. En este caso: suma (+), resta (-) producto (×, * ó ·), división (/ o ÷).

Propiedades: *Cierre para la suma y el producto*, *asociativa* para la suma y el producto [a+(b+c)= (a+b)+c] y [a x (b x c)= (a x b) x c], *conmutativa* para la suma y el producto [a+b=b+a] y [a x b=b x a], existencia de *elemento neutro* (o identidad) para la suma (0) y la multiplicación (1), *distributiva del producto respecto a la suma* [a x (b+c)= (a x b)+ (a x c)] y *multiplicación por cero* (si a x b=0 entonces a=0 ó b=0 ó a=b=0).

Si a/b es un número natural, b es *divisor* de a. Un *múltiplo* de un número es el que lo contiene un número entero de veces.

Un *número primo* es un número natural mayor que 1 que sólo tiene como divisores 1 y sí mismo. Cualquier número natural puede expresarse como producto de números primos, lo que se conoce como *factorizar un número*.

El *mínimo común múltiplo* (*mcm*), de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo común de todos ellos. Será el resultado de multiplicar todos los factores comunes y no comunes elevados a la mayor potencia. El *mcm* se puede emplear para sumar o restar fracciones de distinto denominador, tomando el mcm de los denominadores de las fracciones, y convirtiéndolas en fracciones equivalentes que puedan ser sumadas.

El *máximo común divisor* (*MCD*) de dos o más números enteros es el mayor número entero que los divide sin dejar resto. Se calcula tomando los factores comunes elevados a la menor potencia. El *MCD* se utiliza para simplificar fracciones.

Enteros $\mathbb{Z}$={ … ,-3,-2,-1,0,1,2,3, …}

Formados por los naturales, sus opuestos (negativos) y el 0. Se definen las mismas operaciones y propiedades que en $\mathbb{N}$, añadiendo la propiedad de *cierre a la resta o sustracción*.

El *valor absoluto* de un número, en general, será el valor positivo del mismo. Por ejemplo: |-2|=2, |+2|=+2=2.

Racionales $\mathbb{Q}$={ a/b | a,b∈ $\mathbb{Z}$, b≠0}

Número racional es todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros, siendo el denominador distinto de 0. También es un conjunto ordenado. Contiene a los enteros. Dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y sólo si a·d=c·d.

Se definen las mismas operaciones y propiedades que en $\mathbb{Z}$. Así se define, la suma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cd}{bd}$, la multiplicación $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ y la división $\frac{a}{b}/\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Se pueden representar en base decimal, pudiendo ser exactos (6/3=2), periódicos puros (1/7=0,~~142857~~) o periódicos mixtos (1/60=0,01~~6~~).

Irracionales $\mathbb{I}$={x∈$\mathbb{R}$ |x∉$\mathbb{Q}$}

Un número irracional a∈$\mathbb{I}$, es un número que no puede ser expresado como una fracción m/n, donde m y n son enteros con n ≠0. Es cualquier número real que no es racional. Un decimal infinito (es decir, con infinitas cifras) aperiódico.

Se puede también ver como aquel conjunto de números no racionales, esto es, cuyo número de decimales es indefinido no repetitivo y no se expresan como una fracción de números enteros (p.e. $\sqrt{2}$, e, π, …).

Se clasifican en *algebraicos* (son la solución de alguna ecuación algebraica) y *transcendentes*. Una ecuación algebraica es un polinomio, con coeficientes reales o complejos, igualado a cero.

Reales $\mathbb{R}$

Cualquier número expresado mediante decimales finitos o infinitos. Contiene todos los números vistos anteriormente. Se suele representar por una recta y con el símbolo $\mathbb{R}$. Es ordenado. Se definen todas las operaciones y propiedades vistas anteriormente, y la *potenciación*.

Cualquier número real a y un número natural n, se define la potencia *n*-ésima de a como:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \qquad (n\ veces\ a)$$

Como consecuencia de la definición, $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$. Se define a0=1 y a-n=1/an. Las potencias fraccionarias serán raíces n-ésimas, según la definición del producto de potencias:

$$\left(a^{1/n}\right)^n = a^1 = a$$

Resumimos las propiedades de las potencias para cualquier número real, por ejemplo, para a, b y c, de la siguiente forma:

$$a^b \cdot a^c = a^{(a+b)}, \quad \frac{a^b}{a^c} = a^{(b-c)}, \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c}, \quad (a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c, \quad (\frac{a}{b})^c = \frac{a^c}{b^c}$$

Esto nos permite definir el *elemento inverso para el producto* $a^{-1}=1/a$, cumpliéndose que: $a \cdot a^{-1}=1$.

El *elemento inverso de la suma* será -a, cumpliéndose que a+(-a)=0.

Axiomas: son los enunciados o proposiciones elementales que no requieren demostración:

El conjunto de números reales queda perfectamente definido por algunas de sus propiedades, llamadas *axiomas de* **R**, a partir de las cuales se pueden deducir otras muchas.

