

5.4. Explicitar procesos en la actividad matemática

En este capítulo se ha utilizado la prueba en matemáticas como un ejemplo de los diferentes aspectos de la actividad matemática que debemos ser capaces de explicitar. Además se ha intentando mostrar que no existe una apariencia monolítica de la actividad de probar. En este sentido los ejemplos propuestos pueden ser considerados como muestras de que el "hacer matemáticas", para personas que no son matemáticos, tiene unas características diferentes de la simple aplicación de algoritmos o recetas en la resolución de ejercicios. Es decir, para hablar de justificación en matemáticas a través de una prueba o demostración hay que considerar el contexto en el cual se está realizando la actividad matemática. En ese sentido, la idea de justificar algo tiene significados diferentes para los alumnos de Primaria, los alumnos de Secundaria y Bachillerato, los estudiantes para profesores de Primaria, para un matemático profesional o para un filósofo de las Matemáticas dedicado a la Lógica Formal. Vinculado con esta relación debemos colocar el significado dado a la noción de formalización y al papel desempeñado por la actividad de comunicar (oral o de manera escrita) en matemáticas.

6

Primeros conceptos numéricos

Enrique Castro
Encarnación Castro

En las actividades cotidianas de los seres humanos aparecen implicados frecuentemente los números y las operaciones entre ellos. Los números permiten codificar, tratar y transmitir información de manera fácil y concisa, siendo un medio de expresión y comunicación, de ahí su importante presencia en las situaciones cotidianas. No es extraño, pues, que los niños lleguen a la escuela con una serie de experiencias vividas y de información relacionadas con la aritmética que han obtenido de su entorno familiar y social. Un objetivo escolar debe ser ampliar y completar esas experiencias e informaciones previas de los alumnos, de manera que lleguen a conocer los distintos significados de los números y las operaciones, sus distintos usos y aplicaciones, así como la manera de representarlos y operar con ellos. Surge así la necesidad curricular de explicitar y conocer cuáles son los distintos significados que tienen los números y las operaciones, las formas distintas mediante las que se representan los números, las distintas situaciones en las que se emplean las operaciones para resolver problemas y los distintos algoritmos que permiten realizar cada operación. En este capítulo se van a tratar los distintos significados y usos del número natural.

Actividad 6.1. Cita tres ejemplos de la vida cotidiana en los que se empleen los números naturales.

6.1. Usos del número

En la vida real se emplean los números con distintas finalidades y de diversas formas; he aquí algunas de ellas:

A) Secuencia verbal

En determinadas ocasiones, los números naturales se suelen recitar en su orden habitual: uno, dos, tres, cuatro...) sin referirlos a ningún ente u objeto externo. Este recitado de la secuencia numérica se suele emplear con distintas finalidades:

- cuando se quiere practicar con la finalidad de aprender la serie de los números,
- para cronometrar el tiempo (p. ej., diciendo los números hasta 30 en el juego del escondite),
- atraer la atención de los demás,
- como una componente para la cuantificación cuando queremos hallar el cardinal, el ordinal y la medida, así como para efectuar operaciones (sumar, restar, multiplicar y dividir).

B) Recuento

El uso del número en el recuento incorpora una exigencia adicional al mero recitado de la secuencia numérica: cada número se asocia con un elemento de un conjunto (o colección) de objetos discretos. En la vida real ambos contextos están identificados con el contar, pero desde un punto de vista didáctico, importa resaltar esta diferencia, puesto que el contexto de contar conlleva el correcto empleo de la correspondencia biunívoca que a cada número asocia un objeto. Cuando asociamos cada término de la secuencia numérica con los objetos de una colección decimos que estamos contando ese conjunto de objetos. Cuando los objetos que se cuentan están fijos la correspondencia biunívoca se establece recitando la secuencia numérica al par que se va señalando un objeto por cada número recitado. En objetos que no estén fijados a una posición, la acción de señalar se puede sustituir por trasladar al objeto que se cuenta del montón de los no contados al de los contados.

C) Cardinal

Si consideramos una colección de objetos y queremos responder a la pregunta de cuántos hay, hacemos uso del significado cardinal del número. Se utiliza el significado cardinal del número natural para designar el "tamaño" de un conjunto.

El lenguaje natural dispone de palabras especiales para indicar los cardinales en determinadas situaciones: dúo, trío, cuarteto... (en música); gemelos, trillizos, cuatrillizos... (en natalidad); doble, triple, cuádruple...; par, terna, cuaterna...; etc.

D) Medida

Los números naturales se emplean también para expresar el resultado de una medida. Por ejemplo:

- He engordado 3 kg. en 20 días.
- La habitación tiene 4 metros de largo y 3 metros de ancho. Tiene una superficie de 12 metros cuadrados.
- He gastado 5 litros de aceite.

Cuando se mide un objeto o un evento empleando una unidad de medida, se utilizan los números naturales para expresar el resultado de la medición en los casos en que la unidad de medida esté contenida un número exacto de veces en la cantidad que se mide. Esto ocurre en la medida de magnitudes continuas como la longitud, superficie, volumen, capacidad, peso, tiempo, etc. y nos permite responder a la pregunta de cuántas unidades hay (figura 6.1).



Figura 6.1. El número como medida.

Los instrumentos de medida como la cinta métrica, el reloj o el cuentakilómetros incorporan los números naturales. Esto ocurre en todas las escalas de medida, en las que las unidades aparecen marcadas por números. Hay escalas directas (para longitud) o indirectas (temperatura).

Dentro de las escalas indirectas, la medida del tiempo con el reloj reviste connotaciones especiales, entre las que destaca el que periódicamente, cada doce o veinticuatro horas, se renueva el origen. Esto lleva implícito el concepto modular del número. Las operaciones de medida que den resultados superiores a doce tendrán que dividirse por el módulo doce y el resto de la división entera expresa la hora. Otra utilización indirecta de los números como medida aparece en las etiquetas que muestran las tallas de la ropa o los zapatos, o los diferentes tamaños de algunos utensilios que se fabrican para uso cotidiano.

Los números como cardinales y como medidas son semejantes en el hecho de que en los dos casos se describe una cantidad de unidades de algún tipo.

E) Ordinal

Cuando un conjunto de objetos puede ser ordenado linealmente de tal manera que podemos asociar el número 1 con el primer elemento, el número 2 al siguiente, y así sucesivamente hasta acabar los elementos, es posible contestar a preguntas tales como ¿qué posición ocupa?, referida a uno de los elementos de la serie, o ¿cuál de ellos? Éste es el uso *ordinal* del número, que se refiere a la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y totalmente ordenado en el que se ha tomado uno de los elementos como inicial. El uso ordinal del número depende del orden establecido.

El número que se utiliza para numerar las páginas de los libros o para indicar el puesto en el que ha quedado un equipo en una competición son ejemplos de uso ordinal del número.

Para expresar los números ordinales se emplea la terminología propia de los ordinales: primero (1.º), segundo (2.º), etc., o bien se hace referencia a la posición empleando los nombres de los números: por ejemplo, el ciclista está en el puesto veinte.

Actividad 6.2. Haz una lista con los términos ordinales de los cien primeros números.

