

Bloque 5:

Desarrollo del pensamiento geométrico

Desarrollo del pensamiento
matemático infantil

Curso 2018/19

Construcción del número natural

Opción didáctica:

Promover el desarrollo del pensamiento y razonamiento lógico en los niños



Crear situaciones que provoquen la evolución del lenguaje, pensamiento y actividad lógica en los niños



Generar actividad lógica:

Simbolización

Clasificación

Seriación

Generamos **actividad matemática** relacionada con la construcción del número, de la magnitud y la medida y de **la geometría**

Números y operaciones

- Los números pueden usarse para indicar cuántos hay, describir orden y medida. Implican numerosas y pueden representarse de distintos modos
- Las operaciones con números pueden ser usados para representar una variedad de situaciones del mundo real y para resolver problemas; se deben llevar a cabo de distintos modos.

Álgebra

Los patrones pueden usarse para reconocer relaciones y pueden extenderse para realizar generalizaciones

Geometría

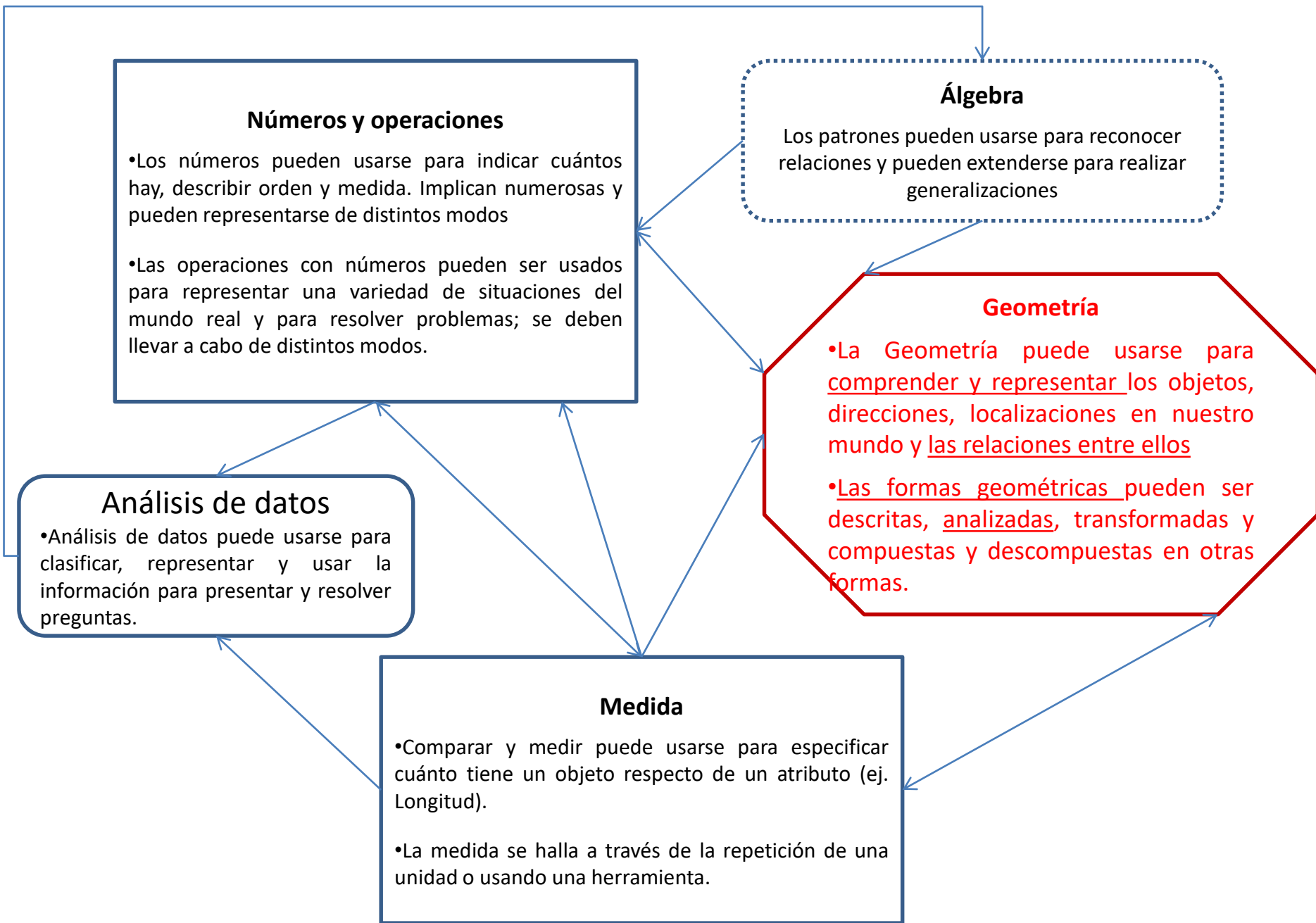
- La Geometría puede usarse para comprender y representar los objetos, direcciones, localizaciones en nuestro mundo y las relaciones entre ellos
- Las formas geométricas pueden ser descritas, analizadas, transformadas y compuestas y descompuestas en otras formas.

Análisis de datos

- Análisis de datos puede usarse para clasificar, representar y usar la información para presentar y resolver preguntas.

Medida

- Comparar y medir puede usarse para especificar cuánto tiene un objeto respecto de un atributo (ej. Longitud).
- La medida se halla a través de la repetición de una unidad o usando una herramienta.



4.1. ¿Qué es espacio?

- respuestas diversas ...

silencio (o sea, ni idea)

lo que visitan los astronautas

el hueco entre dos cosas

algo vacío

no existe por sí solo

no es absoluto es sólo una ilusión

T.de la Relatividad: dualidad espacio/tiempo

*Según Piaget (1948), “el espacio lo constituye
aquella extensión proyectada desde el cuerpo y
en todas las direcciones, hasta el infinito”.*

Conclusión



Teoría de la relatividad de Einstein

00:00 a 3:10

De la lectura de Canals (1997), dos preguntas:

-¿Qué es la Geometría?

-¿Cuál es la naturaleza del conocimiento geométrico?

SUBRAYAMOS Y ANOTAMOS SOBRE EL ARTÍCULO

Según Canals (1997), los maestros de infantil tienen la tendencia a **identificar conocimiento del espacio con Geometría y es erróneo**. El conocimiento del espacio es mucho más amplio, convergen muchas ciencias, porque contiene elementos de muy diversos tipos: visuales, auditivos, físicos...y muchos otros.

¿Qué elementos, pues, son objetos de la Geometría?

- La posición
 - La forma
 - Los cambios de posición o de forma (transformaciones).
- Son los fenómenos geométricos

La posición

- *Las primeras relaciones espaciales para situarse uno mismo (orientación) y situar los objetos entre ellos, realizadas por criterios de orden, proximidad, separación, etc.
- * Más tarde, las relaciones de posición que se rigen por criterios de direccionalidad.
- *Finalmente, las relaciones y nociones basadas en criterios de medidas, en especial, de distancias y ángulos, que conducen a determinar la posición por sistemas de referencia.

Las formas

- *El reconocimiento, definición y clasificación de figuras de una, dos y tres dimensiones.
- *La construcción de las figuras y cuerpos reconocidos con materiales diversos.
- *La observación y análisis de las propiedades de figuras y cuerpos y, a partir de ello, la organización de los mismos en categorías.

Los cambios de posición o de forma (transformaciones). Son los fenómenos geométricos.

- * El reconocimiento en la vida real, en el entorno y en el arte, de las diversas transformaciones como cambios de forma o de posición.
- *La observación y estudio de sus leyes de funcionamiento.
- *Su relación con las distintas familias de figuras y cuerpos.

5.2. ¿Cuál es la naturaleza del conocimiento geométrico que queremos promover? (Aprendizaje-enseñanza)

Canals, M. A. (1997). La geometría en las primeras edades escolares. *Suma*, nº 25, 31-44.

Evidentemente, en las edades que nos ocupan vamos a hablar de una Geometría muy elemental, que incluso puede parecerlo demasiado si sólo se miran los resultados en forma de conceptos. Pero creo que hace falta plantear la Geometría en esta primera etapa con toda seriedad, no sólo porque la enseñanza de los pequeños merece el mismo respeto que la de los mayores, sino también porque muchas veces hemos podido constatar que el hecho de analizar con detalle el acto del conocimiento en las primeras edades de la vida, puede ser para nosotros una ocasión privilegiada de profundizar en el verdadero significado de este conocimiento, lo cual nos sirve para mejorar la enseñanza en cualquier edad. Es un poco como cuando en la televisión nos pasan una jugada de fútbol en cámara lenta para ver mejor lo que sucedió. (p. 2)

5.2. Naturaleza del conocimiento geométrico (Canals, 1997, p.33) (aprendizaje-enseñanza)

¿Qué NO es tener conocimiento geométrico?

- ✓ No es dominar información de temas geométricos.
- ✓ No se adquiere a partir de recibir información dada por otra persona, a través de palabras o de imágenes, SI AL MISMO TIEMPO NO SE PONE EN JUEGO LA EXPERIENCIA Y LA MENTE DEL QUE LOS RECIBE.
- ✓ No consiste en reconocer visualmente unas determinadas formas y saber su nombre correcto.
- ✓ Es mucho más profundo y complejo.....

5.2. Naturaleza del conocimiento geométrico (Canals, 1997, p.33) (aprendizaje-enseñanza)

Tener conocimiento geométrico (CG) implica el desarrollo de capacidades muy diversas, como la imaginación, la creatividad y el gusto por la belleza de las formas.

¿Cómo se construye? mediante los siguientes pasos:

- la exploración* consciente del espacio;
- la comparación* de elementos del espacio, *estableciendo relaciones* entre ellos;
- la expresión verbal* de las acciones realizadas y de las propiedades observadas;
- y la *interiorización* de ese primer conocimiento

5.2. Naturaleza del conocimiento geométrico (Canals, 1997, p.33) (aprendizaje-enseñanza)

- El CG no se adquiere recibiendo información.
- No consiste en reconocer formas e identificar sus nombres. (Visión tradicional)
- En el proceso de construcción del CG, la exploración directa del espacio y la actividad consciente y reflexiva son elementos imprescindibles. **Sin la exploración, el conocimiento** resultante es meramente **memorístico**; **sin la reflexión**, el conocimiento resultante es meramente **sensorial y motórico**. En ninguno de los dos casos se construye conocimiento geométrico propiamente dicho.

5.2. Naturaleza del conocimiento geométrico (Canals, 1997, p.33) (aprendizaje-enseñanza)

-A estos pasos, les siguen otros que implican una mayor madurez:

- descubrir propiedades de las figuras y de las transformaciones;*
- construir modelos para expresarlas plásticamente;*
- combinar las nociones, destrezas y resultados obtenidos;*
- elaborar conclusiones y formular unas primeras leyes generales.*

5.2. Naturaleza del conocimiento geométrico (Canals, 1997, p.33) (aprendizaje-enseñanza)

Con la puesta en práctica de todas estas capacidades, cada una en su momento adecuado, el sujeto irá ampliando progresivamente su imagen mental del espacio, incorporando en ella nuevos elementos, que al principio sólo son relaciones muy sencillas o nociones intuitivas, y que luego ya serán propiedades más complejas, primeras leyes de los fenómenos geométricos, y conceptos abstractos.