Axiomas

(**R**,+,×) **es un cuerpo conmutativo**, lo que significa que en **R** hay definidas dos operaciones + y × que verifican:

i) $\forall x, y \in \mathbf{R}, x+y \in \mathbf{R}$ y $x \times y \in \mathbf{R}$.

ii) *Propiedad asociativa*: $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$

$$x+(y+z) = (x+y)+z, \ x\times(y\times z) = (x\times y)\times z.$$

iii) Existe un único elemento $a \in \mathbf{R}$, $a \equiv 0$ tal que $\forall x \in \mathbf{R}$, $x+0=0+x=x$ y un único elemento $b \in \mathbf{R}$, $b \equiv 1$, tal que $x \times 1 = 1 \times x = x$. Se trata del *elemento nulo* y *elemento unidad* respectivamente.

iv) $\forall x \in \mathbf{R}$, existe un único elemento $-x \in \mathbf{R}$ tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Es el *elemento opuesto de* x.

v) $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}$, existe un único elemento $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}$ tal que

$$x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$

Es el *elemento inverso de* x.

vi) *Propiedad conmutativa*: $\forall x, y \in \mathbf{R}, x+y=y+x \,;\, x \times y = y \times x$.

vii) *Propiedad distributiva*: $\forall x, y, z \in \mathbf{R}, x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.

Si además se considera la relación $\leq$, **(R, ≤) es un cuerpo totalmente ordenado**, es decir:

i) $\forall x, y \in \mathbf{R}, x \leq y$ ó $y \leq x$.

ii) $\forall x, y \in \mathbf{R}, x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$.

iii) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}, x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$.

iv) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ si $x \leq y, x+z \leq y+z$.

v) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ si $0 \leq x$ y $0 \leq y$, entonces $0 \leq x \times y$.

vi) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, con $x \leq y$, $z>0$, entonces $xz \leq yz$.

vii) $\forall\ x, y, z \in \mathbf{R}$, con $x \le y$, $z<0$, entonces $xz \ge yz$.

viii) $\forall\ x, y \in \mathbf{R}$, con $0<x<y$, entonces $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Se dice que **R es un cuerpo arquimediano** por verificar el siguiente axioma:

$$\forall\ x,\ y \in IR,\ si\ 0 < x\ y\ 0 \le y,\ \exists n \in IN / y \le n * x$$

Otro axioma de gran importancia se refiere a la densidad de **Q**. Afirma que **Q es denso en R**, lo que significa que:

$$\forall\ x < y \in IR, \exists\ q \in Q / x < q < y$$

Todos estos axiomas junto con el *axioma de completitud* que se enunciará más adelante, permiten deducir todas las propiedades de los números reales. De dichos axiomas se pueden extraer todas las leyes usuales del Álgebra elemental.

Los números reales se pueden representar sobre una recta en la que se haya elegido un punto origen como imagen del número real 0 y una unidad de medida. En esta representación, a todo número real le corresponde un punto de la recta y viceversa, cada punto de la recta es la imagen de un número real. Además, dados dos números reales x, $y \in \mathbf{R}$, es $x < y$ si y solo si la imagen de x está a la izquierda de la imagen de y. Este es el motivo por el que al conjunto **R** también se le llama *la recta real*.

Axioma de completitud

Una vez definida la relación de orden $\le$, sea A un subconjunto cualquiera de **R**. Se definen los siguientes conceptos:

- Se dice que $m \in \mathbf{R}$ es una *cota inferior* del conjunto A, si $\forall\ x \in$ A, $m \le x$. Del mismo modo, M $\in$ **R** es una *cota superior* del conjunto A, si $\forall\ x \in$ A, $M \ge x$.
- Se dice que A está *acotado inferiormente* (*superiormente*) en **R** si admite al menos una cota inferior (superior) finita. Si A está acotado superior e inferiormente se dice que está *acotado en* **R**.
- La mayor (menor) de las cotas inferiores (superiores) se denomina *extremo inferior* o *ínfimo* (*superior* o *supremo*) del conjunto A. Si el extremo inferior (superior) pertenece al conjunto A se denomina *mínimo* (*máximo*) de A.

El *axioma de completitud* de **R** afirma que todo subconjunto A $\subset$ **R** no vacío y acotado superiormente (inferiormente) posee en **R** un extremo superior o supremo (extremo inferior o ínfimo).

Intervalos

Los subconjuntos más notables de **R** son los intervalos. Sean a, $b \in \mathbf{R}$, se definen los siguientes conjuntos:

- Si $a < b$, se denomina *intervalo abierto* (a, b) al conjunto:

$$(a,b) = \{x \in IR / a < x < b\}$$

- Si $a \le b$, se denomina *intervalo cerrado* $[a, b]$ al conjunto:

$$[a,b] = \{x \in IR / a \le x \le b\}$$

- Para $a < b$, los *intervalos semiabiertos* $[a, b)$ y $(a, b]$ son los conjuntos

$$[a,b) = \{x \in IR / a \le x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \in IR / a < x \le b\}$$

- Se definen también los siguientes *intervalos no acotados*, con a, $b \in \mathbf{R}$:

$$[a,+\infty) = \{x \in IR / a \le x\}$$
$$(a,+\infty) = \{x \in IR / a < x\}$$
$$(-\infty,b] = \{x \in IR / x \le b\}$$
$$(-\infty,b) = \{x \in IR / x < b\}$$

- El intervalo $(-\infty,+\infty)$ representa la recta real completa.

Valor absoluto:

Tomando de nuevo como referencia la correspondencia entre el conjunto **R** y la recta real, se puede definir el concepto de *valor absoluto de un número real*.