Para hallar el ordinal de un elemento se pueden seguir los procedimientos usados en contextos cardinales: subitizar, contar, operar. Si sólo se requiere una posición aproximada también se pueden utilizar las técnicas de estimación. Se suele designar $n(A)$ al cardinal de la colección A , indica el número de elementos que tiene dicha colección.

El procedimiento de contar para hallar el ordinal exige requisitos adicionales a los utilizados para obtener el cardinal de un conjunto: se ha de empezar por el elemento designado como el primero y respetar el orden de los elementos al asignar la secuencia numérica. Mientras que el cardinal no depende del orden en el que contamos los elementos, el ordinal está ligado al orden preestablecido entre los mismos.

F) Códigos

En ocasiones se les colocan etiquetas a los elementos de un conjunto para diferenciarlos o clasificarlos. Los símbolos que se pueden utilizar para etiquetar son variados: letras del alfabeto, figuras geométricas, códigos de barras y, por qué no, los sím-

bolos numéricos. Cada uno de ellos se asignará a un elemento distinto. Los números se usan también para identificar a los elementos de un conjunto. En este caso se utilizan como etiquetas o códigos identificativos que diferencian a unos elementos de otros. Ejemplos de este uso son los dorsales de los jugadores de fútbol, los números de teléfono, etc.

Las ventajas de utilizar los símbolos numéricos vienen de que ocupan poco espacio, se identifican rápidamente, son fáciles de nombrar y de escribir y, quizás la más importante: si la asignación se hace siguiendo la serie numérica nos permitirá contar las clases y ordenarlas.

Los códigos numéricos se utilizan, en determinados casos, conjuntamente con otros códigos: en las matrículas de los coches se emplean junto con letras del alfabeto. En las direcciones postales se emplean junto con los ordinales y códigos alfabéticos: C/ Recogidas, n.º 3, 7.º, puerta B, Código Postal 18012. Granada.

G) El número como tecla

En un contexto de tecla el número está asociado con un resorte diferenciado, que hay que accionar físicamente para su utilización. Están representados solamente los números de 0 a 9, y con ellos se pueden componer los demás, hasta un límite normalmente comprendido entre 8 y 12 dígitos, y que depende del aparato. Esto lleva implícito que cuando se pulsa una tecla el número correspondiente puede tener un valor absoluto o relativo. Absoluto cuando es el único, o el último que se pulsa; relativo en los restantes casos.



Figura 6.2. El número como tecla.

Suele haber dos tipos de teclados numéricos: uno lineal, como los que llevan en la parte superior las máquinas de escribir; otro en forma de matriz o rectángulo, como el que llevan las calculadoras. El teclado numérico lineal suele tener asignada la función de número como "signo a imprimir". El otro tipo suele desempeñar diversas fun-

ciones, como efectuar cálculos en el caso de las calculadoras, realizar funciones de edición en algunos tratamientos de texto, o marcar números en el teléfono.

Hay aparatos que llevan incorporados ambos tipos de teclas, como en los ordenadores, y otros que incorporan uno u otro opcionalmente.

El uso del número como tecla tiene su reflejo y mayor fuente de aplicación en las calculadoras de bolsillo y ordenadores personales. Todos nos hemos preguntado, al utilizar por primera vez la calculadora e ir a introducir un número de varias cifras, si después de teclear el primero el segundo aparecería a la izquierda o a la derecha del anterior. Esto puede ocasionar dificultades reales a niños con deficiencias numéricas o perceptivas.

6.2. Emparejar

¿Cómo podemos decidir si en un aula hay asientos suficientes para todos los alumnos sin contar los alumnos ni los asientos? Hay situaciones en que sólo se necesita determinar el tamaño de un conjunto, y otras como la anterior, en las que comparamos los tamaños de dos colecciones. Se trata en este caso de decidir si los dos conjuntos, el de los asientos y el de los alumnos, tienen el mismo tamaño, o si el tamaño o la numerosidad de uno es mayor o menor que la del otro.

Si los conjuntos tienen pocos elementos la comparación se puede realizar perceptualmente. Este procedimiento falla para conjuntos en los que no podemos percibir su numerosidad. En este caso, para responder a la pregunta anterior se puede recurrir al emparejamiento de objetos. Cada alumno se coloca en un asiento y observamos si sobran o faltan asientos. Si no queda ningún asiento libre ni ningún alumno de pie, el conjunto de los alumnos y el de los asientos tienen el mismo tamaño, son equivalentes.

Cuando se establece un emparejamiento entre los elementos de dos conjuntos de tal manera que no hay elementos sin emparejar, se dice que entre ellos se ha establecido una correspondencia uno a uno o aplicación biyectiva.

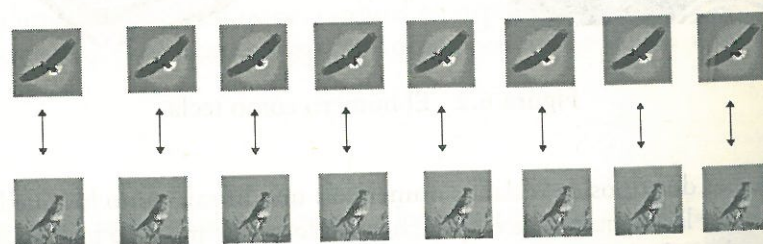


Figura 6.3. Emparejamiento.

Entre la colección de águilas y la de jilgueros se puede establecer un emparejamiento o correspondencia biunívoca de tal manera que a cada águila le corresponde un jilguero y a la inversa. En este caso sabemos, sin necesidad de contarlas, que hay el mismo número de águilas que de jilgueros, y que por lo tanto las dos colecciones tienen el mismo cardinal.

Actividad 6.3. Realiza emparejamientos distintos entre los elementos del conjunto $A = \{a, b, c\}$ y los elementos del conjunto $B = \{m, n, p\}$

Como A y B, en la actividad anterior, tienen el mismo número de elementos se puede escribir simbólicamente $n(A) = n(B)$.

Los pueblos primitivos hacían uso de la idea de emparejar objetos con distintos fines. Un pastor podía llevar el control del número de sus ovejas estableciendo un emparejamiento de cada oveja con un guijarro, con lo que puede decirle a otra persona: "Tengo tantas ovejas como guijarros hay en este montón". Un cazador podría expresar el número de piezas abatidas diciendo que habían cazado tantas como los dedos de su mano. Los trabajadores eventuales que tachan los días que trabajan sobre los días correspondientes del almanaque hacen uso de la idea de emparejamiento para llevar la cuenta de los días trabajados.

Los niños tienen también muchas oportunidades para practicar la asociación o emparejamiento de objetos. Cada zapato con un pie, cada taza con un plato, emparejan los dedos de la mano izquierda con los de la derecha, cada cromó con su lugar en el álbum, etc.

En general, para comparar el tamaño de dos conjuntos y decidir si tienen igual cardinal, o el cardinal de uno es mayor que el del otro, se utilizan las correspondencias uno a uno, si los dos conjuntos tienen el mismo tamaño, no faltan ni sobran elementos por emparejar y podemos establecer una aplicación biyectiva entre los dos conjuntos. El concepto primitivo de correspondencia uno a uno o aplicación biyectiva entre conjuntos conduce a la relación entre conjuntos "tener tantos como", que está en la base del concepto de cardinal.