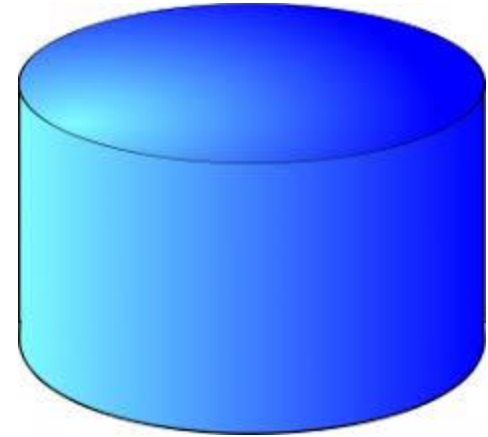
(p. 33)

5.2. Naturaleza del conocimiento geométrico (Canals, 1997, p.33) (aprendizaje-enseñanza)



Cubo

¿Qué son?



Cilindro

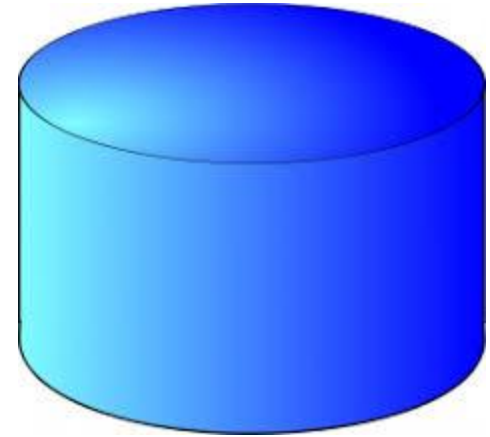
Conocimiento sensorial, apoyado en la percepción visual (táctil en el mejor de los casos), en el que no se ha implicado el pensamiento lógico, por lo que no es conocimiento geométrico.

5.2. Naturaleza del conocimiento geométrico (Canals, 1997, p.33) (aprendizaje-enseñanza)



Cubo

¿Qué son?



Cilindro

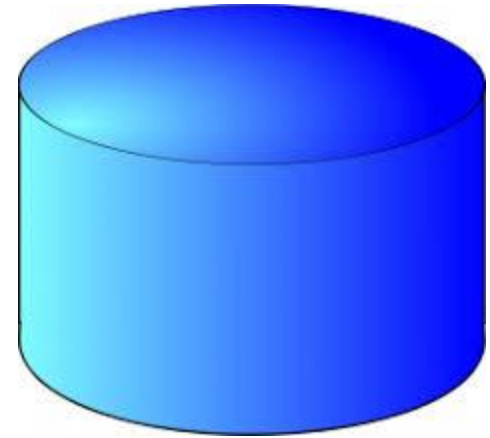
Esta actividad nunca provocará conocimiento geométrico porque **no se basa en experiencia vivenciada** y **no provoca la interiorización** de lo observado.

5.2. Naturaleza del conocimiento geométrico (Canals, 1997, p.33) (aprendizaje-enseñanza)



Cubo

¿Qué son?



Cilindro

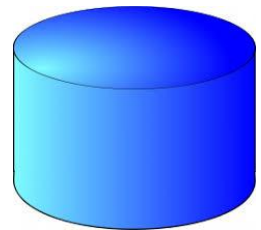
Observar propiedades geométricas del cubo y cilindro a través de objetos de nuestro entorno que tienen esa forma. En infantil podrían meterse dentro de ellas, observarlas desde dentro y desde fuera, ver que tienen superficie (curvas y planas), 'espacio interior', posición, movimiento, etc.

5.2. Naturaleza del conocimiento geométrico (Canals, 1997, p.33) (aprendizaje-enseñanza)



Cubo

A los más pequeños quizás sólo les llamaremos la atención sobre el hecho de que la «superficie» de los cuerpos es algo que podemos frotar con la mano, y en cambio su «espacio interior» es otra cosa (que podemos llenar u ocupar). O bien podemos sugerir que observen que la superficie del cilindro tiene una parte curva y otras partes planas mientras que la del cubo no. Más adelante podrán hacer rodar el cilindro sobre el suelo, y no el cubo, y preguntarse el porqué de esta conducta diferente en ambos casos; podrán fijarse en cual de ellos tiene «caras» que son polígonos, en cómo son los vértices vistos desde dentro y desde fuera, e interrogarse sobre la causa de que el cilindro no los tenga; podrán forrar ambos cuerpos, y encontrar diferencias y semejanzas entre ellos y con otros conocidos, siempre manipulando y experimentando con materiales.



Cilindro



Gráfico 1. Dibujo realizado por una niña de 3 años, después de la actividad; ejemplo n.º 5. Se observa:

- La necesidad de situarse ella misma en el recorrido para asegurar que lo hizo; es una cosa suya.
- La diferenciación de dos tipos de poligonales: abierta y cerrada; lo recuerda perfectamente.
- El deseo de hacer todo lo que hacen los mayores: señalar el punto de partida, dibujar flechas...
- La fuerza de las líneas; la firme decisión de que sean rectas; ha interiorizado esta noción.
- La fuerza de los vértices, marcados con toda claridad, cosa inusual en los dibujos de esta edad; seguramente ha interiorizado también el cambio de dirección hecho en el giro.

Ertela

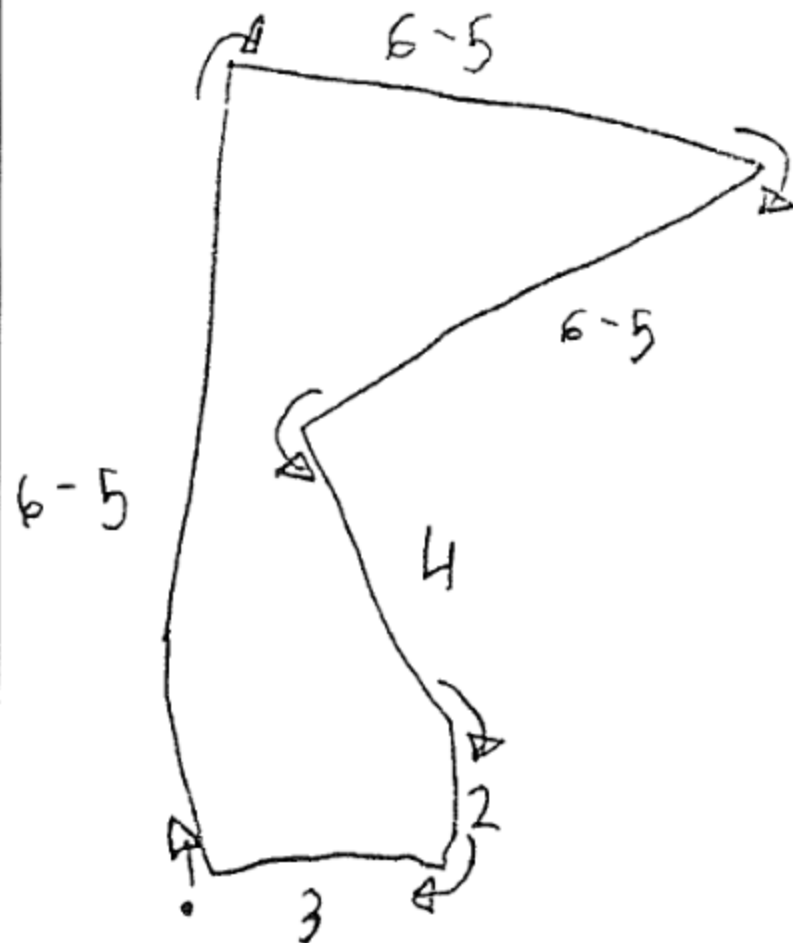


Gráfico 2. Dibujo de una niña del ciclo 1.º de primaria (7 años), recordando, sin el modelo. Se observa:

- Ya no necesita dibujarse ella misma para expresar su recorrido.
- Ha asumido perfectamente el sentido del giro realizado en cada vértice y probablemente reconoce en qué caso el giro se ha hecho en sentido contrario al de los otros.
- No escribe los nombres, pero el nivel de conocimiento que demuestra corresponde a conocer el vocabulario: polígono, lados, vértices.
- Ha tomado medidas a los lados, las recuerda y las hace constar (6-5 quiere decir entre 6 y 5 aproximadamente) no tiene aún adquirido el hábito de escribir la unidad; ejemplo, n.º 6.
- Sus trazos son menos firmes que los del caso anterior; lo de la línea recta ya no le sorprende, seguramente por sabido.