Formalmente, la función valor absoluto de un número real x, $|x|$, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto define la distancia entre los puntos de la recta real. La distancia entre los números x e y de la recta real es

$$|y - x| = |x - y|$$

$|x|$ es la distancia del punto x respecto al origen.

El valor absoluto cumple las siguientes propiedades.

Para dos números reales x e y se verifica:

$$
\begin{aligned}
&i)\ |x| \geq 0 \\
&ii)\ |-x| = |x| \\
&iii)\ |x|^2 = x^2 \\
&iv)\ |xy| = |x||y| \\
&v)\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0 \\
&vi)\ Si\ y \geq 0, |x| = y \Leftrightarrow x = \pm y \\
&vii)\ Si\ y > 0, |x| < y \Leftrightarrow -y < x < y \\
&viii)\ Si\ y > 0, |x| > y \Leftrightarrow x > y \text{ ó } x < -y \\
&ix)\ |x + y| \leq |x| + |y|
\end{aligned}
$$

La propiedad vi) es útil para resolver ecuaciones en valores absolutos. Las propiedades vii) y viii) son las más importantes para resolver inecuaciones en valores absolutos y también se cumplen para $\leq$ y $\geq$.

Como resumen, podemos clasificar los números de la siguiente manera:

$$
\text{complejos: C} \begin{cases}
\text{reales: R} \begin{cases}
\text{racionales: Q} \begin{cases}
\text{enteros: Z} \begin{cases}
\text{naturales: N} \begin{cases} \text{uno: 1} \\ \text{primos} \\ \text{compuestos} \end{cases} \\
\text{cero: 0} \\
\text{enteros negativos}
\end{cases} \\
\text{fraccionarios} \begin{cases} \text{exacto} \\ \text{periódico} \begin{cases} \text{puro} \\ \text{mixto} \end{cases} \end{cases}
\end{cases} \\
\text{irracionales}
\end{cases} \\
\text{imaginarios}
\end{cases}
$$

3. Expresiones algebraicas y Ecuaciones

Una *expresión algebraica* es una combinación de números, operadores y símbolos representando números genéricos.

Ejemplos:

$\sqrt[3]{\dfrac{3x^3 - 5x - 2}{10 - x}}$ es una expresión algebraica en la variable x.

$10 - 3\sqrt{y} + \dfrac{5}{7 + y^2}$ es una expresión algebraica en la variable y.

$\dfrac{(x + y)^3 - xy}{y} + 2$ es una expresión algebraica en las variables x y y.

A las expresiones algebraicas que constan exactamente de un término se les denomina *monomios*. A las que tienen exactamente dos términos se les denomina *binomios* y a las que constan exactamente de tres términos se les llama *trinomios*. A las expresiones algebraicas que tienen más de un término se les denomina *polinomios*. Así $2x - 5$ es un binomio; el polinomio $3\sqrt{y} + 2y - 4y^2$ es un trinomio.

Un *polinomio en x* es una expresión algebraica que tiene la siguiente forma*

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

en donde n es un entero no negativo y los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes; se tiene que $c_n \neq 0$. A n se le denomina *grado* del polinomio. Por ello, $4x^3 - 5x^2 + x - 2$ es un polinomio en x de grado 3 y $y^5 - 2$ es un polinomio en y de grado 5. Una constante diferente de 0 es un polinomio de grado 0; de modo que 5 es un polinomio de grado 0. Se considera que la constante 0 es un polinomio; sin embargo no se le asigna ningún grado.

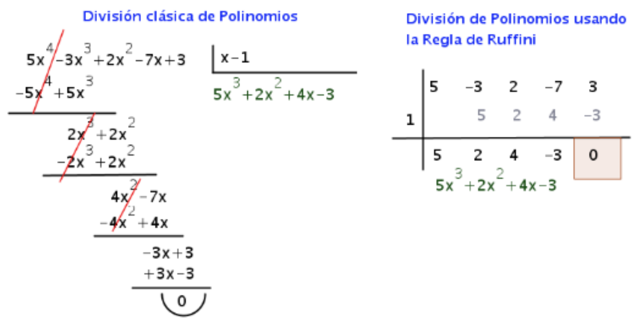
Dado que representan números, las expresiones algebraicas permiten operaciones entre ellas.

Por ejemplo, para la división existen métodos muy sencillos para simplificar dicha fracción.

¿Cómo se dividen polinomios usando Ruffini?

Para dividir polinomios usando la regla de Ruffini, seguimos los siguientes pasos que aplicamos al ejemplo:

$$(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3) : (x - 1)$$



Existen una serie de reglas para factorizar expresiones algebraicas polinómicas:

Reglas de factorización

1. $xy + xz = x(y + z)$ (factor común).
2. $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.
3. $abx^2 + (ad + cb)x + cd = (ax + c)(bx + d)$.
4. $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).
5. $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).
6. $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ (diferencia de dos cuadrados).
7. $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$ (suma de dos cubos).
8. $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ (diferencia de dos cubos).

Una *ecuación* expresa la igualdad de dos expresiones algebraicas mediante el símbolo =.

Por ejemplo:

Ecuación lineal: ecuación polinómica de grado 1

Una ***ecuación lineal*** *en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma*

$$ax + b = 0, \qquad (1)$$

en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

A las ecuaciones lineales se les denomina también *ecuaciones de primer grado* o *ecuaciones de grado 1*, puesto que la mayor potencia que ocurre en la variable de la ecuación (1) es la primera.