Si entre dos conjuntos se puede establecer una aplicación biyectiva, cada conjunto tiene tantos elementos como el otro. Si esto ocurre los dos conjuntos tienen el mismo cardinal.

El cardinal es la propiedad que tienen en común todos los conjuntos entre los que se puede establecer una aplicación biyectiva.

Consideremos los conjuntos $\{a, b\}$, $\{+, x\}$, $\{\#, \$\}$, $\{m, n\}$, $\{\odot, \square\}$. ¿Qué tienen en común estos conjuntos? Puesto que se pueden poner en correspondencia uno a uno,

tienen el mismo tamaño, es decir, el mismo cardinal. En este caso los conjuntos citados tienen todos dos elementos.

Desde los tiempos primitivos se vio la necesidad de simplificar la forma de representar los cardinales de los conjuntos. El pastor que controlaba el número de sus ovejas con una bolsa equivalente de piedras, pudo descubrir que era más cómodo utilizar una incisión en un palo por cada oveja. Para representar el número cinco haría /////.

Actualmente, para comunicar la idea de cardinal se utilizan palabras y símbolos especiales. Para representar el cardinal o la propiedad común del conjunto de dedos de una mano, de dedos en el pie, de las vocales, del conjunto de puntas de esta estrella ☆, y de otros muchos más conjuntos, se utilizan las palabras *cinco* (español), *cing* (francés), *five* (inglés), y otras. Las palabras son diferentes pero el número es el mismo. Asimismo se utilizan los símbolos 5, V, llamados símbolos numéricos o numerales.

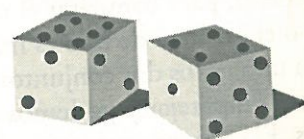
Los niños deben aprender a asociar el nombre y el símbolo correspondiente a un cardinal con conjuntos que tengan esa propiedad.

Materiales y recursos Juegos de números

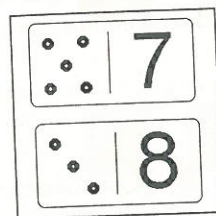
Hay una variedad de juegos en el mercado y que permiten la asociación entre un símbolo numérico, la expresión verbal del mismo y el cardinal de un conjunto; algunos son de fácil construcción incluso por los propios niños. Algunos de ellos: números de lija, números recortados en materiales plásticos, tablillas de números, encajes, puzzles numéricos, placas multibase, dominós, dados, cartas. También hay canciones que pueden utilizarse para recitar la serie numérica.



Materiales y recursos



Dominó de números



El dominó de números permite realizar prácticas de asociar numerales con un conjunto de puntos. El material está formado por una colección de fichas que contiene un numeral del 0 a 9 en un lado y un conjunto de puntos en el otro. Las posibles uniones de fichas son: conjunto de puntos con el mismo conjunto de puntos, numeral con numeral, y un conjunto de puntos con el numeral correspondiente. Las demás reglas son similares al juego clásico del dominó.

6.3. Ordenar

Con las correspondencias uno a uno podemos establecer no sólo si dos conjuntos tienen el mismo tamaño, también obtenemos si uno tiene más o menos elementos que otro. Si comparamos los conjuntos $\{a,b\}$ y $\{a,b,c,d,e\}$ podemos decir que el tamaño de $\{a,b\}$ es menor que el de $\{a,b,c,d,e\}$ porque podemos emparejar el primer conjunto con parte del segundo y sobran elementos en el segundo conjunto sin emparejar. La relación "tener menos elementos que" se puede establecer emparejando el conjunto que tiene menos elementos con un subconjunto del conjunto más numeroso.

$n(A) < n(B)$ si se puede establecer una aplicación biyectiva de A en un subconjunto de B

En consecuencia, podemos utilizar el emparejamiento de elementos de dos conjuntos para establecer el orden de los números, y decir:

- 1 < 2 porque se puede establecer un emparejamiento entre el conjunto $\{a\}$ y una parte de $\{a,b\}$
- 2 < 3 porque se puede establecer un emparejamiento de $\{a,b\}$ con una parte de $\{a,b,c\}$
- y así sucesivamente.

De esta manera se ha establecido un procedimiento para ordenar los números. Colocados en orden son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...

A) La serie ordenada de los números naturales

Una manera de introducir los números de manera ordenada es comenzar con conjuntos de cardinal uno. Entre dos conjuntos que tengan sólo un elemento se puede establecer de manera inmediata un emparejamiento y por tanto tienen el mismo cardinal. Decimos que su cardinal es 1. Por ejemplo, el cardinal de $\{a\} = 1$.

Si le añadimos un elemento al conjunto anterior, por ejemplo, la letra b, obtenemos el conjunto $\{a,b\}$ con un cardinal distinto del conjunto $\{a\}$, puesto que no se puede establecer una aplicación biyectiva entre ellos. El conjunto $\{a,b\}$ tiene cardinal 2.

Añadiendo otro elemento, la letra c, obtenemos el conjunto $\{a,b,c\}$ de cardinal 3. De esta manera, añadiendo un elemento cada vez se puede generar la serie creciente de los números naturales como cardinales de conjuntos. De forma similar, quitando elementos, se puede generar una secuencia decreciente. Esta forma de generar los números naturales hace surgir de manera natural el cero como cardinal de aquel conjunto que resulta al quitar del conjunto $\{a\}$ la letra a. La colección resultante no tie-

ne elementos, se llama conjunto vacío y su cardinal es cero: $\text{Cardinal}(\emptyset) = 0$. Su tamaño es menor que 1.

B) Materiales y recursos: la secuencia numérica

Las ideas anteriores quedan plasmadas en el esquema de la secuencia numérica (ilustración), que muestra diversos aspectos que los alumnos deben conocer y dominar.

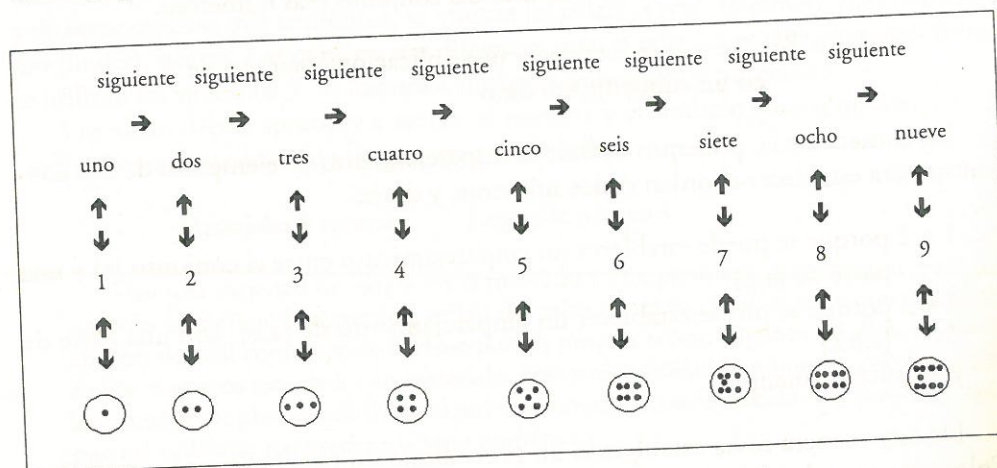
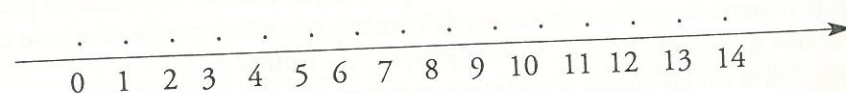


Figura 6.4. Esquema de la secuencia numérica.