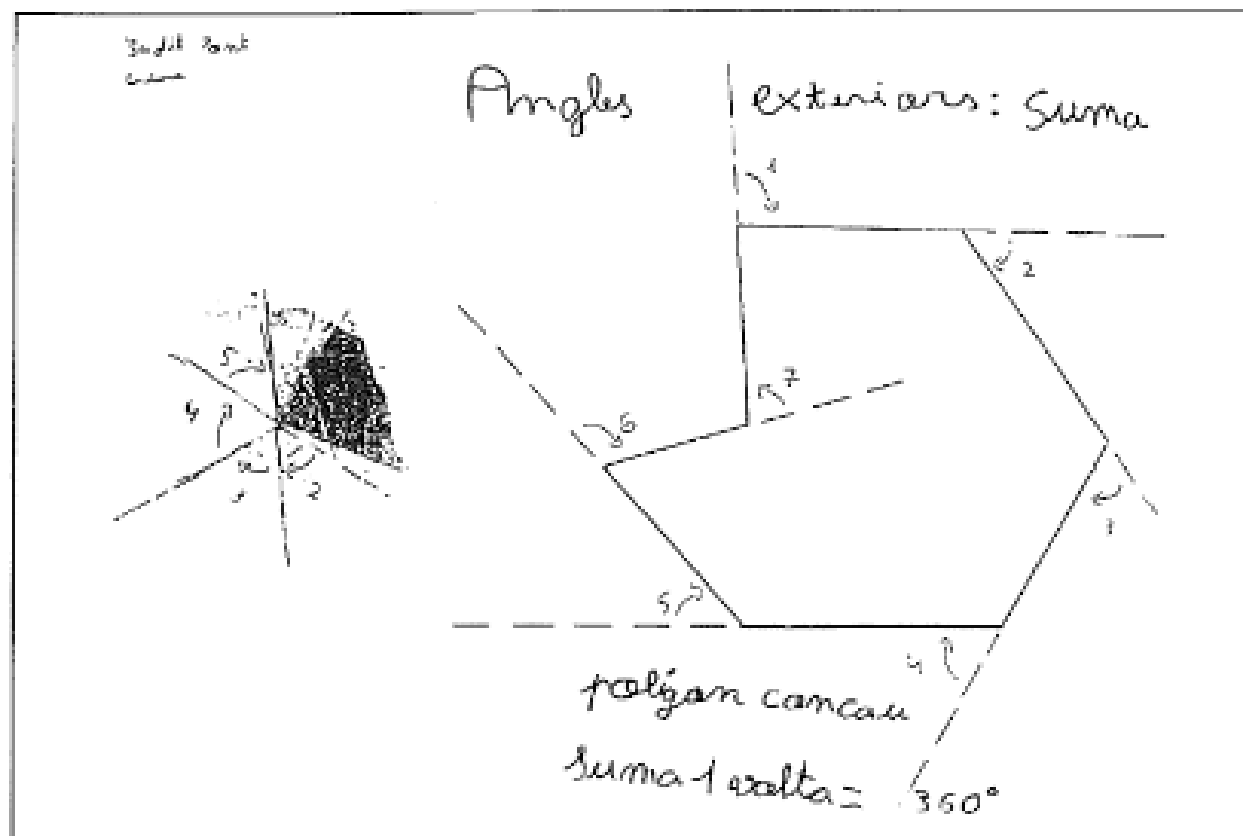
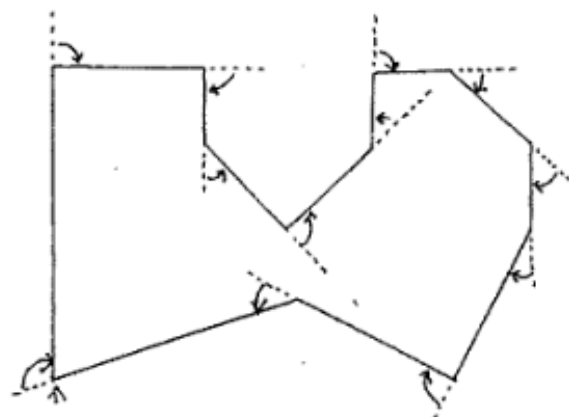


Gráfico 3. Dibujo de una niña de 2º ciclo de primaria (9 años) mirando el modelo; ejemplo n.º 8 y 9. Se observa:

- Dominio en el uso de la regla para dibujar polígonos.
- Precisión en el trazado y representación de los ángulos.
- No señala el origen; se supone que se empieza por el vértice del ángulo 1.
- Pone el título de la actividad y al final expresa el resultado o sea lo que se descubrió.



El codi dona 358°
i hauria de donar 360°
la diferència és de 2°
però la figura està bé.

-96 cm
-79.1°
-77 cm
-79.0°
-24.5 cm
-79.5°
-36.5 cm
-79.0°
-36 cm
-79.7°
-23.5 cm
-79.2°
-29 cm
-79.5°

Gráfico 4. Dibujo de un niño de 6.º curso de primaria, acompañado del código correspondiente. El código se ha confeccionado en la figura del suelo (del pasillo, según dice su autor). A partir del código, se ha realizado este dibujo. Se observa:

- Interés por una buena presentación; primero lo hizo en lápiz y luego lo pasó a bolígrafo.
- Una notable precisión en el uso de la regla y del círculo graduado (los ángulos en grados).
- Señala el punto de origen y la dirección del primer tramo con la flecha; al final no olvida terminar con un giro.
- Explicita la escala a la cual se han reducido las longitudes; no tuvo dudas sobre el hecho que los ángulos se mantenían iguales.
- El interés por la exactitud de las medidas y del resultado le hace expresar espontáneamente por escrito el desajuste que encontró en la práctica; sabe relativizarlo.

5.3.2. Conocimientos espaciales como contenido matemático: percepción, representación e interpretación

Desde un punto de vista de los conocimientos espaciales como contenido en este nivel, vamos a destacar tres aspectos relevantes:

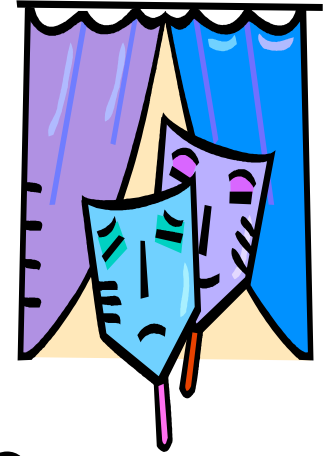
- La **percepción** del espacio
- La **representación** del espacio
- La **interpretación** del espacio

-La percepción del espacio

- Posibilita tomar conciencia del lugar que nos circunda, en donde interactuamos.
- ¿Cómo se percibe el espacio? Los estudios de diferentes autores (Piaget, Grize, Lepecq, Vecino) han caracterizado tres tipos de percepción:

Tipo de percepción	En que se centra	Implicaciones
Intrafigural	en las relaciones internas de una figura, considerada como un ente independiente	<ul style="list-style-type: none"> - estaticidad - independencia - indescomponibilidad - incapacidad de medir - adireccionalidad
Interfigural	en las relaciones externas entre diversas figuras	<ul style="list-style-type: none"> - dinamicidad - dependencia - componibilidad - posibilidad de medición - consideración de distintas direcciones
Transfigural	en las estructuras generales que determinan clasificaciones en distintas geometrías o en una misma geometría	<ul style="list-style-type: none"> - diferenciación según invariantes - dependencia en base al espacio considerado - sistemas de medida, dirección, orientación y localización

- *La representación del espacio*



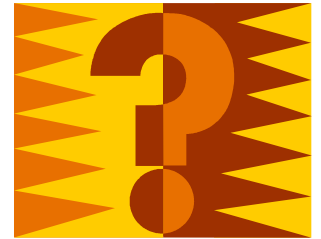
NOCIÓN DE REPRESENTACIÓN:

Es una imagen interiorizada del mundo exterior.

El período infantil es esencialmente el momento del crecimiento de la habilidad del niño para usar representaciones. Este proceso implica un enorme avance hacia la independencia del niño con respecto al "aquí y ahora" y a los objetos concretos de su mundo.

Se establece una distinción entre:

- la representación espacial como almacenamiento de contenidos específicos relativos a lugares, y
- la representación como pensamiento espacial relativo a relaciones fundamentales.



¿sobre qué se fundamenta la construcción de diversos tipos de representación espacial? (Pechoux, 1990, en Chamorro, 2005, pág. 263)

(Sobre codificaciones variadas de la realidad espacial)

- ***La interpretación del espacio***

- Es el reconocimiento de situaciones y de imágenes, desde el punto de vista de la localización o de la sucesión.
- La interpretación del espacio:
 - parte de elaboración de dos nociones básicas: distancia y orientación
 - requiere un soporte gráfico. Dibujos, planos y mapas son mecanismos que aportan el niño información espacial.



- La geometría puede ser usada para entender y representar los objetos, direcciones y localizaciones de nuestro mundo, y las relaciones entre ellos
- Los objetos geométricos pueden ser descritos, analizados, compuestos/descompuestos y/o transformados, según se consideren distintas geometrías.

De geometrías y formas vamos a tratar a continuación....

5.3.3. Tres enfoques geométricos diferentes para el estudio del espacio

En función de las relaciones que podemos establecer entre los diferentes elementos geométricos nos encontramos con tres enfoques geométricos:

- **topológica**: relaciones que no varían por una deformación bicontinua (dos veces continua, que no varía ni por estirar ni por girar). (movimientos elásticos)
- **proyectiva**: relaciones que no varían al cambiar el punto de proyección (el punto de vista desde donde se mira). (Proyecciones y semejanzas)
- **métrica**: relaciones que dependen de medidas. (La geometría euclídea)

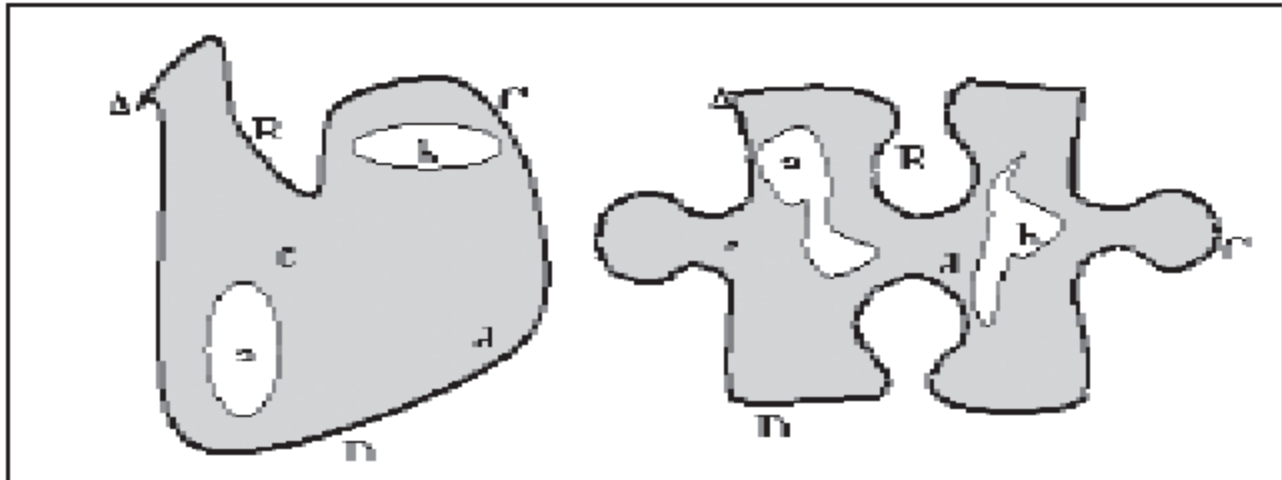
“En lo que respecta a la enseñanza de los conceptos matemáticos y más específicamente de las nociones referidas al espacio, tradicionalmente **las actividades de enseñanza** han quedado, en muchos casos, **restringidas exclusivamente a experiencias** de carácter euclidiano; es decir, a aquellas **relativas al mundo de las medidas, las distancias, los ángulos** subsumiéndose allí los **aspectos proyectivos y topológicos** que configuran, en unión con lo euclidiano, el «espacio total» sobre el cual se debe desarrollar nuestra capacidad de ubicación en el espacio”. (Castro Bustamante, 2004, p. 163)

Movimientos Elásticos (espacio topológico)