Ecuación cuadrática: ecuación polinómica de grado 2

Una ***ecuación cuadrática*** *en la variable x es una ecuación que puede escribirse de la siguiente forma:*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

A una ecuación cuadrática se le denomina también *ecuación de segundo grado* o *ecuación de grado 2*, puesto que la más alta potencia de la variable que aparece es la segunda. Mientras que las ecuaciones lineales tienen sólo una raíz, algunas ecuaciones cuadráticas tienen dos raíces distintas.

Existen varios métodos para resolver dichas ecuaciones (p.e. factorización y fórmula cuadrática).

Una *inecuación* expresa la desigualdad de dos expresiones mediante los símbolos $<, >, \leq$ ó $\geq$. Al multiplicar una inecuación por un número negativo, hay que invertir los símbolos $\geq, \leq, >$ y $<$, respectivamente.

Resolver una ecuación consiste en determinar el valor de la incógnita o incógnitas. Así, por ejemplo, la expresión $2x + x^2 = 0$ nos dice que o bien $x = 0$ ó $x = -2$.

Sistemas de ecuaciones: nos centraremos en ecuaciones lineales de varias variables (sistemas de ecuaciones lineales) y se suelen emplear para encontrar la solución (si existe, determinada o indeterminada) del sistema, que será el conjunto de valores de las variables de las ecuaciones que conforman el sistema que satisfacen dichas ecuaciones.

Dichos sistemas y su resolución, se estudian en detalle en un bloque posterior de la asignatura. Hasta aquí los básicos, para pocas variables, son los métodos de sustitución y eliminación.

Los sistemas de ecuaciones no lineales son aquellos en los que, al menos, una ecuación no es lineal. Con frecuencia es posible encontrar las soluciones de este tipo de sistemas en forma algebraica, por medio de sustitución, tal como se hace con los sistemas lineales.

4. Funciones matemáticas

Definición

$f(x)$, que se lee "f de x", significa el número de salida en el ámbito de f que que corresponde al número de entrada x en el dominio.

entrada

$$\underbrace{f(x)}_{\text{salida}}$$

Programa de oferta

p Precio por unidad (en dólares)	q Cantidad ofrecida por semana
500	11
600	14
700	17
800	20

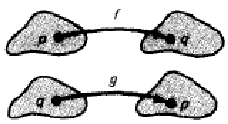


FIGURA 4.2.

Si p es la variable independiente, entonces q es función de p, es decir $q = f(p)$, y

$$f(500) = 11, \quad f(600) = 14, \quad f(700) = 17, \quad \text{y} \quad f(800) = 20.$$

De manera similar, si q es la variable independiente, entonces p es función de q, es decir, $p = g(q)$, y así

$$g(11) = 500, \quad g(14) = 600, \quad g(17) = 700, \quad \text{y} \quad g(20) = 800.$$

Se llama a f y g **funciones de oferta**. Obsérvese en el programa de oferta que al aumentar el precio unitario, los fabricantes están dispuestos a ofrecer mayor cantidad de unidades por semana.

Dadas dos funciones son *idénticas* si tienen el mismo dominio y codominio, y asignan la misma imagen a cada elemento del dominio.

Una función $f : A \to B$ es *inyectiva* si las imágenes de elementos distintos es distinta: Si $a, a' \in A$ y $a \neq a'$ entonces $f(a) \neq f(a')$.

Una función $f : A \to B$ es *suprayectiva* o *sobreyectiva* si su imagen es igual a su dominio: $Im(f) = B$.

Una función es *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva.

Sólo son *invertibles* las funciones biyectivas: f es biyectiva $\iff \exists f^{-1}$

Los números son polinomios de grado cero.

El teorema *fundamental del álgebra* establece que todo polinomio de grado mayor que cero tiene una raíz. El dominio de la variable es el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

La *factorización* de polinomios o factorización polinómica se refiere a factorizar un polinomio con coeficientes en un campo dado o en los números enteros en factores irreducibles con coeficientes en el mismo dominio.

Se denomina *aplicación lineal, función lineal* o *transformación lineal* a toda aplicación cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales que cumpla la siguiente definición: Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Una aplicación T de V en W es una *transformación lineal* si para todo par de vectores $u, v \in V$ y para todo escalar $k \in K$ se satisface que: $T(u+v) = T(u) + T(v)$ y $T(ku) = kT(u)$.

Un *espacio vectorial* es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío, una operación interna (llamada suma, definida para los elementos del conjunto) y una operación externa (llamada producto por un escalar, definida entre dicho conjunto y otro conjunto, con estructura de cuerpo), con 8 propiedades fundamentales. A los elementos de un espacio vectorial se les llama *vectores* y a los elementos del cuerpo, *escalares*.

Una función f es continua en el punto x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Teorema de *Weierstrass*: si f es contínua en $[a, b]$ entoces tiene un máximo y un mínimo absoluto.

Teorema de *Bolzano*: si f es contínua en $[a, b]$ y $f(a) f(b) < 0$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema del *valor intermedio*: si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < k < f(b)$, entonces

Relaciones implícitas, explícitas y funciones inversas:

Supongamos el caso más sencillo de dos variables *x* e *y*. Cuando *y* es una función conocida de *x*, esto es, *y=f(x)*, solemos decir que es una **función explícita** de la variable independiente *x*.