La serie numérica se suele representar sobre una línea recta que se denomina *recta numérica* en la que los números están ordenados de menor a mayor de izquierda a derecha a intervalos iguales.



La recta numérica es un modelo de los números naturales que nos permite comparar números:

$m < n$ si m está a la izquierda de n en la recta numérica

y son útiles como material de apoyo para realizar con los niños actividades de conteo ascendente y descendente de uno en uno, de dos en dos, etc.

Actividad 6.4. Elabora tres actividades de conteo con la recta numérica orientadas a alumnos de Primaria.

De todo lo anterior poder concluir que los modelos más usuales en el estudio de los números naturales son:

- El modelo *lineal*, representado en la recta numérica.
- El modelo *cardinal*, que se basa en la consideración de cantidades discretas de objetos. Un caso particular son las configuraciones puntuales.

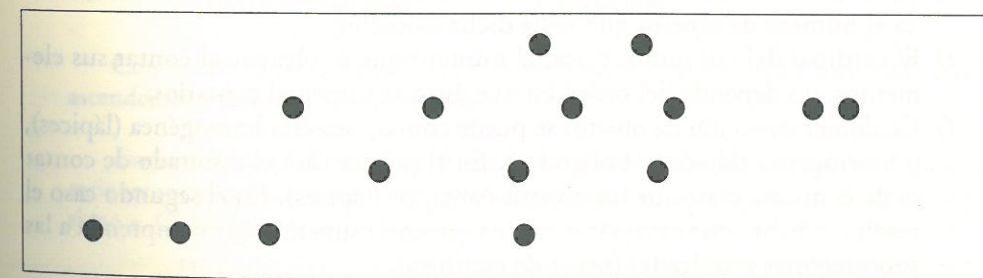
6.4. Estrategias para cuantificar

Cuantificar una colección consiste en determinar su cardinal. Para hallar el cardinal de un conjunto de objetos discretos, o separados, se puede proceder de distintas formas dependiendo del tamaño del conjunto.

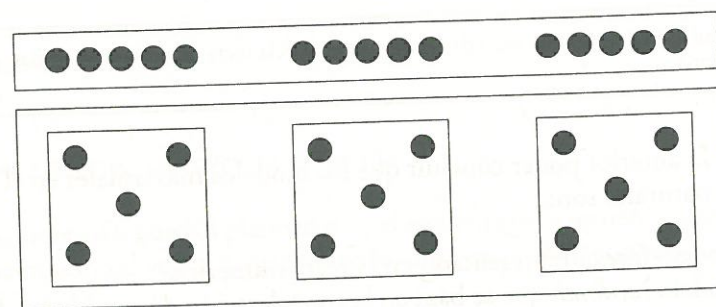
6.4.1. La percepción del número

Si el tamaño se puede percibir “de una ojeada” (caso de los puntos del dominó) el número aparece en nuestra mente de forma instantánea. Esta forma de obtenerlo se llama *subitización*, derivado de la palabra latina *subitus* (súbito).

Esta forma de proceder es útil cuando hay un número pequeño de unidades y se ve favorecida por la disposición regular de los objetos que se quieren contar. Cuando se tiene un conjunto de objetos distribuidos aleatoriamente como ocurre en los puntos de la figura siguiente pocas personas son capaces de dar la respuesta exacta de manera instantánea.



Sin embargo, si se hace una distribución regular de los puntos y se separan en partes iguales, se facilita la subitización. Como ocurre en las dos figuras siguientes:



En estas disposiciones es fácil percibir el cardinal 5 en cada una de ellas y además ver que hay tres bloques de cinco. El hecho numérico, tres por cinco igual a quince, proporciona el resultado.

6.4.2. Recuento

Para conjuntos numerosos en los que no es suficiente la subitización empleamos el proceso de contar; el número con el que finalizamos el proceso de contar un conjunto determinado nos da su cardinal.

El análisis del proceso que se sigue al contar una colección de entes ha determinado los principios que intervienen en dicho proceso. Son los siguientes:

- Los términos de la secuencia numérica se han de recitar en el orden convencional establecido.
- Cada palabra de la secuencia se ha de asociar con un elemento de la colección a contar y solamente con uno.
- Todos los elementos de la colección han de ser asociados con un solo término de la secuencia numérica.
- El último término obtenido, al contar todos los objetos de la colección, indica el número de objetos que tiene dicha colección.
- El cardinal del conjunto, o sea, el número que se obtiene al contar sus elementos, no depende del orden en que éstos se tomen al contarlos.
- Cualquier colección de objetos se puede contar, sea ésta homogénea (lápices), o heterogénea (lápices y bolígrafos). En el primer caso el resultado de contar es de la misma clase que los objetos contados (lápices). En el segundo caso el resultado habrá que expresarlo en una categoría superior que comprenda a las subcategorías implicadas (útiles de escritura).

El recuento de una nube de puntos (figura 6.5) es una actividad habitual en los textos para los alumnos de Primaria y se presenta con diversas variantes. Por ejemplo, dar

sólo la nube de puntos y pedirles que la numeren, o bien, dar la nube de puntos numerada y pedirles que unan con un trazo los puntos que corresponden a la sucesión numérica. Estas actividades de práctica con la serie numérica suelen aparecer también en programas de ordenador específicos para niños, que controlan si la actividad se está realizando correctamente y muestran al final una figura subyacente al trazado de la nube de puntos.

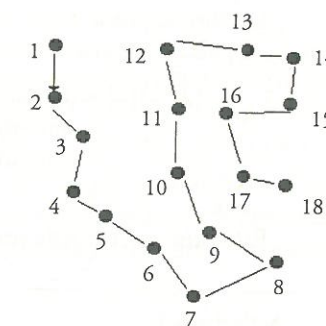


Figura 6.5. Recuento de una nube de puntos.

6.4.3. Estimar

Hay situaciones en las que no es posible o no es necesario obtener de manera exacta el cardinal de una colección y nos conformamos con una aproximación de su tamaño. En estos casos en que la aproximación numérica es suficiente se suelen emplear técnicas de estimación. Esto ocurre, por ejemplo, si se quiere determinar el número de asistentes a un acto público: número de asistentes a una manifestación, número de asistentes a un partido de fútbol, a un mítin político, etc.

6.4.4. Calcular

Y finalmente, si disponemos de la suficiente información adicional, el cardinal de un conjunto también podrá hallarse empleando con sentido las cuatro operaciones elementales y sus propiedades. Así, conocidos los cardinales de una partición de un conjunto, podemos hallar por suma el cardinal de éste.