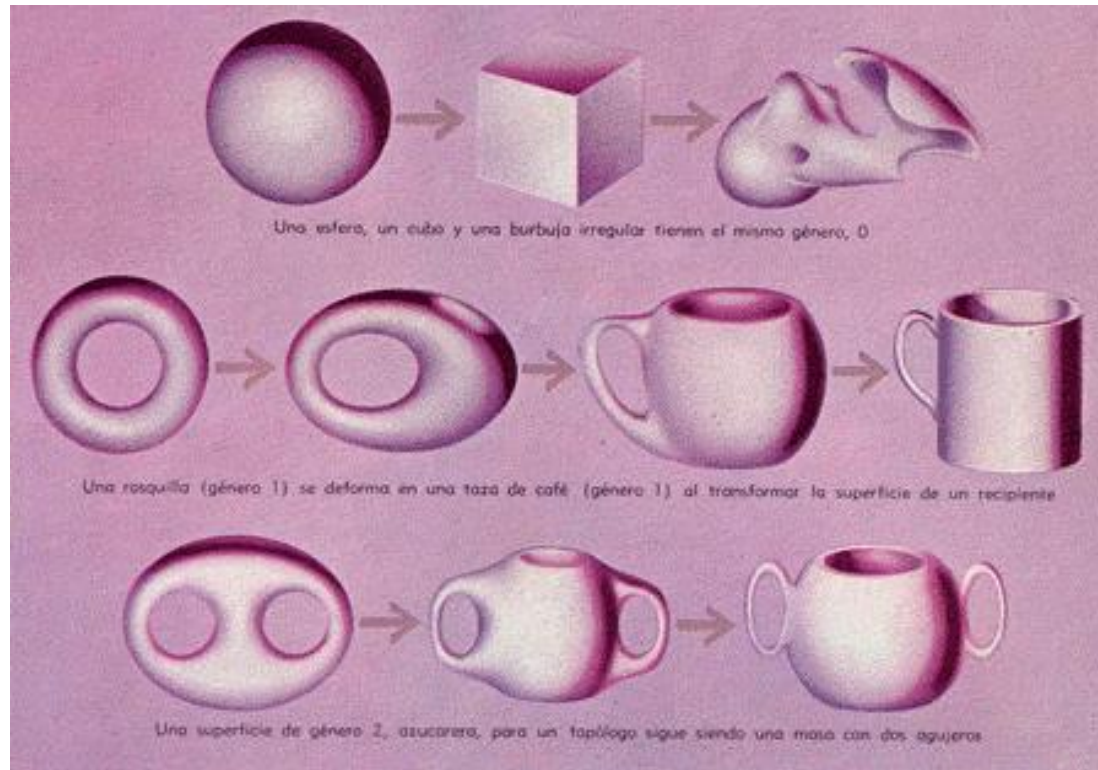
En este tipo de representación, las transformaciones características son las bicontinuas. Generan cambios tan profundos y generales que alteran los ángulos, las longitudes, las rectas, las áreas, los volúmenes, los puntos, las proporciones; no obstante, a pesar de ello algunas **relaciones o propiedades geométricas permanecen invariables**. ¿Cuáles? (completar con Gómez García)

- Dentro/fuera
- Cerrado/abierto
- Continuidad/discontinuidad
- Relación del orden a lo largo de la trayectoria
- Intersección de 2 objetos

Movimientos elásticos



Movimientos elásticos



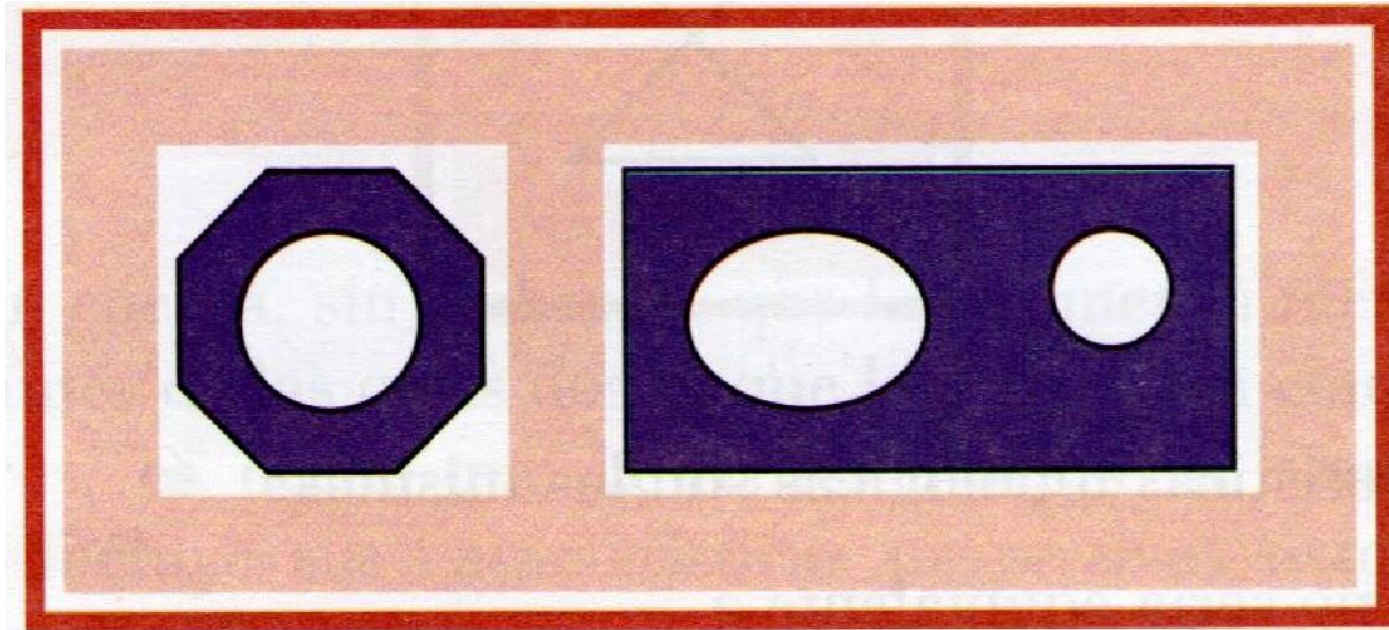
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mug_and_Torus_morph.gif

REALIZANDO TRANSFORMACIONES

En las tres filas de variaciones topológicas de arriba, los objetos pueden transformarse uno en el otro al retorcerlos, doblarlos o darles otra forma. Pero una esfera no podría transformarse en rosquilla o una jarra para leche en un cubo, sin hacer o eliminar un agujero.





Movimientos elásticos




¿Son topológicamente equivalentes? ¿Por qué? Dibuja otras figuras equivalentes a éstas y otras que no lo sean



No lo són, pues la de la derecha posee 2 regiones interiores, y no puedes obtener la segunda imagen a partir de la primera mediante estiramiento o doblez

Vamos a definir y explicar las principales relaciones topológicas básicas. Posteriormente veremos cómo se trabajan en el aula.

Abierto, cerrado	<p>Una línea es abierta si tiene dos extremos (puntos que tienen vecinos por un lado solamente).</p> <p>Una línea es cerrada si no tiene extremos.</p>	
Simple, compleja	<p>Una línea es simple si no tiene nudos (puntos por donde la línea pasa más de una vez)</p> <p>Una línea es compleja si los tiene.</p>	
Continuo, discontinuo	<p>Una línea es continua si se puede recorrer sin levantar el lápiz.</p> <p>Una línea es discontinua en caso contrario.</p>	
Dentro (interior), fuera (exterior), frontera	<p>Una línea cerrada delimita dos regiones, y esa línea que las separa se llama frontera.</p> <p>Un punto A está dentro (es interior) si está rodeado por la línea, y B está fuera (es exterior) si no está rodeado.</p>	
	<p>Un punto es interior si al trazar cualquier semirrecta que salga de él, corta a la frontera un número impar de veces.</p> <p>Un punto es exterior si corta un número par de veces.</p>	

Conexo, inconexo	<p>Una figura es conexa si puedo recorrerla entera sin salirme de la misma (si es de un sólo trozo)</p> <p>Un figura es inconexa en caso contrario (varios trozos)</p>	
Simple conexo, no simple conexo.	<p>Una figura es simple conexa si no tiene agujeros.</p> <p>Una figura no es simple conexa en caso contrario.</p>	
	<p>Una figura es simple conexa si al unir dos puntos cualquiera de su frontera, la figura queda dividida en dos.</p> <p>Una figura no es simple conexa en caso contrario.</p>	
Orden, vecino	<p>Dos elementos de una línea son vecinos si entre ellos no hay ningún otro.</p>	
Extremos	<p>Un elemento de una línea es extremos si tiene sólo un vecino.</p>	

Proyecciones y semejanzas (Espacio proyectivo)

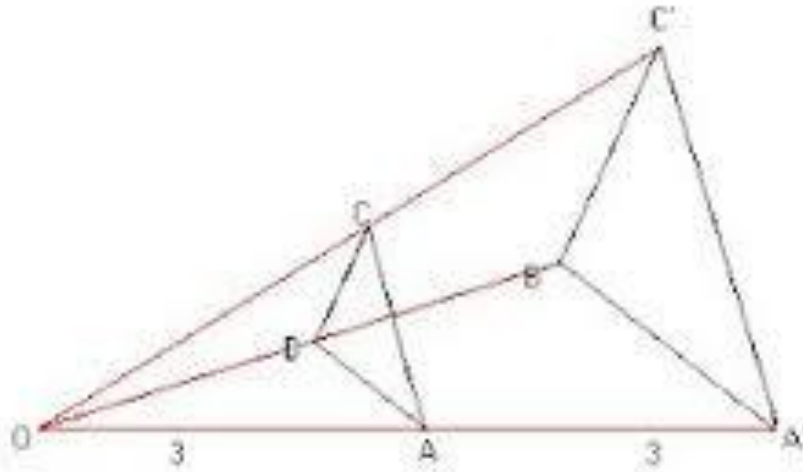
El espacio proyectivo comprende la representación de transformaciones en las cuales las longitudes y los ángulos experimentan cambios que dependen de la posición relativa entre el objeto representado y la fuente que lo plasma.

¿Qué es lo que no cambia?

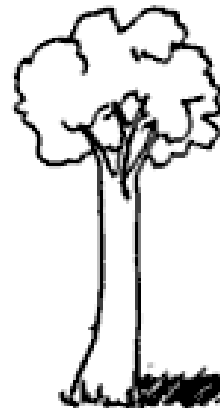
- Proporcionalidad entre líneas y áreas (semejanza)
- La representación de puntos
- Rectitud de las líneas

¿Qué es lo que puede cambiar? la longitud de las líneas y, en función del foco, magnitud de los ángulos y la apariencia.

Proyecciones y semejanzas



Homotecia de centro O y razón 2.



2.4 Posición y orientación

2.4.1 Definición

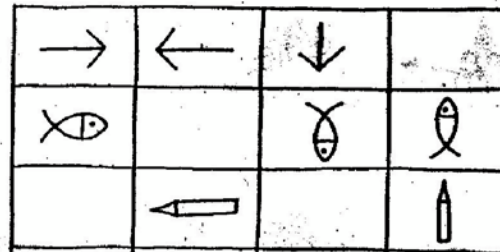
Cuando tratamos de localizar un objeto tenemos que tener en cuenta:

a) Dónde lo colocamos en relación a otros objetos.....POSICIÓN del objeto.