En algunas ocasiones, la relación entre *y* y *x* se expresa indirectamente por medio de alguna ecuación del tipo *F(x,y)=0*, en la cual, las variables aparecen como argumentos de la función *F* del lado izquierdo. A este tipo de ecuaciones se les denomina **relación implícita** entre *x* e *y*.

Dada una relación implícita F(x,y)=0, podemos resolver la ecuación determinando y=f(x), o bien, $x=f^{-1}(y)$, donde $\mathbf{f^{-1}}$ no es 1/f, sino que **es la función inversa de f.**

Tipos y gráficas:

+ <u>Polinómicas</u>:

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

Casos más sencillos:

Constante: *f(x)=k*, donde k es una cte.

Lineal: *f(x)=mx+b*, donde m (m≠0) y b son ctes.

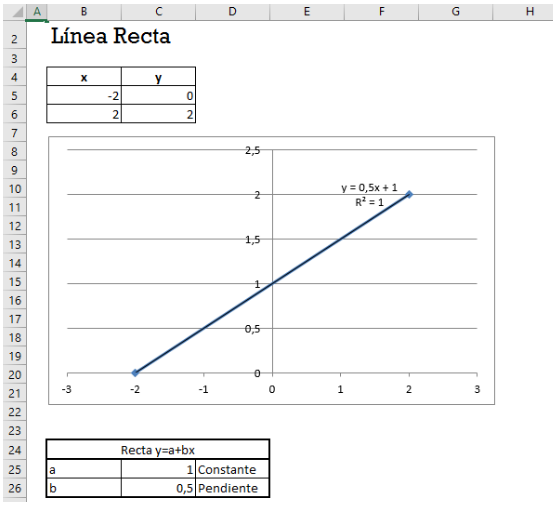
Cuadrática: *f(x)=ax²+bx+c*, donde a (a≠0), b y c son ctes.

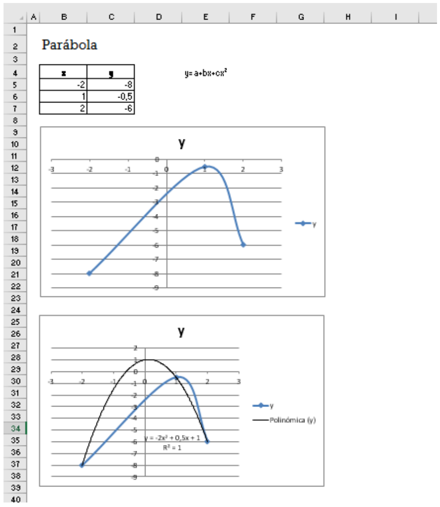
Nota: las funciones de segundo grado f(x)=ax²+bx+c, son parábolas que tienen una fácil representación y se puede demostrar fácilmente que:

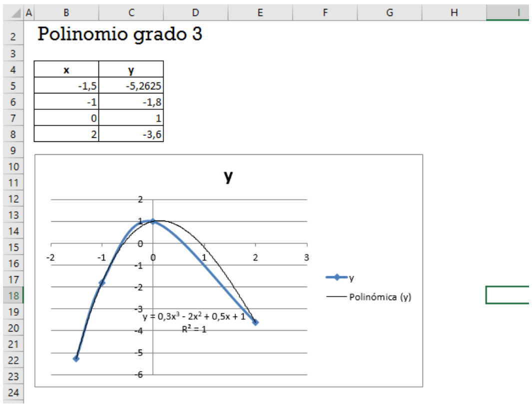
+ si a>0, la función crece hacia +∞ y habrá un mín. relativo o vértice inferior en $x_m = -b/2a$, $y_m=(4ac-b^2)/4a$.

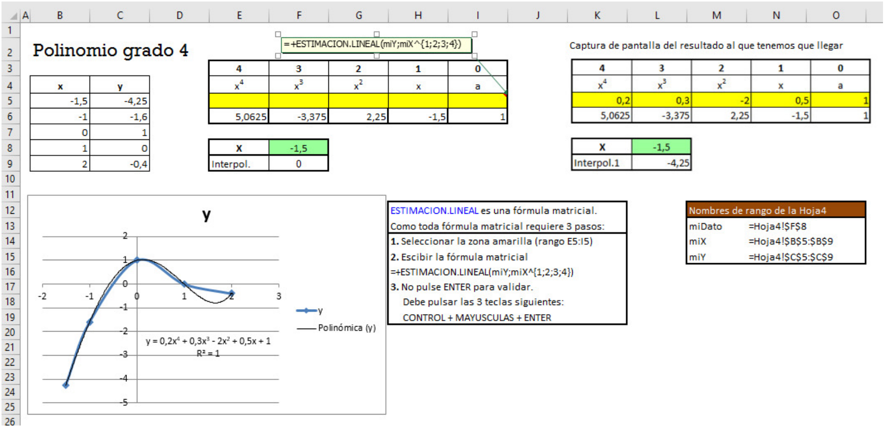
+ si a<0, la función decrece hacia -∞ y habrá un máx. relat. o vértice superior en $x_M = -b/2a$, $y_m=(4ac-b^2)/4a$.