Materiales y recursos

Calculadora

Con la calculadora se puede contar progresiva y regresivamente formando escalas ascendentes y descendentes de números.

Escalas ascendentes. Para contar *de uno en uno* en una calculadora normal de cuatro operaciones se pulsa sucesivamente el 1, dos veces el signo + y sucesivamente se va pulsando el signo =. Cada vez que se pulse el signo = aparecerá el número siguiente en la pantalla.

[1] [+] [+] = (la calculadora muestra el 1)
= (muestra el 2)
= (muestra el 3), y así sucesivamente.

También se puede *contar de dos en dos* con la calculadora; para ello, se introduce el número 2, se pulsa el signo + dos veces y a continuación se pulsa el signo = de manera sucesiva.

$$\begin{aligned} [2][+][+] &= (\text{la calculadora muestra } 2) \\ &= (\text{muestra } 4) \\ &= (\text{muestra } 6) \\ &= \end{aligned}$$

Este proceso se puede realizar con cualquier número.

Actividad 6.5:

- a) Investiga cómo se cuenta con la calculadora de cinco en cinco.

Con la calculadora también se puede contar a partir de un número cualquiera. Podemos contar de uno en uno a partir del 20. Para ello, tecleamos

$$\begin{aligned} [20][+][+][1] &= 21 \\ &= 22 \\ &= 23 \\ &= \end{aligned}$$

- b) Investiga cómo se cuenta con la calculadora a partir de 7 de tres en tres.

Escalas descendentes

El conteo regresivo, hacia atrás, de uno en uno se realiza a partir de un número restándole la unidad. Con la calculadora se realiza utilizando el signo de restar.

Por ejemplo,

$$[50][-][-][1] = 49 = 48 = 47 = \dots$$

- c) Cuenta hacia atrás de uno en uno desde 100 hasta 80 con la calculadora.

Para contar de dos en dos se sustituye en el esquema anterior al 1 por 2, y así sucesivamente.

- d) Describe cómo se cuenta hacia atrás de 7 en 7 con la calculadora a partir de 150.

6.5. El número cero

El número 0 tiene algunas peculiaridades que lo distinguen de los demás números naturales. En primer lugar, desde el punto de vista del desarrollo histórico de la numeración, el cero fue la última cifra que se incorporó en los sistemas de numeración para expresar la ausencia de un determinado valor de posición. En esta etapa inicial el cero no tiene aún la entidad de número. Se trata simplemente de un signo arbitrario para indicar la ausencia de cantidad de un orden determinado. Conviene reflexionar sobre este hecho, puesto que no es producto del azar, y puede alumbrar ciertas dificultades que plantea su aprendizaje. Durante mucho tiempo se consideró

que los números expresaban la esencia de lo existente, por ello lo que “no es” no puede ser expresado, carece de esencia y de ahí que no haya necesidad de una cifra para expresarlo. Con el transcurso del tiempo y el desarrollo del pensamiento matemático, siglos después se llegó a aceptar que 0 también es un número. Esto nos puede dar idea de la dificultad de tipo lógico que su aprendizaje puede representar para el niño.

Otra peculiaridad del número cero que puede crear dificultades en el aprendizaje es que no tiene significado en la mayoría de los contextos de uso del número, o si lo tiene no es fácil de entender. Veamos:

- La secuencia numérica ascendente no la comenzamos por el cero, salvo que se pida expresamente. Sí aparece en la secuencia numérica descendente como ocurre en la cuenta atrás para el lanzamiento de un cohete o en situaciones similares para indicar la salida.
- En el recuento lo usual es empezar por uno.
- Como cardinal el número cero indica el cardinal del conjunto vacío, es decir, un conjunto sin elementos, con las implicaciones citadas anteriormente sobre la dificultad de concebir el número de elementos del conjunto vacío.
- En su uso como medida el cero expresa la medida del segmento nulo, que es un segmento cuyos extremos coinciden. No es fácil aceptar la necesidad de medir la distancia de un punto a sí mismo, ni la de otros contextos que tengan como modelo matemático el segmento nulo. Su necesidad es más patente cuando se estudian las operaciones con medidas y se ve la necesidad de completar una estructura operatoria con un elemento cero. El uso más frecuente del cero en contextos de medida se produce en su empleo como punto de partida u origen de las escalas lineales graduadas para medir, como ocurre en la cinta métrica.
- En su uso como ordinal no es frecuente comenzar por 0, sino por el 1.

En la escuela es conveniente que se trate el número cero como un número más y no se transmita la sensación de que es una entidad extraña dentro de los números naturales. Si bien hay que poner de manifiesto de manera progresiva su *status* especial con relación a sus usos y significados.

Actividad 6.6. Documentos oficiales

- a) Analiza en los documentos oficiales para Educación Primaria qué aspectos reflejados en ellos se refieren al concepto de número natural. Haz una recopilación de los mismos.
- b) Compara la lista anterior que has elaborado con los contenidos que aparecen en la siguiente tabla y destaca las ausencias que se observan en una con respecto a la otra.
- c) Haz una distribución por cursos de los contenidos relativos al concepto de número natural.

Conceptos	Procedimientos	Actitudes
• Percepción y estimación de la numerosidad. • Conceptos ligados al número natural: - Secuencia numérica - Contar - Cardinal - Recuento - Ordinal. Términos ordinales. Comparación de ordinales - El número natural como medida • Símbolos numéricos. Lectura y escritura. • Consideraciones sobre el cero. • Orden de los números naturales. • Los números naturales en la recta numérica.	• Interpretación y utilización de la multiplicación y división en diferentes contextos y con diferentes significados. • Búsqueda y expresión de propiedades de la multiplicación y de la división. • Comprobación de las propiedades de la multiplicación y división utilizando modelos físicos, gráficos y simbólicos. • Invención de problemas aritméticos y decisión de qué operaciones son adecuadas para su resolución.	• Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de las operaciones de multiplicación y división. • Gusto por el descubrimiento y formulación de propiedades de las operaciones. • Actitud crítica ante la posibilidad de admitir "a priori" que una relación formulada sea verdadera. - Desarrollo de la predisposición a justificar las propiedades de las operaciones con el nivel de rigor adecuado. - Sensibilidad e interés por los mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de las operaciones en la vida cotidiana.

6.6. Representaciones

6.6.1. Sistema de numeración

El sistema de numeración decimal es un conjunto finito de signos, reglas y convenios que permiten representar la serie infinita de los números naturales. El uso cotidiano y automatizado que tenemos de representar números en el sistema de numeración decimal puede ocultar las dificultades por las que atravesó históricamente para alcanzar la situación actual y la que puede suponer su aprendizaje por parte de los niños.

En un sistema de numeración se encuentran implícitos una serie de aspectos que es necesario conocer para su comprensión.