Ejemplo. El plátano está arriba a la izquierda.

b) Cómo (hacia dónde) lo colocamos.....ORIENTACIÓN del objeto.

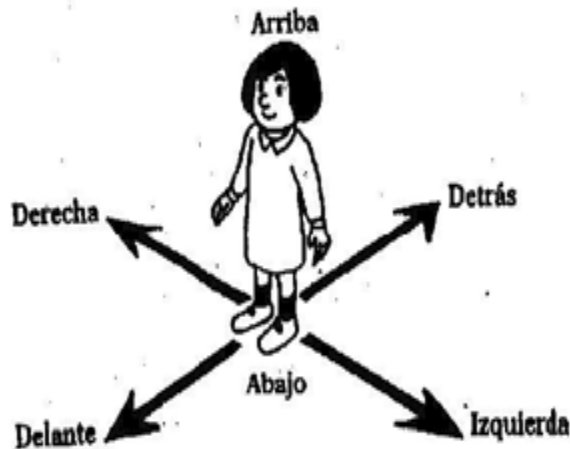
Ejemplo. El primer pez mira para arriba, el tercero para la derecha.






Ambos aspectos varían en función de dónde lo miremos, del punto de nuestra visión, por tanto son proyectivas.

2.4.2 Conceptos y relaciones proyectivos iniciales

El espacio se ordena en tres dimensiones, que se corresponden con los tres ejes de nuestro sistema de referencia habitual (el de Descartes o Cartesiano). Ordenados por esas tres dimensiones estudiaremos los conceptos y relaciones proyectivos.



Ejes de referencia

	Eje	Polo fuerte	Polo débil	Características
	Eje vertical	arriba	abajo	<p>Es el primero en manejarse.</p> <p>Es el eje de “la gravedad”, que afecta a todas las cosas que nos rodean, de ahí su fácil adquisición.</p> <p>Es el eje menos variable, pues se puede considerar que el cielo siempre está arriba y el suelo abajo.</p>
	Eje antero-posterior	delante	detrás	<p>Es el eje relacionado con “la marcha”.</p> <p>Se desarrolla con la capacidad de andar, y el niño asocia fácilmente estos conceptos con andar hacia delante y hacia atrás.</p> <p>Se aprende más tarde porque los ejes horizontales varían mucho según la posición de la persona, lo que está delante puede estar detrás con sólo darnos la vuelta.</p>
	Eje lateral	a un lado derecha	al otro izquierda	<p>Es el más difícil y el último en trabajarse.</p> <p>Es el eje de “la <u>lateralidad</u>”, que se puede dominar el último año de Educación Infantil e incluso después.</p> <p>Inicialmente se trabaja con los lados y posteriormente con los términos derecha e izquierda.</p>

Contrastes

Estos términos no se adquieren por definición, sino por oposición de dos polos opuestos, que es lo que Lapierre y Aucuturier (1985) llaman aprendizaje por contrastes. En este aprendizaje por contrastes están lo que se denominan polos débiles y polos fuertes, que se aprenden a la vez por contraposición de dos términos. El polo fuerte se denomina así porque es más fácil de dominar.

Los conceptos proyectivos iniciales se podrían agrupar de la siguiente forma:

- a) Oposiciones absolutas: las que acabamos de ver.
- b) Oposiciones relativas: por encima de, por debajo de, delante de, detrás de, a la izquierda de, a la derecha de.
- c) Términos relativos: en el centro, alrededor de, al lado de.

2.4.3 Puntos de referencia

El movimiento en el espacio supone servirse de puntos de referencia por los que localizar la posición y la dirección de los objetos. El desarrollo de apreciación espacial está relacionada directamente con la capacidad de usar estos puntos de referencia. Estos puntos de referencia son el punto origen del sistema de referencia.

Fases

La evolución de estos puntos (y por tanto de los sistemas de referencia) se ve marcada por tres fases:

1.-Esquema corporal. El niño en esta etapa localiza y organiza las partes de su cuerpo. Determina que su cabeza está arriba, que tiene una oreja a cada lado, y que los pies están abajo.

2.-Fase egocéntrica. En esta fase el niño localiza objetos que no son de su cuerpo, pero todos los va a localizar y referir respecto a él (a su cuerpo).

Ej. Cuando va a salir por una puerta dirá: “la puerta está delante de mi”

3.-Descentración. Progresivamente el niño va a ir siendo capaz de localizar objetos sin hacer referencia a su cuerpo, sin ser éste el centro de sus referencias.

Ej, Cuando sale por la misma puerta dirá:”la puerta está al lado de la ventana”, incluso “ yo estoy delante de la puerta” (nótese que en este caso es la puerta la referencia para dar su posición).

La geometría euclídea

Tiene su origen en la Grecia antigua y en su afán por establecer un sistema de demostración y razonamiento fundamentado en la «deducción» y en la «formalidad» del pensamiento. Este método busca determinar la verdad de nuevos conceptos, deducidos de otros anteriores que han sido aceptados como conceptos e ideas abstractas absolutamente ciertas.

La Geometría Euclídea, también conocida como «Métrica», trata del estudio y representación de las longitudes, ángulos, áreas y volúmenes como propiedades que permanecen constantes, cuando las figuras representadas son sometidas a transformaciones rígidas (giros, traslaciones y simetrías).

La geometría euclídea

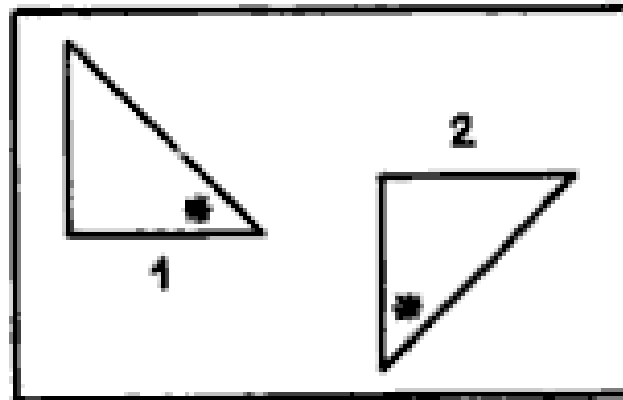
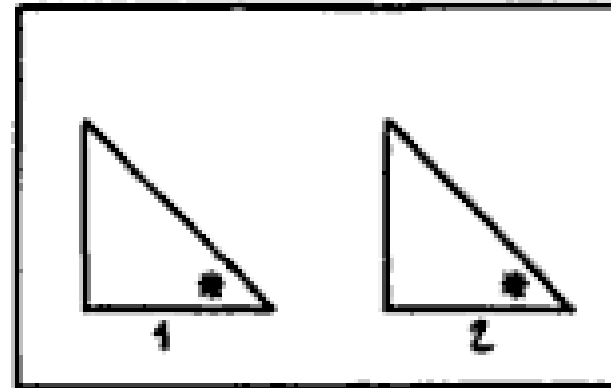
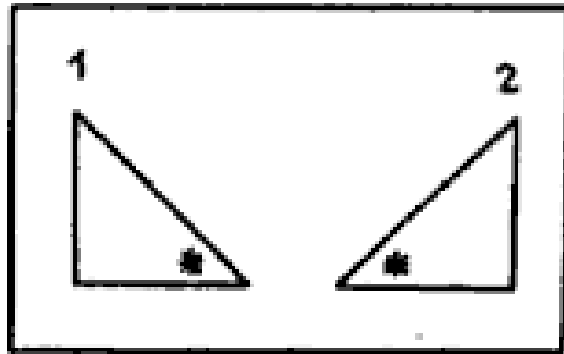
¿Qué es lo que no cambia?

- La medida de segmentos, superficies o volúmenes.
- La medida de ángulos (la perpendicularidad, el paralelismo)
- La forma.

¿Cuáles son las 3 transformaciones rígidas ?

- Simetrías (o reflexiones)
- Traslaciones (o deslizamientos)
- Giros (O rotaciones)

La geometría euclidea



En un estudio realizado con niños de 2 a 7 años para delimitar la capacidad de construir y dibujar formas geométricas planas (Fuson y Murray, 1978) se les presentaban a los niños un círculo, un triángulo, un cuadrado y un rombo en una bolsa para que los palpasen, y se les pedía que los dibujasen en una hoja de papel

Formas a copiar



1. Circulo



4. Cuadrado

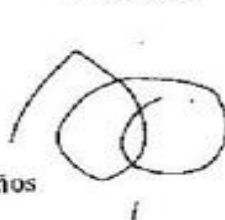


7. Triángulo



9. Rombo

Edad: 1-2 años



1



4



7

—

Edad: 3 años



7

Edad: 4 años



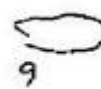
1



4



7

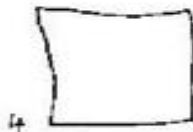


9

Edad: 4 años



1



4



7

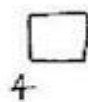


9

Edad: 5 años



1



4



7



9

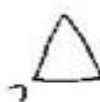
Edad: 7 años



1



4



7



9

¿Pero dónde veo yo todo esto?



No saben ver y no enseñamos a ver...

Estoy esperando el metro y veo este mapa:

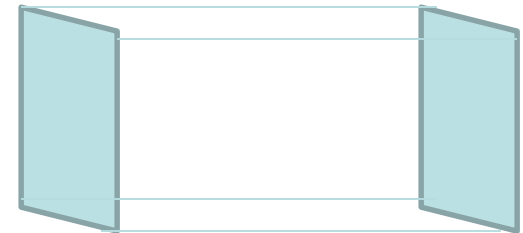
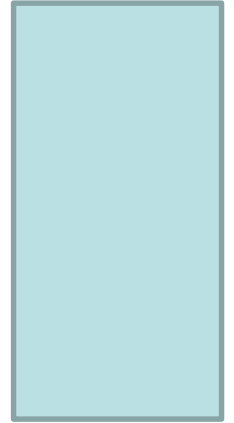
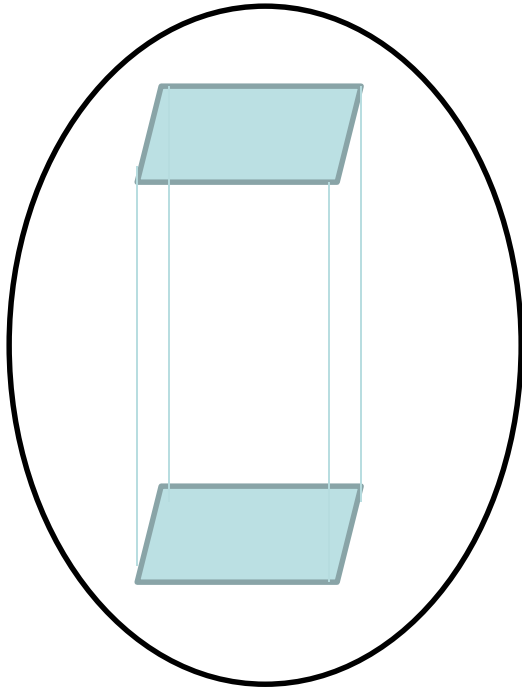