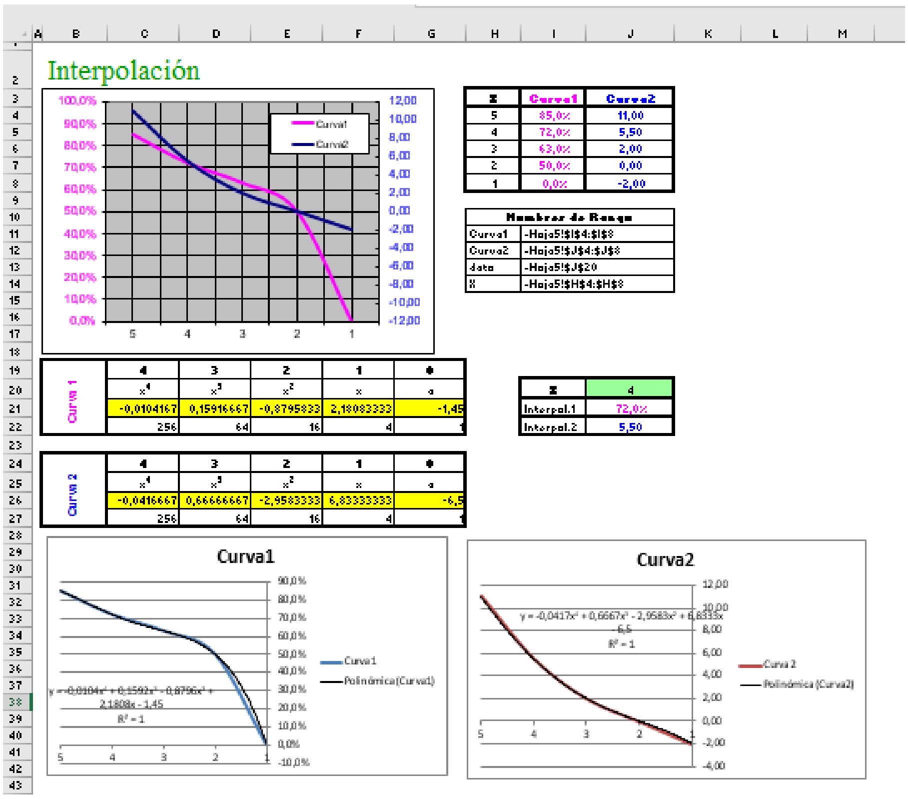
Representación (ejemplos):











+ Racionales

> A una función que es cociente de funciones polinomiales se le denomina **función racional**.

Tener en cuenta que las raíces del denominador, restringirán el dominio en el que está definida la función.

+ Exponenciales y Logarítmicas

*La **función logarítmica** de base b, en donde $b > 0$ y $b \neq 1$, se denota mediante $\log_b$ y se define como:*

$$y = \log_b x \qquad \text{si y sólo si} \qquad b^y = x.$$

El dominio de $\log_b$ es todos los números reales positivos y su ámbito es todos los números reales.

Función logarítmica invierte la acción de la función, y viceversa. A toda función logarítmica se le denomina *inversa* de su correspondiente función exponencial, y esa función exponencial es la inversa de su correspondiente función logarítmica.

Se debe tener presente que cuando se dice que el logaritmo base b de x es y, ello significa también que b elevada al exponente y es x.

$$\boxed{y = \log_b x \ \text{ significa } \ b^y = x.}$$

En este sentido, el *logaritmo de un número es un exponente*. Es el de la potencia a la que se debe elevar la base para obtener el número. Por ejemplo,

$$\log_2 8 = 3 \ \text{ porque } \ 2^3 = 8.$$

Se dice que $\log_2 8 = 3$ es la **forma logarítmica** de la **forma exponencial** $2^3 = 8$.

Propiedades:

$$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n.$$

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n,$$

$$\log_b m^r = r \log_b m,$$

$$\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m,$$

$$\log_b 1 = 0,$$

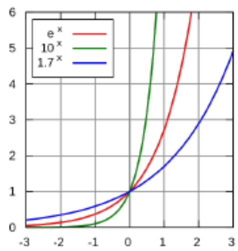
$$\log_b b = 1,$$

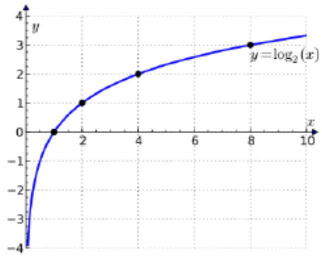
$$\log_b b^r = r,$$

$$b^{\log_b m} = m,$$

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}.$$

Representación:





La función exponencial es conocida formalmente como la función real e^x, donde e es el número de Euler, aproximadamente 2,71828... Su dominio de definición el conjunto de los números reales, y tiene la particularidad de que su derivada es la misma función. Se denota equivalentemente como e^x o $\exp(x)$. Formalmente se puede definir como una serie de potencias

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

o como el límite de una sucesión:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Propiedades: $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{a-b} = e^a/e^b$,$e^{-a} = 1/e^a$, $e^0 = 1$.

La función inversa de la exponencial es el logaritmo en base natural: $y = e^x \iff x = \ln(y)$

Propiedades: $\ln(a+b) = \ln(a)\ln(b)$, $\ln e = 1$,$\ln 1 = 0$, $\ln a^b = b\ln a$. No existen logaritmos sobre números negativos.

Se pueden usar otras bases diferentes a e, como por ejemplo la base 10: $y = 10^x \Rightarrow x = \log_{10} y = \frac{\ln y}{\ln 10}$.