La idea más básica es que un sistema de numeración es un sistema de representación y la forma más elemental de realizarla es mediante un conjunto de puntos o trazos, tantos como unidades tiene el número, por ejemplo:

||||| Representación simple del número catorce

Una segunda idea importante que facilita el recuento de los objetos es agrupar los trazos en bloques de igual número de elementos que se escriben separados, por ejemplo:

||||| ||||| ||||| ||

Lo que da lugar a *agrupamientos simples* en los que cada grupo tiene el mismo número de objetos. Eso exige fijar un número para formar los grupos, este número constituye la base del sistema de numeración en el que se está trabajando. En el ejemplo anterior la base es cinco. Cualquier número mayor o igual que 2 puede ser la base de un sistema de numeración. La elección del número que actúe de base ha estado marcada históricamente por criterios de utilidad práctica. Además de la base 10 a lo largo de la historia se han utilizado otras bases, como la base 60, la base 12, la base 20, y actualmente la base 2 se utiliza en Informática.

Cuando los números son grandes, el agrupamiento simple conduce al mismo problema que la representación simple, el número de grupos formado es numeroso y hay dificultad para determinar cuántos hay. Para solucionar este inconveniente se recurre al *agrupamiento múltiple*. Consiste en aplicar a los grupos formados la técnica de formar con ellos nuevos grupos y aplicar reiteradamente esta idea siempre que los grupos formados superen en número a la base o sean iguales a ella. Aparece aquí la idea de "unidades de distinto orden" y de que "*n* unidades de un orden forman una unidad de orden superior" en base *n*.

Llegados a este punto y ante la necesidad de escribir los números de forma simbólica, surge la posibilidad de designar las unidades de distinto orden con un signo. Esto es lo que ocurrió, por ejemplo, en el sistema de numeración egipcio, que utiliza la base 10 y los siguientes signos para las potencias de la base

/ para la unidad, ∪ para diez, ∅ para cien, ⌘ para mil

Ejemplo: ⌘⌘⌘ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ es el número 3.462

y en el sistema de numeración romano que tiene también como base el número 10 (I para la unidad, X para diez, C para cien, M para mil, etc.) y que utiliza además signos intermedios (V para cinco, L cincuenta, D quinientos).

El principio fundamental que subyace en los sistemas egipcio y romano es el aditivo: el número es el resultado de sumar los valores de los signos escritos.

Utilizar un signo distinto para cada potencia de la base plantea el inconveniente de tener que inventar signos nuevos conforme los números se hacen más grandes. Este problema no se da en los sistemas de numeración posicionales, que suponen un cambio en la asignación de los signos básicos. En vez de representar las potencias de

la base, utilizan un signo distinto para cada número menor que la base. En el caso particular del sistema de numeración decimal los signos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Estos mismos signos se utilizan además para desempeñar la función de indicar el número de cada potencia de la base que interviene en la representación del número. Por ejemplo, en el número 84.935 se está indicando que 10^4 aparece 8 veces, que 10^3 aparece 4 veces, 10^2 aparece 9 veces, 10^1 aparece 3 veces y además 5 unidades (10^0). Interviene de esta manera un *principio multiplicativo*, que es característico de los sistemas posicionales. Según esta idea el número anterior es

$$8 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5$$

donde se puede observar que interviene también el *principio aditivo*.

El valor de esta expresión es el mismo cualquiera que sea el orden en el que se dispongan los sumandos, por ejemplo:

$$5 + 3 \times 10^1 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10^3 + 8 \times 10^4$$

$$4 \times 10^3 + 8 \times 10^4 + 5 + 3 \times 10^1 + 9 \times 10^2$$

son expresiones que tienen el mismo valor. En los sistemas posicionales se adopta el criterio de escribir las potencias de la base en orden decreciente. En la representación de los números hay que tener en cuenta este convenio que ordena las potencias de diez de mayor a menor. A los principios aditivo y multiplicativo hay que añadir un principio de *ordenación descendente* de derecha a izquierda de las potencias de la base.

Adoptados los convenios anteriores en una expresión como $8 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5$ se pueden eliminar las potencias de la base y escribir sólo las cifras multiplicadoras 8 4 9 3 5 en el mismo orden. La potencia de la base a la que multiplican queda determinada por la posición que ocupan.

8	4	9	3	5
Decenas de millar	Millares	Centenas	Decenas	Unidades
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

Aparece así la idea de *valor de posición* según la cual las cifras representan unidades, decenas, centenas, etc. según el lugar que ocupan empezando a contar desde la izquierda. Con este convenio surge un problema cuando no hay potencias intermedias entre otras dos, que se soluciona colocando ceros para marcar la posición. Por ejemplo, 67049, indica que no hay centenas. Si no se escribiera nada parecería 67 49 y puede pensarse erróneamente que son 6 miles + 7 centenas + 4 decenas + 9 unidades.

Actividad 6.7. Representa los números 576 y 1.999 en los sistemas de numeración egipcio y romano.

Actividad 6.8:

1. Escribe cuatro formas desarrolladas de cada uno de los siguientes números:

- a) 153 b) 538 c) 6.498 d) 43.621 e) 325.316

2. Expresa en el sistema de numeración decimal el número dado por la expresión desarrollada

- a) $2 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
 b) $6 \times 10^4 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10^1$
 c) 7 millares + 5 centenas + 3 decenas
 d) $70.000 + 4.000 + 50 + 3$

6.6.2. Sistema decimal de numeración

El Sistema Decimal de Numeración contempla sobre los siguientes supuestos:

1. *Base diez.* La base o principio de agrupamiento de este sistema es diez, por ello el nombre de decimal.
2. *Unidades de orden superior.* Cada diez unidades de un orden forman una unidad de orden inmediato superior, que se escribe a la izquierda de la primera. Las unidades de distinto orden son las potencias de la base.
3. *Multiplicadores.* Hay diez cifras o dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 que actúan como multiplicadores de las potencias de la base.
4. *Valor de posición.* Las unidades de orden superior se representan por posiciones ordenadas en orden ascendente de derecha a izquierda.
5. *Valor relativo.* Cada cifra en un número tiene un valor relativo que depende de la posición que ocupe. Por ello se dice que nuestro sistema es posicional.
6. El valor de un número es la suma de los productos de las cifras por el valor de posición que tiene.

6.7. Materiales, recursos, medios didácticos

Para aprender a contar y a establecer el cardinal de un conjunto se pueden utilizar objetos corrientes de la vida real. Algunas características adicionales de estos objetos pueden facilitar la actividad de contar, como pueden ser bolas que se ensartan. También se han diseñado materiales didácticos orientados al aprendizaje de los primeros conceptos numéricos. Ejemplos de material diseñado son los siguientes:

A) Regletas de Cuisenaire

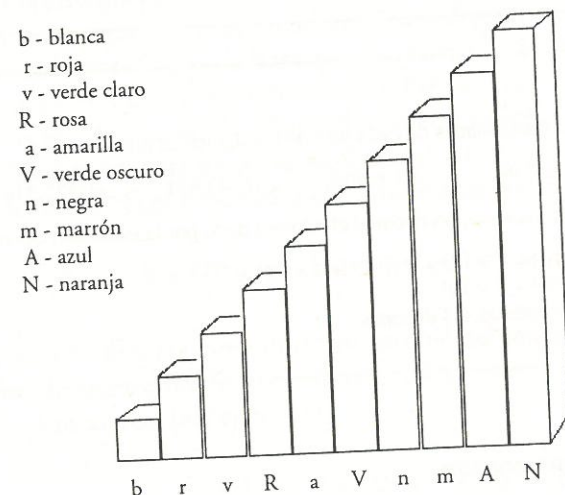


Figura 6.6. Representación de las reglas de Cuisenaire.