Menos mal que me acompaña mi sombra

¡Vaya! Me ha entrado algo en el ojo. Saco el espejo para mirarme



Proyecciones y semejanzas

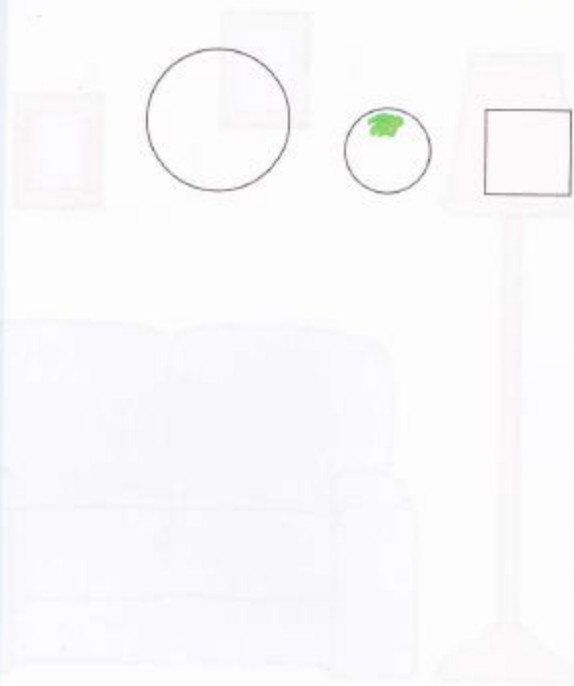


¿Qué figuras son equivalentes al prisma de la izquierda desde....(Geometría T, P y M)?

Vemos algunas fichas de libros
de texto....

¿Seleccionaríais las siguientes
fichas como pertenecientes a
Geometría? ¿Qué geometría?

• Pintar sólo los círculos pequeños.

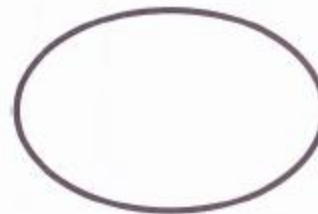




Une y pinta



- Unir cada foto con la huella que dejaría su estampación.
- Pintar cada huella del color indicado en la foto que corresponde.

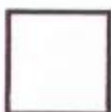
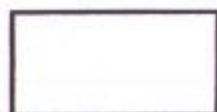
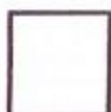
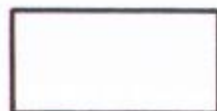


Rodea los objetos cuadrados. Pinta de amarillo los cuadrados de
abajo



Rodea

Rodear en cada fila la forma, el tamaño y el color que tiene el modelo.



BLOQUE 5. Desarrollo del pensamiento geométrico



5.4 Conocimiento de las formas y figuras en infantil (C, A)

5.4.1. Diferenciación entre imagen del concepto y definición del concepto de Tall y Vinner.

5.4.2. El aprendizaje de las formas y figuras. Los niveles de Van Hiele.

5.5. Aprendizaje y enseñanza de las formas y figuras geométricas (Edo, 1999)

5.5.1. Taller de clasificación con el recurso manipulativo de los cuerpos geométricos.

5.6. Conocimientos lógico-matemáticos subyacentes al desarrollo del pensamiento geométrico.

5.4.1 *Imagen del concepto y definición del concepto* (Tall y Vinner (1981))

La mayoría de los profesores tienen la creencia, casi siempre errónea, de que los estudiantes, ante una determinada tarea, basan sus razonamientos en las definiciones formales de los conceptos que han recibido de forma verbal y que las imágenes tienen un papel secundario.

5.4.1 *Imagen del concepto y definición del concepto* (Tall y Vinner (1981))

Suponen una distinción entre el concepto matemático como se define formalmente (**definición del concepto**) y los procesos cognitivos a través de los cuales son concebidos (**imagen del concepto**).

La **imagen del concepto** está asociada a él, e **incluye imágenes mentales y propiedades y procesos asociados**. Se va construyendo a lo largo de la escolaridad y cambia a medida que el alumno se encuentra con nuevos estímulos.

5.4.1 *Imagen del concepto y definición del concepto* (Tall y Vinner (1981))

Lo adecuado es actuar sobre la imagen del concepto para transformar y mejorar la comprensión que el alumno tiene de un determinado concepto.

¿Cómo podemos hacerlo?

¿Qué imágenes del rectángulo he de elegir para que construyan una imagen del rectángulo completa?

Seleccionando

Ejemplos

Contraejemplos

Contienen:

Contienen:

*Atributos
relevantes*

*Atributos
irrelevantes*

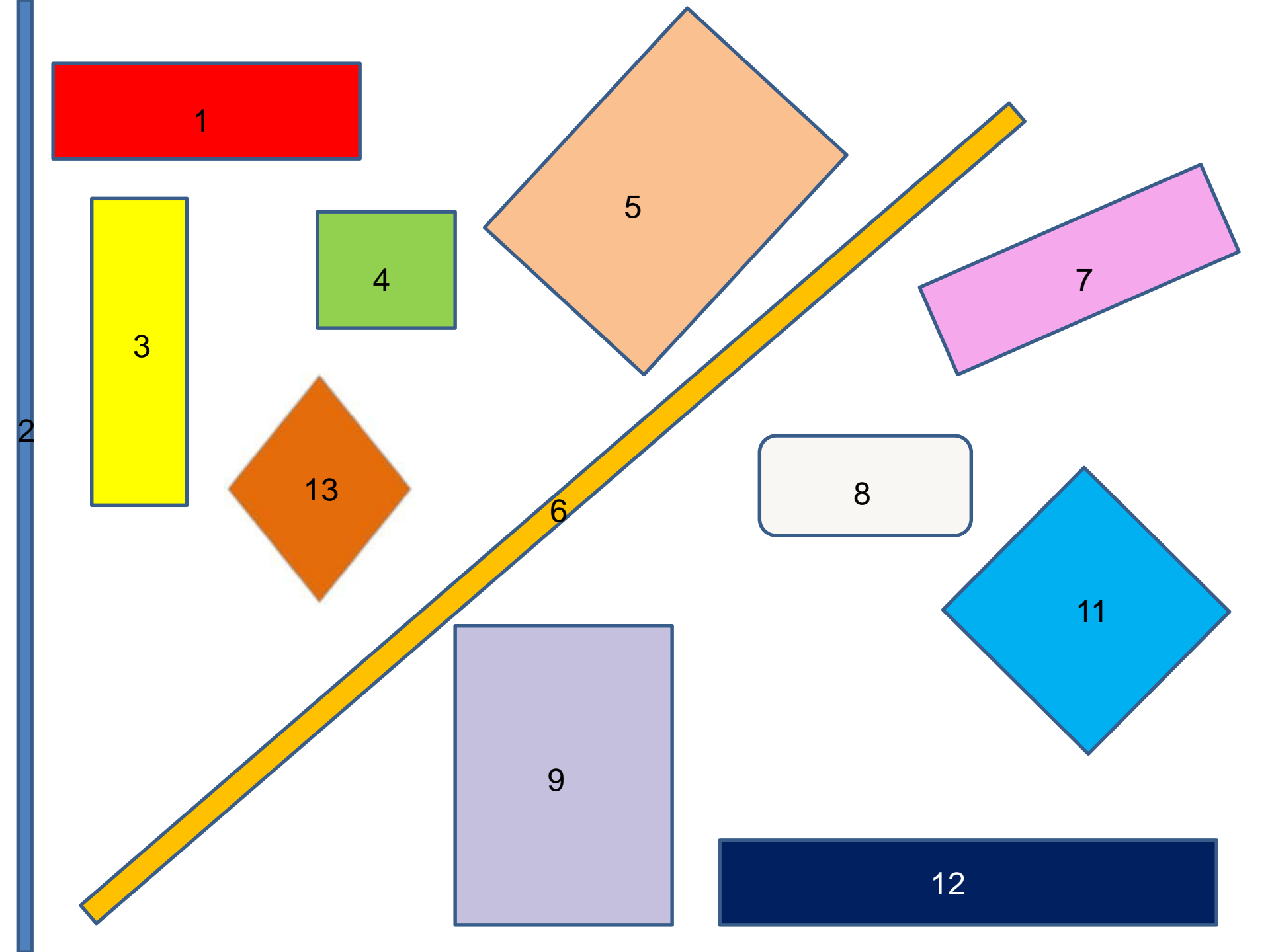
*Atributos
incorrectos*

Propiedades que
definen al concepto.
Permiten construir
una definición

Propiedades no necesarias,
que diferencian a los
ejemplos. Evitar que los
ejemplos seleccionados los
conviertan en relevantes

Ver
taller

AAD: Definición de rectángulo y selección de ejemplos potentes



AAD: Definición de rectángulo y selección de ejemplos potentes

1. ¿Qué imágenes son rectángulos?
¿Cuáles no lo son y por qué?
2. Identifica atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos
3. Construye una definición de rectángulo que sea correcta matemáticamente.
4. ¿Cómo valoras las siguientes definiciones?

Algunas definiciones encontradas en internet para rectángulo

- Figura geométrica de cuatro lados de dos longitudes distintas (de la misma longitud los lados opuestos) que forman cuatro ángulos rectos.
- Es un cuadrilátero, con dos pares de lados paralelos, los cuales forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud.
- Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí.
- Paralelogramo con un ángulo recto

AAD: Definición de rectángulo y selección de ejemplos potentes

5. ¿Modificaríais la definición que elaborasteis en la pregunta 3? En caso afirmativo, razonad vuestra respuesta?

¿Qué imágenes del rectángulo he de elegir para que construyan una imagen del rectángulo correcta?

Atributos relevantes

Atributos irrelevantes (evitar que los ejemplos que pongamos los convierta en relevantes)

Atributos críticos o incorrectos (dan pie a otras figuras)

¿Qué imágenes del rectángulo he de elegir para que construyan una imagen del rectángulo correcta?

Atributos relevantes

Paralelogramo: lados paralelos 2 a 2

Sus cuatro lados forman ángulos rectos entre sí

Atributos irrelevantes (evitar que los ejemplos que pongamos los convierta en relevantes)

-Que la base de mayor longitud tenga que ser horizontal o vertical.

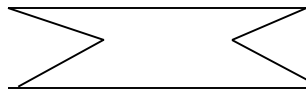
-Que tenga que tener una determinada longitud los lados.