En general, cualquier función del tipo $f(x) = K \cdot a^x$, con K y a>0 constantes, diremos que es de *tipo exponencial* ya que $f(x) = Ke^{x\ln a}$.

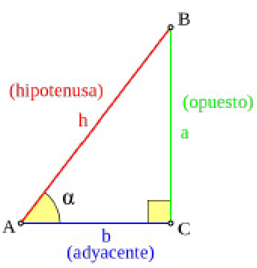
+ <u>Trigonométricas</u>:

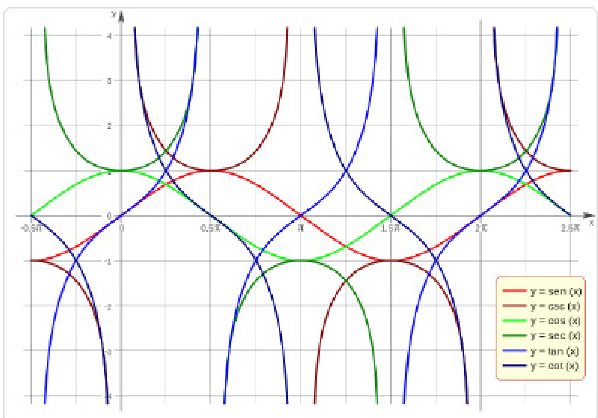
Las funciones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a uno de sus ángulos. Los argumentos se miden en radianes, siendo la circunferencia entera (360º) equivalente a 2π radianes. Usando la notación de la Fig. 4, nombramos a los lados del triángulo hipotenusa, cateto adyacente y cateto opuesto.

Se define $\sin\alpha = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{h}$, $\cos\alpha = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{h}$,$\tan\alpha = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{adyacente}{opuesto} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Por el teorema de pitágoras, se cumple que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Las funciones inversas son arcsin, arc cos y arctan.





Relaciones trigonométricas:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos a$$

$$\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \sin a$$

Definición analítica:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Ambas funciones son periódicas de periodo 2π. El seno es impar y el coseno es una función par.

+ Otras:

Potencial: $f(x)=ax^n$, donde a y n son constantes distintas de cero. En realidad, un polinomio es un sumatorio de funciones potenciales de grado n, donde n pertenece a los números naturales.

Círculo: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, donde *r* es el radio del círculo, y *(h,k)* es el punto *(x,y)* donde se encuentra el centro del círculo.

Valor absoluto: $p.e.$ $\quad f(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2 & si\ x \geq -2 \\ -(x+2) & si\ x < -2 \end{cases}$

Valor entero: *p.e.* $f(x)=E[x]$

Combinaciones de funciones (funciones compuestas):

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

5. Sucesiones y Progresiones

Una *sucesión* a_n puede definirse como una función sobre el conjunto de los números naturales (o un subconjunto del mismo) y es por tanto una función discreta. Cada elemento de la sucesión se llama *término*. También se puede representar como $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Tipos: finita ($n < N$), infinita ($n \to \infty$), creciente ($a_{n+1} \geq a_n$), decreciente ($a_{n+1} \leq a_n$), acotada ($|a_n| < L$), convergente ($\lim_{n\to\infty} a_n = L$), alternada ($sig\,(a_{n+1}) = -sig\,(a_n)$). Si es creciente o decreciente, será monótona.

Una *serie* es la suma de todos los términos de una sucesión: $S = \sum_{i=1}^{N} a_i$

Una *progresión aritmética* es aquella en la que cada término se obtiene sumando una constante al anterior: $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)\,d$. La serie aritmética se obtine así:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$$

Una *progresión geométrica* es aquella en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante, llamada razón r, es decir, $a_n = ar^n$. La serie infinita será convergente si y sólo si $|r| < 1$.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a \cdot r^i = \frac{a}{1-r}\left(1 - r^{n+1}\right)$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} a \cdot r^i = \frac{a}{1-r}$$

Límite de una sucesión

Definición formal de límite de una sucesión:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall n > N, |a_n - L| < \varepsilon$$

Definición formal del límite de una función:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

Una función f es continua en un intervalo si cualquier sucesión convergente x_n en ese intervalo cumple: $\lim_{n\to\infty} x_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(L)$

Límites laterales de una función:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L^+ \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < x - c < \delta \to \left|f(x) - L^+\right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L^- \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < c - x < \delta \to \left|f(x) - L^-\right| < \varepsilon$$

Ejemplo:

Según la expresión del interés compuesto y siendo r el tipo de interés anual, si se divide el año en m períodos y se reinvierten los intereses, el incremento del capital será $C = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m P$. Haciendo $m \to \infty$ llegamos al caso continuo y según la definición de la función exponencial, obtenemos que $C = e^r P$.

6. Límites de las funciones

Límite es una noción topológica que formaliza la noción intuitiva de aproximación hacia un punto concreto de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a un determinado valor.

La definición de límite matemático para el caso de una sucesión nos indica intuitivamente que los términos de la sucesión se aproximan arbitrariamente a un único número o punto L, si existe, para valores grandes de n: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Este límite, si existe, se puede demostrar que es único. Si los términos de la sucesión no convergen a ningún punto específico, entonces se dice que la sucesión es divergente.