Material ideado por G. Cuisenaire y divulgado básicamente por C. Gattegno; también es conocido como *números en color*. Es un material excelente para trabajar el número como medida.

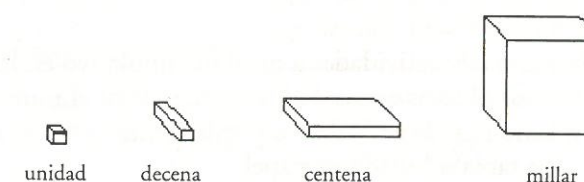
Consiste en unas barritas de un centímetro cuadrado de sección, cuya longitud varía desde uno a diez centímetros. Las regletas de la misma longitud poseen un mismo color, distinto del que posee otra longitud. Permiten representar los primeros números y algunas de sus propiedades y relaciones. Con este material los niños pequeños pueden trabajar aspectos como la ordenación, composición y descomposición aditiva de números, operaciones numéricas, etc.

Actividad 6.9. Modeliza las distintas composiciones y descomposiciones del número 5 utilizando las regletas de Cuisenaire. Elige dos colecciones de regletas y ordénalas en orden ascendente y descendente, formando dos escaleras distintas.

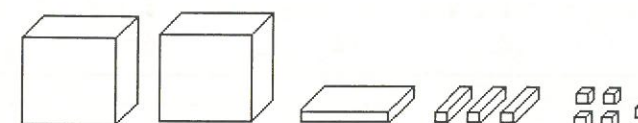
B) Bloques multibase

Los bloques multibase de Dienes es un modelo apropiado para desarrollar el significado de agrupamiento múltiple en un sistema de numeración. El material

consta de cuatro piezas distintas: un cubo de lado unidad para representar las unidades, una regleta para representar los agrupamientos de las unidades, una placa cuadrada para representar los agrupamientos de las regletas y un cubo mayor para representar los agrupamientos de las placas. De estas piezas ha de haber el suficiente número de ejemplares para que se puedan efectuar agrupamientos de orden superior. En base 10, el valor que representan las piezas es el de unidad, decena, centena y millar.



La figura siguiente muestra cómo se representa 2.135 con bloques multibase de base 10.



Con los bloques en base 10 los alumnos tienen que realizar tres tipos de actividades:

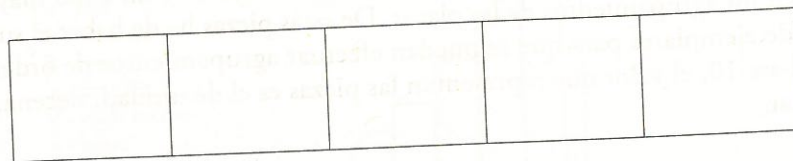
- Representar números decimales con este material.
- Escribir el número correspondiente a una representación dada con este material.
- Identificar el valor de posición de números representados con este material.

Actividad 6.10. Representa con los bloques multibase los números 2.675 y 305.

C) Tabla de valor de posición

La tabla de valor de posición es útil para ayudar a los niños a entender la escritura posicional de los números. Admite algunas variantes pero el modelo básico consiste en una franja horizontal dividida en casillas que representan de derecha a

izquierda los distintos valores de posición en orden creciente: unidades, decenas, centenas, etc.



Se pueden realizar con ella actividades a nivel manipulativo en las que los alumnos colocan fichas u otros objetos en las casillas para indicar el número de unidades de cada orden; este mismo tipo de actividad se puede realizar a modo de gráfico dibujando puntos sobre una tabla dibujada en papel

Decenas de millar	Millares	Centenas	Decenas	Unidades
10.000	1.000	100	10	1
• •	• • • •	• •	• • •	• • •
• •	• • • •	• •	• • •	• • •
4	8	2	6	5

La indicación, o no, en la parte superior de la tabla de los valores de posición proporciona variantes de actividades con este material en función de los objetivos educativos que se persigan. Las actividades escolares cuya finalidad es trabajar el nivel simbólico de los números prescinden de los objetos y colocan los signos de los números en las casillas correspondientes. Así, para conocer el orden de unidades que corresponde a cada una de las cifras de un número podemos utilizar un casillero como el siguiente, en el que hemos ubicado el número 2.471.309.572:

C. Millón	D. Millón	U. Millón	C. Millar	D. Millar	Millar	Centena	Decena	Unidad
2	4	7	3	0	9	5	7	2

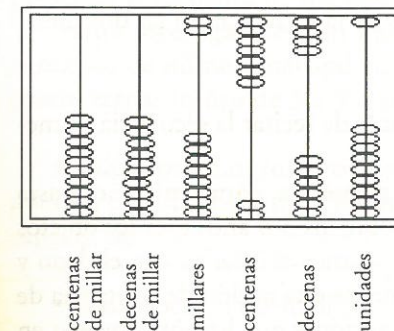
Cuando en un número no hay unidades de un determinado orden la cifra correspondiente es 0.

Hay otros dispositivos que cumplen una función similar a la de la tabla de valor de posición. Uno de ellos es un tablero vertical con bolsillos en los que se colocan las

unidades o los grupos de unidades. También los ábacos, en sus distintas variantes cumplen una función similar

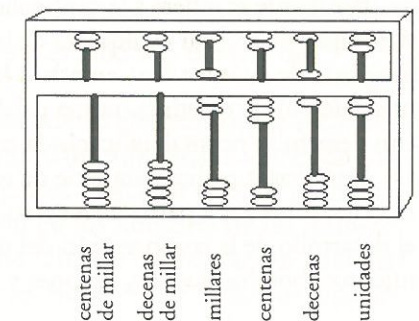
D) Ábaco

Consiste en un bastidor con varias columnas en cada una de las cuales hay diez bolas. Cada columna representa un orden de unidades; diez piezas en una columna representan una de la columna inmediatamente anterior. Con el ábaco se pueden representar cantidades indicando el número de las unidades, observar las equivalencias y realizar operaciones de suma y de resta.



Actividad 6.11. En un ábaco decimal asigna a las varillas los distintos valores de posición: unidades, decenas, centenas, etc. y representa los siguientes números: 1.025, 23.794.

Actividad 6.12. El ábaco chino, *suan pan*, consta de una barra que separa dos marcadores de bolas. Cada bola en el cuadro de arriba representa cinco veces el valor de las del cuadro de abajo. Los números se representan moviendo las bolas hacia la barra. En la ilustración está representado el número 7.362. Practica con números y sumándolos con el *suan pan*.



6.8. Cognición y aprendizaje. Errores y dificultades

Numerosas investigaciones se han realizado sobre la noción de número tratando de explicar cómo los niños llegan a adquirir dicha noción. Sus resultados son una aportación valiosa para que los profesores comprendan el proceso de aprendizaje de sus alumnos y sean capaces de guiarlos adecuadamente durante el mismo.