-Lados opuestos misma longitud (elimina a los cuadrados)

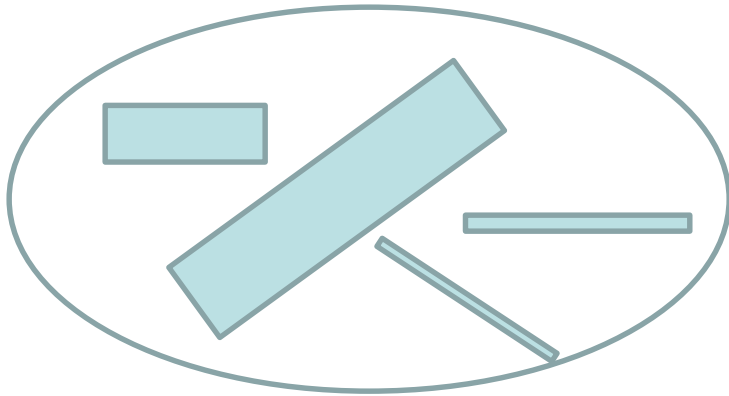
¿Qué imágenes del rectángulo he de elegir para que construyan una imagen del rectángulo correcta?

Atributos críticos o incorrectos (dan pie a otras figuras)

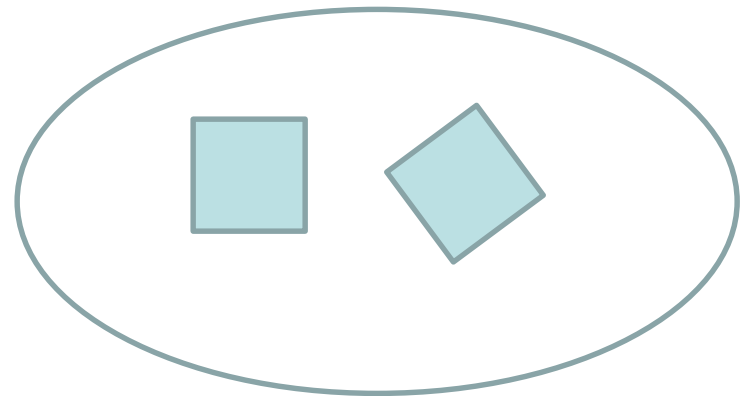
- Que las esquinas sean redondeadas
- Que los ángulos no sean rectos, aunque sus lados sean paralelos 2 a 2 (p. ej. Otros paralelogramos como los rombos o romboides)
- Que solo tenga un par de lados paralelos (p. ej. Trapecios)
- Que tenga un número diferente de lados, incluso con lados paralelos.



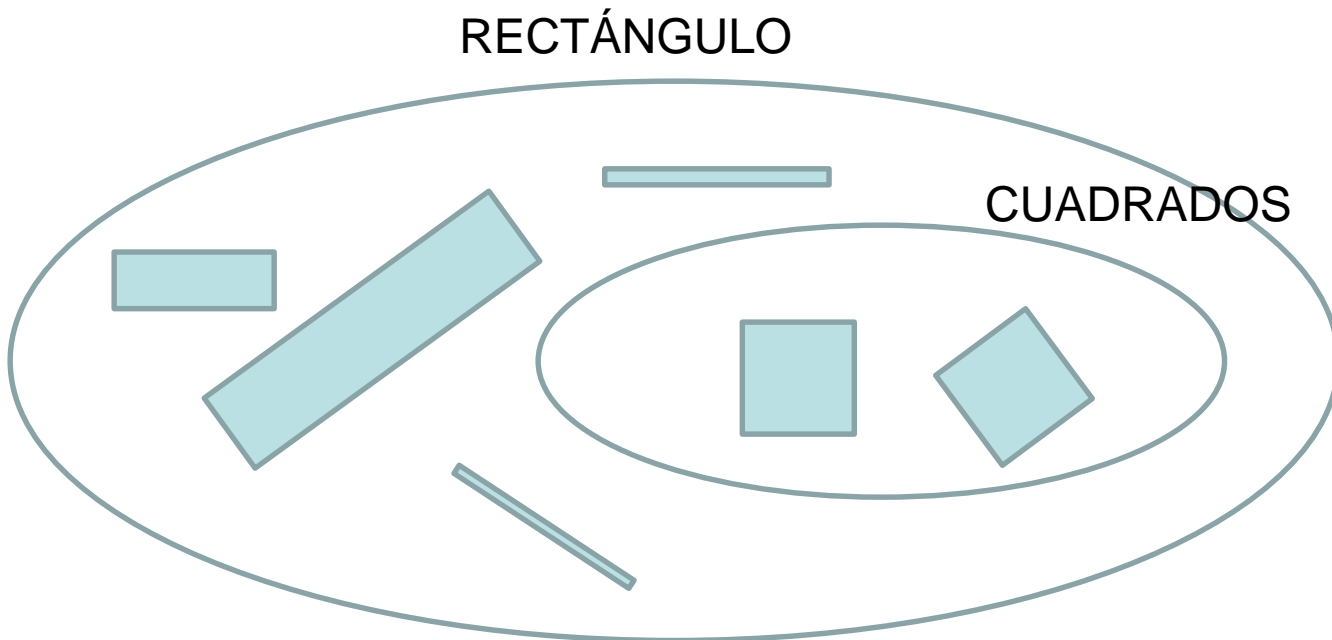
-Etc



RECTÁNGULO



CUADRADOS



RECTÁNGULO

CUADRADOS

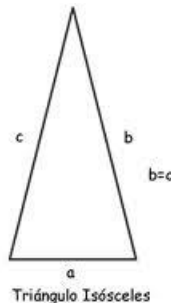
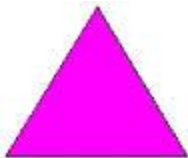
5.4.3. Definiciones exclusivas

➤ Un objeto pertenece a una clase y no a otra. Si hay al menos 2 clases de objetos, estas clases son particiones, es decir, no tienen elementos comunes.

Por ejemplo,

*Definición de Triángulo isósceles: “Triángulo con solo dos lados iguales”

*Definición de Triángulo equilátero: “Triángulo con sus 3 lados iguales”



Equilátero

Isósceles

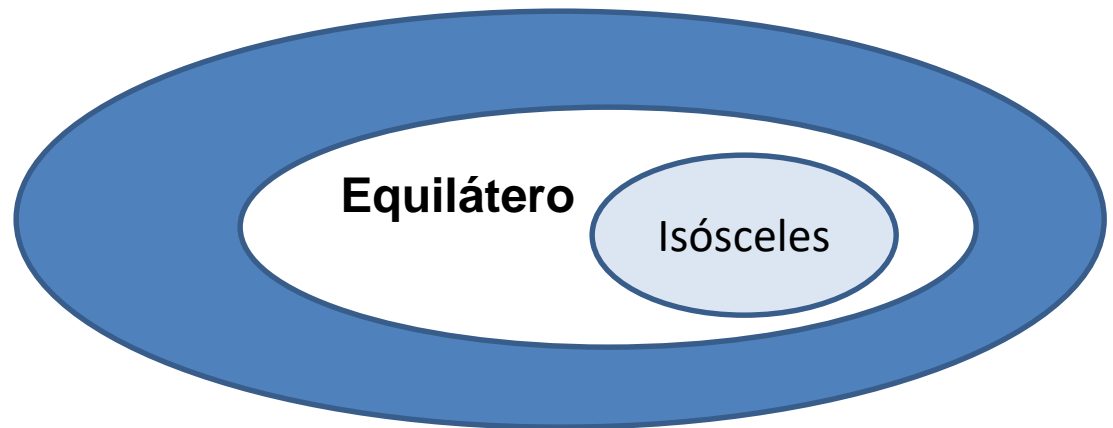
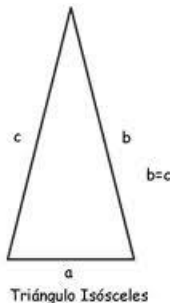
Definiciones inclusivas

➤ Un objeto de una clase puede pertenecer a otra clase. Hay al menos dos clases de objetos y una está incluida en la otra.

Por ejemplo,

*Definición de Triángulo isósceles: “Triángulo con dos lados iguales”

*Definición de Triángulo equilátero: “Triángulo con 3 lados iguales”



- En todo ello, el lenguaje juega un papel fundamental. A través de las actividades de cada día los niños van construyendo un conocimiento intuitivo y explícito de las figuras geométricas, aún sin haber pasado por la escuela.
- El aprendizaje del vocabulario adecuado pone el acento en las diferencias entre figuras. Así, debe ir acompañado de un análisis de las semejanzas entre figuras.(ej. cuadrado y rectángulo).

5.4.2. El aprendizaje de las formas y figuras. Los niveles de Van Hiele

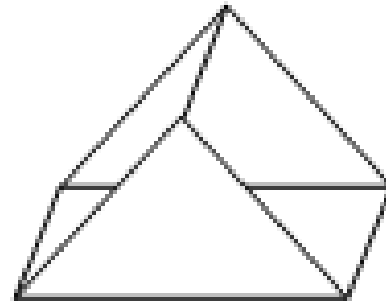
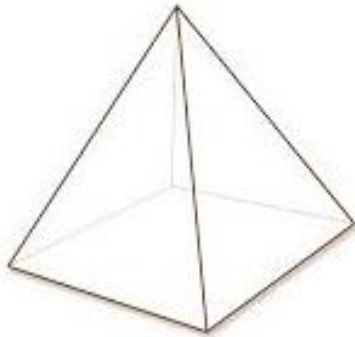
- NIVEL 1: De Reconocimiento (o Visual)
- NIVEL 2: De Análisis (o descriptivo)
- NIVEL 3: De Clasificación (o Deducción informal)
- NIVEL 4: De Deducción formal
- NIVEL 5: Rigor

Nivel 1: De reconocimiento

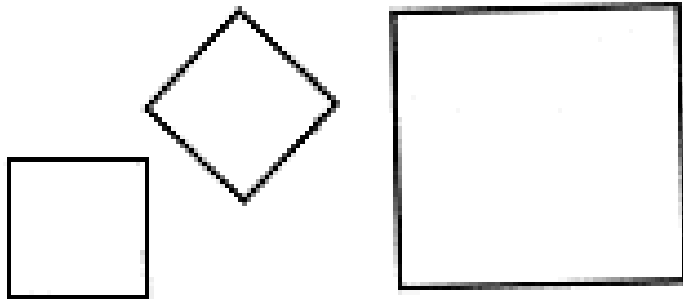
Características

- 1) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
- 2) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una puerta, etc). No se utiliza lenguaje geométrico básico para denominar a las figuras por su nombre correcto.
- 3) No se reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos geométricos.