Del mismo modo, se define el límite de una función $f(x)$ en un punto c como el valor al que se va aproximando la función cuando x se va aproximando a c (punto de acumulación), independientemente de que éste pertenezca al dominio de la función: $\lim_{x\to c} f(x) = L$

Los límites laterales se construyen aproximándonos a un punto c por la derecha o por la izquierda: $\lim_{x\to c+} f(x)$ y $\lim_{x\to c-} f(x)$. El límite existe si y sólo si existen los límites laterales y éstos son iguales.

Existen unas reglas sencillas para el cálculo de límites:

- Regla de la suma: $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- Regla del producto: $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- Regla del cociente: $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x)$
- Regla de la potencia: $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$

En el cálculo de límites es habitual que aparezcan expresiones del tipo:

- $\frac{a}{0}$: El límite es ∞ o $-\infty$ dependiendo del signo de la constante a.
- $\frac{0}{\infty}$: El límite es 0.
- $\frac{\infty}{a}$: El límite es ∞ o $-\infty$ dependiendo del signo de la constante a.
- a^{∞}: El límite es ∞ si $a > 1$, y 0 si $a < 1$.
- $a^{-\infty}$: El límite es ∞ si $a < 1$, y 0 si $a > 1$.

En algunas ocasiones aparecen lo que denominamos indeterminaciones, es decir, expresiones cuyo límite existirá o no dependiendo de caso particular. Las indeterminaciones más habituales son:

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $0 \cdot \infty$
- $\infty - \infty$
- 1^{∞}

La indeterminación $0/0$ se puede resolver en ocasiones simplificando raíces comunes en expresiones formadas como cociente de polinomios. Así, por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x-1) = 1$$

También se puede multiplicar y dividir por el conjugado del denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

Para resolver la indeterminación ∞/∞ podemos dividir por la mayor potencia:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1} = 1$$

El conjugado también se puede utilizar en este tipo de indeterminaciones.

Para las indeterminaciones del tipo $0/0$ puede usarse en la regla de L'Hôpital es una consecuencia del Teorema del valor medio de Cauchy. El teorema dice lo siguiente: Sean f y g dos funciones continuas definidas en el intervalo $[a,b]$, derivables en (a,b) y sea c perteneciente a (a,b) tal que $f(c) = g(c) = 0$ y $g'(c) \neq 0$ si $x \neq c$. Si existe el límite L de f'/g' en c, entonces existe el límite de f/g (en c) y es igual a L. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Así, por ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Esta regla se puede aplicar de forma consecutiva en funciones n veces derivables.

Las indeterminaciones ∞/∞ también pueden resolverse aplicando esta regla (invirtiendo numerador y denominador transformamos se transforma en una indeterminación del tipo $0/0$). Esto puede aplicarse también a la indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} x \ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

Del mismo modo podemos resolver las indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - x}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - x}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 - x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}} = \frac{1}{2}$$

La indeterminación 1^∞ en ocasiones se puede resolver usando la siguiente expresión (que no es otra que la definición del número e):

$$\lim_{x\to a} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \left(1 + \frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}\frac{1}{x+2}} = e^{\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+2}} = e^{1/3}$$

7. Comportamientos de las funciones y órdenes de crecimiento.

Según el tipo de función se obtendrán patrones de comportamiento diferentes. Los *patrones* básicos permiten entender *comportamiento*s sencillos de la realidad, indicando cómo evolucionan en función de sus variables (crecen, decrecen u oscilan, p.e.).

La *continuidad* es un comportamiento típico de la naturaleza. En general, una función y=f(x) es contínua en x=b si f(x) se aproxima a f(b) cuando x se aproxima a b. Esto es, el límite de la función en el punto (por la izda y por la dcha) coinciden con el valor de la función.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

El comportamiento *asintótico* estudia hacia donde evolucionan las cosas en el *límite*, esto es, a lo que tienden. Si bien lo estudiaremos en detalle más adelante, conviene indicar que esto nos permitirá conocer el *orden de crecimiento* de patrones elementales, lo que es muy útil para comparar crecimientos entre funciones.

Sean dos funciones f(x) y g(x) para las que cuando x $\to \infty$ (o cuando tiende a un valor a), f(x) $\to \infty$ y g(x) $\to \infty$. Entonces, si f(x)/g(x) $\to \infty$, se dice que el *orden de crecimiento en el infinito* (o en el punto a) de f(x) *es mayor que* el de g(x), esto es, crece más rápido.

En condiciones similares, si f(x) $\to 0$ y g(x) $\to 0$. Entonces, si f(x)/g(x) $\to \infty$, se dice que f(x) es un *infinitésimo de menor orden* que g(x), esto es, crece más lento.

8. Notación sumatoria

$$x_1+x_2+x_3+...+x_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{k=m}^{n} c = (n-m+1)c$$

$$\sum_{k=m}^{n} (x_k \pm y_k) = \sum_{k=m}^{n} x_k \pm \sum_{k=m}^{n} y_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} cx_k = c\sum_{k=m}^{n} x_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_{m-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Referencias

"Cálculo de una variable, I", Bradley, G.L. y Smitch, K. J.. Ed. Prentice Hall (1998).

"Matemáticas para la economía y las finanzas", Martin Anthony y Norman Biggs. Cambridge University Press (2001).

"Matemáticas para Administración y Economía", Haeussler E.F., Paul, R. S.. Penn State University, G.Ed. Iberoamérica SA de CV (1992).