Las primeras experiencias del niño con los números surgen del contacto con los términos numéricos, indican Fuson y Hall, son las palabras uno, dos, tres, que en estos primeros contactos no tienen por qué ser utilizadas para contar. En el aprendi-

zaje de la secuencia numérica se han descubierto una serie de niveles en los que se puede encontrar un niño:

- Empezar a recitar desde el uno y decir algunos otros términos de forma no estable ni diferenciados.
- Empezar los términos desde el uno y recitar un tramo en el orden correcto.
- Empezar a recitar desde un término distinto de uno y seguir el tramo correctamente.
- Recitar un tramo comprendido entre dos términos dados.
- Desde un término *a* pueden recorrer un tramo de la secuencia en las dos direcciones.

Alrededor de los 6 años los niños han de ser capaces de recitar la secuencia numérica hasta 100.

Para contar, el niño ha de conocer la secuencia numérica, como mínimo, hasta alcanzar todos los elementos que tiene la colección. Sobre los 3-4 años toca los objetos con la mano mientras va contando, paulatinamente pasará a señalarlos con el dedo y posteriormente con la mirada. Para realizar correctamente esta acción de contar ha de hacer uso de los principios que intervienen en dicha acción y que hemos expuesto en el apartado 6.4.

Por lo que se refiere a la cardinalidad, se considera que un niño ha adquirido la regla si es capaz de realizar cualquiera de las acciones siguientes: responder directamente a la pregunta de cuántos hay, enfatizar la última palabra después de contar los objetos de una colección y repetir la última palabra al realizar un recuento. La mayoría de los niños con desarrollo normal aplicarán la regla de la cardinalidad a la edad de 4 años.

Jean Piaget realizó una serie de experimentos basados en la conservación y la seriación del número, a partir de los resultados que obtuvo estableció una serie de etapas en el desarrollo de la comprensión del número por los niños. Así para tareas de emparejamientos (botellas y vasos, jarrones y flores) identifica tres estadios:

- *Estadio I* (niños entre 3-6 y 5-6 años). Establecen una comparación global entre las colecciones y no materializan la correspondencia entre los elementos de las colecciones.
- *Estadio II* (niños entre 4-6 y 6 años). Son capaces de formar una colección equivalente a otra por correspondencia entre sus objetos pero dicha correspondencia no es perdurable, considerando que la colección es mayor si ésta cambia de forma o extensión.
- *Estadio III* (niños entre 4-11 y 5-6 años). Crean colecciones equivalentes a las dadas y están seguros de que el número de elementos en una colección no cambia aunque ésta cambie de posición. Concluyó que para poder manejar con

soltura los números naturales, en la resolución de problemas los niños precisan de las operaciones de conservación, seriación e inclusión de clases, indicando que estas tres nociones pueden ser adquiridas simultáneamente. Investigaciones realizadas posteriormente por Dodwell (1962) y Brainerd (1979) dan como resultado que en modo alguno estas tres operaciones se adquieren de manera simultánea.

Richar (1980) con una opinión similar a la de Piaget sostiene que el manejo de los números requiere haber adquirido la noción de conservación y la capacidad de proseguir el recuento de manera abstracta.

Varios investigadores han tratado de identificar etapas o estadios de desarrollo del concepto de número natural en los niños. Schaeffer, Eggleston y Scott distinguen cuatro etapas (niños de 3 a 5 años):

Estadio uno. Logros previos al recuento. Se caracteriza por que los niños no pueden contar conjuntos de más de dos objetos. Los niños de este estadio son capaces de:

- Reconocer el cardinal de conjuntos de dos objetos.
- Distinguir el tamaño relativo de dos colecciones de objetos (cuál es mayor y cuál menor) en casos en que una de ellas tiene menos de cinco objetos.

Estadio dos. El aspecto ordinal. Los niños en este estadio son capaces de:

- Reconocer el cardinal de conjuntos de hasta cuatro elementos por reconocimiento directo (subitización) o por recuento. Con números mayores de cuatro cometen errores de confundir los elementos contados con los no contados (contar algunos dos veces), de confusión en los nombres de los números (utilizar un mismo nombre dos veces) y de falta de coordinación entre las palabras y los objetos señalados (recitar varios nombres de números señalando un solo objeto).
- Fallan en reconocer que el número final contado es el cardinal del conjunto (regla de cardinalidad) y en que el cardinal de un conjunto no depende del orden en el que se cuenten los elementos (indiferencia del orden).

Estadio tres. Regla de cardinalidad. Los niños de este estadio se caracterizan por:

- Con números menores o iguales que 10, son capaces de reconocer que el último número contado es el cardinal del conjunto.
- No conectan el orden del recuento con el tamaño relativo de los números.

Estadio cuatro. El tamaño relativo de los números. Lo que caracteriza a este estadio es que los niños son capaces de reconocer el tamaño relativo de dos números menores o iguales que 10.

Actividades de desarrollo

1. Indica si es un número cardinal u ordinal cada uno de los números que aparecen en los siguientes casos:
 - a) El libro tiene 562 páginas.
 - b) El día de Navidad es el 25 de diciembre.
 - c) Empieza a leer por la página 125.
 - d) Nuestra clase hizo cuatro exámenes y acabamos los primeros.
2. Haz una lista de 5 palabras del idioma castellano que expresen la noción de dualidad y otras cinco que expresen la noción de pluralidad. ¿A qué usos del número están ligadas estas palabras?
3. Escribe la serie numérica del 1 al 15 como un conjunto de puntos que permita la subitización. Haz lo mismo como un conjunto de trazos iguales.
4. Haz una lista de diez pares diferentes de cosas de la vida real que vayan normalmente juntas y que puedan ponerse como ejemplos de actividades de emparejamiento o de correspondencia uno a uno. Explica cómo se realizaría el emparejamiento. ¿Qué uso del número está ligado a estas actividades?
5. La figura siguiente incluye unas relaciones entre números naturales por lo que se le denomina *cuadrado mágico*. Descubre las relaciones e inventa tú otros cuadrados mágicos que mantengan el mismo tipo de relación.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6. En la sucesión 1, 3, 5, 7, ..., $(2n - 1)$ halla el número que ocupa la posición 5.000. ¿Qué posición ocupa el número 777 en esta sucesión?

7. El número 0 es especial en varios aspectos. Indica alguno de ellos.
8. Diseña un material manipulativo diferente de los descritos en este capítulo para enseñar el concepto de valor de posición y conceptos relacionados.
9. Examina la siguiente suma hecha por un alumno. Explica el error que ha cometido este alumno y muestra cómo se puede utilizar la tabla de valor de posición para hallar la respuesta correcta.

$$\begin{array}{r} 57 \\ +26 \\ \hline 713 \end{array}$$

10. Ana y Juan son dos niños de un aula de Educación Infantil; después de contar una colección de canicas Ana dice que hay 8 canicas y Juan dice que hay 9 canicas. Estudia la situación e indica las posibles causas que pueden dar lugar a esta situación.