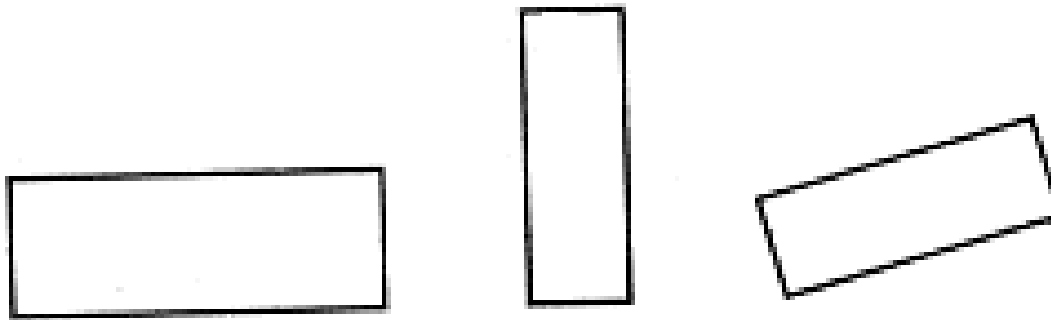
NIVEL 1 (VISUALIZACIÓN): Ejemplo



NIVEL 1 (VISUALIZACIÓN): Ejemplo



(a)



(b)

NIVEL 1 (VISUALIZACIÓN): Ejemplo

A un estudiante en este nivel le sería posible:

- Reconocer que hay cuadrados en (a) y rectángulos en (b), porque son similares en sus formas a cuadrados y rectángulos que ha visto antes.
- Copiar las formas en un geoplano o en un papel, ...

Un estudiante en esta etapa no reconocería explícitamente:

- Que las figuras tienen ángulos rectos o que los lados opuestos son paralelos.

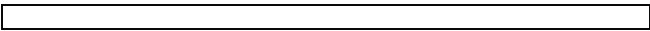
Nivel 1: De reconocimiento

¿Qué pueden hacer?

- Identifica “cuadrados” en un conjunto de recortables u objetos manipulativos.
- Dibuja o construye figuras con instrumentos: rectángulos, paralelas, etc.
- Afirma que un rectángulo “es un cuadrado más estrecho”, “un paralelogramo es un rectángulo inclinado”, “un ángulo es lo formado por las agujas de un reloj”.
- Identifica cuadrados espontáneamente, pero no utiliza la igualdad de lados o sus ángulos rectos.

Nivel 1: De reconocimiento

¿Qué pueden hacer?

- Señala y mide los lados de un cuadrado pero sin generalizar para otros cuadrados.
- No usa espontáneamente cuantificadores como: todos, alguno, cada, ninguno referidos a si tienen determinada propiedad geométrica.
- Las etiquetas están muy ligadas a las imágenes de las figuras con las que el niño ha tenido contacto. Así, es probable que no consiga identificar como rectángulo la siguiente imagen 

Nivel 2: De análisis (o descriptivo)

Características

- 1) Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras, tanto desde la observación como de la experimentación.
- 2) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades, pero no relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Dado que gran parte de las definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades, en este nivel los estudiantes tienen dificultades para elaborarlas.
- 3) Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades, sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

Nivel 2: De análisis

¿Qué pueden hacer?

- Afirma de un cuadrado que es una figura que tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.
- Comprueba que “en un paralelogramo los lados opuestos son paralelos”.
- Señala las semejanzas y diferencias entre cuadrado y rectángulo.
- Inventa un criterio para clasificar cuadriláteros (dos ángulos rectos, pares de lados paralelos, etc.).
- A partir de una malla triangular puede descubrir la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Nivel 2: De análisis

¿Qué pueden hacer?

- Puede calcular el área de un triángulo rectángulo a partir de la del rectángulo.
- Identifica propiedades en paralelogramos pero no identifica el conjunto de propiedades necesarias para definirlo.
- Después de descubrir en una malla triangular que los ángulos de un triángulo suman 180° , no generaliza el resultado para todo triángulo rectángulo.

Nivel 3: De clasificación(o deducción informal)

Características

- 1) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes. Conlleva entender el significado de las definiciones.
- 2) Se realizan clasificaciones lógicas de manera formal. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.
- 3) Se siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no se entienden sus estructuras. Esta carencia impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.

Nivel 3: De clasificación(o deducción informal)

Un ejemplo

Los estudiantes en este nivel **podrían**:

- Establecer interrelaciones en las figuras (por ejemplo, en un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales) y entre las figuras (por ejemplo, un cuadrado es un rectángulo porque tienen todas sus propiedades)
- Deducir (de manera informal) propiedades de una figura y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases → La definición adquiere significado

Sin embargo, en este nivel **no comprenden**:

- El significado de la deducción como un todo ni el rol de los axiomas.

Nivel 4: De deducción formal

Características

- 1) En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.
- 2) Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas.
- 3) Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas forma de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Nivel 4: De deducción formal

¿Qué pueden hacer?

- Identifican las propiedades suficientes para definir un paralelogramo.
- Prueban, de forma rigurosa, que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° .
- Comparan demostraciones alternativas del teorema de Pitágoras.
- Demuestra teoremas relativos a rectas paralelas cortadas por una secante.
- No examinan la independencia, consecuencias o validez de un conjunto de axiomas.

Nivel 5: De rigor

Características

- 1) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
- 2) Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.
- En este nivel un estudiante:
 - Establece teoremas en diferentes sistemas axiomáticos.
 - Compara sistemas axiomáticos (Geometría euclidiana /Geometría no-euclidiana).
 - Establece la consistencia de un sistema de axiomas, la independencia de un axioma o la equivalencia de distintos conjuntos de axiomas.

Especificación de la teoría de Van Hiele

Clements y Battista (1992) enriquecieron la teoría de van Hiele's, sugiriendo un sexto nivel de pensamiento más primitivo que el de visualización. En el **nivel de “pre-reconocimiento (*pre-recognition*)** los niños perciben las formas geométricas **atendiendo solo a una parte de las características de las formas**: “[...](*Los niños*) *pueden distinguir entre figuras que son curvilíneas y aquéllas que son rectilíneas pero no entre figuras que pertenecen a la misma clase; es decir, pueden diferenciar entre un cuadrado y un círculo, pero no entre un cuadrado y un triángulo*” (Clements & Battista, 1992, p. 429).

Koleza, E. y Giannisi, P. (2015). KINDERGARTEN CHILDREN'S REASONING ABOUT BASIC GEOMETRIC SHAPES, CERME8.

5.5. Enseñanza de las formas y figuras geométricas (Edo, 1999)

- Aproximación a la geometría a través de objetos reales y tridimensionales.

La observación y reconocimiento de figuras planas debe realizarse a partir de figuras geométricas tridimensionales.

- Estructurar la geometría a partir de los procedimientos matemáticos

“comparamos objetos según la forma, agrupamos, clasificamos, reconstruimos, reproducimos o explicamos”. Priorizar los procedimientos para llegar a través de ellos a los conceptos.

5.5. Enseñanza de las formas y figuras geométricas (Edo, 1999)

- Elaborar programaciones cíclicas

Los contenidos deben tratarse en diversos momentos a lo largo de todos los cursos de la etapa con algunos cambios, ya sea mediante combinaciones diversas, ya sea incorporando nuevas nociones o añadiendo procedimientos avanzados

5.5. Enseñanza de las formas y figuras geométricas (Edo, 1999)

- Alternar actividades de “reconocimiento visual” con otras de “inicio de análisis de cualidades y propiedades.

1. Si esto es un triángulo, y esto y esto también; sin embargo esto no...

¿Por qué éstos son triángulos?, ¿cómo lo sabes?, ¿qué tienen igual? Construye algunos triángulos más. ¿Por qué éste no es un triángulo?, ¿qué tiene distinto?

Actividad
Pinta los triángulos

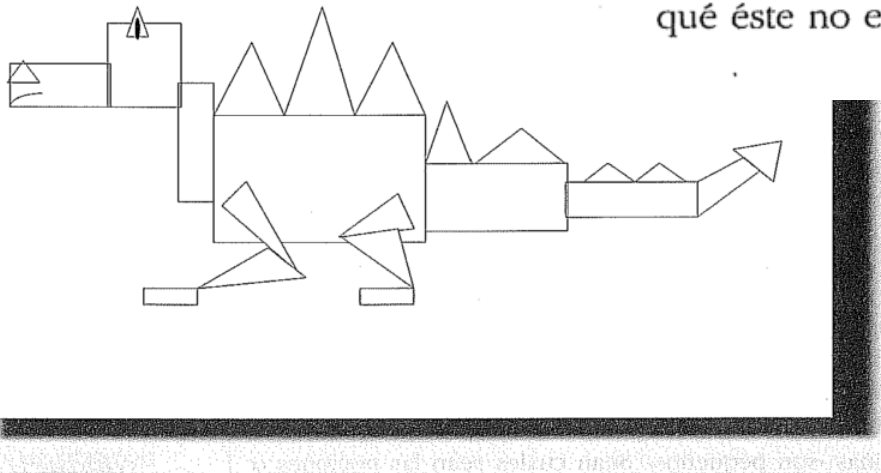


Figura 1. Actividad de reconocimiento visual un tanto especial, ya que presenta distintos modelos del concepto triángulo. ¿Por qué la mayoría de niños y niñas de parvulario sólo reconocen el «triángulo» como tal cuanto éste es equilátero?, ¿un único modelo facilita o dificulta el aprendizaje del concepto?

5.5. Enseñanza de las formas y figuras geométricas (Edo, 1999)

- Alternar actividades de “reconocimiento visual” con otras de “inicio de análisis de cualidades y propiedades.

*“Desde la matemática, es más interesante que un niño llegue a describir que ‘todas estas figuras **son triángulos porque tienen tres lados**, pero que hay triángulos **de distinta forma, tamaño, color**, etc, que solo sepa reconocer y nombrar visualmente un gran número de figuras planas”*

5.5. Enseñanza de las formas y figuras geométricas (Edo, 1999)

- Tener una “actitud geométrica” delante de situaciones habituales.

Se proporciona a los alumnos piezas con forma de cubo, de cilindro y algunos objetos esféricos

- ¿todas las piezas sirven igual para apilar?
- ¿Podréis hacer una torre con las bolas?
- ¿Hay piezas que se aguantarán bien aunque las coloquéis en cualquier posición?

Conclusiones :

- Las piezas con todas las caras planas son las que se apilan bien en cualquier posición
- Las piezas cilíndricas solo se apilan bien si se apoyan en sus caras planas
- Las bolas no van bien para apilar porque no tienen caras planas

5.5. Enseñanza de las formas y figuras geométricas (Edo, 1999)

- Utilizar la terminología geométrica correcta, coexistiendo con el vocabulario natural propio de la edad
- Transmitir una forma de ‘mirar’ el entorno que ayude a construir conceptos geométricos a la vez que desarrolle sentimientos estéticos.

5.6. Conocimientos lógico-matemáticos subyacentes al desarrollo del pensamiento geométrico

- ¿Seriación?
- ¿Designación?
- ¿Centración/decantación?
- ¿Clasificación?

Y procesos matemáticos asociados:
identificación, comparación