Clements, D. H. & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. En D. H. Clements, Sarama, J. & A-M DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*, pp. 299 – 317, Mahwah, NJ: LEA. (Traducción al castellano de Mar Liñán)

LA MEDIDA DESDE INFANTIL DE 4 AÑOS HASTA 2º DE PRIMARIA[1].

Los alumnos de primer grado estuvieron haciendo un plano de su clase, Comenzaron diciendo que necesitarían medir la habitación. Encantada, la maestra les dio sus reglas y ellos comenzaron a medir, pero rápidamente pararon.

Alumnos: "necesitamos más reglas, no hay suficientes"

Maestra: "Quizá si trabajáis juntos podáis resolverlo"

Alumnos: "No, incluso así no tenemos suficientes"

Maestra: "Quiero decir, ¿hay algún modo de medir solo con las reglas que tenéis?

Silencio...

Maestra: "¿Qué tal así?, ¿Si ponéis una regla, marcáis el final con el dedo y después la movéis?

Alumnos: "¡Bien!, ¡Qué buena idea!

(Clemens, 1999). Fue una buena idea que, aparentemente, ninguno de los alumnos había tenido antes.

¿Es esta aparente falta de conocimiento sobre la medida una casualidad? Seguramente, no.Muchos estudiantes usan los instrumentos de medida o cuentan unidades como una rutina, sin comprender su significado (Clements y Battista, 1992). Haciendo una comparación internacional, los estudiantes de los EE.UU. tienen una puntuación más baja en medida y geometría que en otros tópicos (National Center for Education Statistics, 1996). Necesitamos una formación en medida mucho más profunda en los primeros años de escuela. Afortunadamente, sabemos algo sobre los conceptos y habilidades que los niños necesitan para desarrollarlo y cómo lo desarrollan. Revisaremos aquí brevemente cómo entienden los niños la medida, considerando su desarrollo de la longitud, área y ángulo y giro más profundamente. Concluiremos con las implicaciones para el currículum y la instrucción en la medida para estos alumnos.

LOS NIÑOS Y LA MEDIDA

La comprensión de la medida en los niños tiene sus raíces en los primeros años de escuela. En la enseñanza infantil, los niños saben que los atributos continuos como la masa, la longitud y el peso existen, a pesar de que ellos no puedan cuantificarlos o medirlos con precisión. Incluso los niños de 3 años saben que si tienen arcilla y les dan más arcilla, tienen más que al principio, a pesar de

[1] Nota de la traductora: los diferentes currículos de los EE.UU. (la escuela comienza a los 5 años, aunque en algunos estados lo hace a los 4, y de España (la escuela comienza a los 3 años) hacen que en este artículo hayamos traducido Pre-Kindergarten (Pre-K) y Kindergarten (4 y 5 años, respectivamente) por enseñanza infantil y 1º y 2º grado por 1º y 2º de primaria

lo cual los niños de infantil no son capaces de hacer juicios fiables sobre cuál de dos cantidades de arcilla es mayor, solo usan señales perceptivas como cuál es más largo. A la edad de 4-5 años, sin embargo, muchos niños pueden aprender a superar las señales perceptivas y hacer progresos en el razonamiento sobre la medida.

De forma natural, los niños se tropiezan con la medida y comentan sobre ella (Ginsburg y Seo, cap. 4 de este volumen). Primero aprenden a usar palabras que representan magnitud o cantidad de un cierto atributo; luego, comparan dos objetos directamente y reconocen igualdad o desigualdad (Boulton-Lewis, Wilss y Mutch, 1996). En este punto están preparados para aprender a medir, conectando número y cantidad (la medida se define como la asignación de un número a cantidades continuas). Examinaremos a continuación este desarrollo en más detalle para el caso de la longitud.

MEDIDA DE LA LONGITUD

Como una primera y simple definición, podemos decir que la longitud es una característica de un objeto y que puede ser encontrada cuantificando cómo de lejos están los extremos de un objeto, la distancia se refiere al espacio vacío entre dos puntos. Medir la longitud y la distancia y aprender sobre la medida de la longitud es más complejo. Medir consiste en dos aspectos: identificar una unidad de medida y *subdividir* (mental y físicamente) el objeto en esa unidad, y colocar *iterando* esa unidad a lo largo del objeto. Estos dos aspectos son complejos logros mentales que son ignorados de forma demasiado habitual en los materiales curriculares para la medida y en su formación. Como consecuencia, muchos investigadores van más allá del acto físico de medir para investigar la comprensión de los alumnos sobre la medida cubriendo un espacio y cuantificando esa cobertura.

Vamos a hablar de la longitud en las próximas dos secciones. Primero, identificaremos distintos conceptos clave que subyacen en la medida (adaptados de Stephan y Clemens). Segundo, describiremos aproximaciones de formación basadas en la investigación que fueron diseñadas para ayudar a los alumnos a desarrollar conceptos y habilidades en la medida de la longitud.

Conceptos en la medida lineal

Distintos conceptos importantes apuntalan el aprendizaje de los niños sobre la medida de la longitud. Podemos usar esos conceptos para comprender cómo los estudiantes piensan sobre el espacio mientras realizan la actividad física de medir; dichos conceptos son:

a) Particionamiento
b) Iteración de la unidad
c) Transitividad
d) Conservación
e) Acumulación de la distancia
f) Relación con el número.

Particionamiento es la acción mental de partir un objeto en unidades del mismo tamaño. Esta idea no es obvia para los niños, envuelve la visión mental de un objeto como algo que puede ser partido antes incluso de la medida física. Preguntarles a los alumnos lo que significan las marcas de una regla puede revelar cómo comprenden el particionamiento de la longitud (Clements y Barrett, 1996; Leher). Por ejemplo, algunos alumnos pueden entender “5” como una marca de la regla, pero no como un espacio dividido en cinco partes iguales. Tan pronto como los niños empiezan a entender que las unidades también puedes ser particionadas, captan la idea de que la longitud es continua.

Iteración de la unidad es la habilidad para pensar en la longitud de bloques pequeños como una parte de la longitud del objeto que está siendo medido y para colocar esos pequeños bloques repetidamente a lo largo de la longitud del objeto más grande (Kamii y Clark, 1997). Los niños inicialmente pueden iterar una unidad dejando espacios entre unidades subsecuentes o superponer unidades adyacentes (Leher, 2001). Para estos alumnos, iterar es la acción física de colocar unidades de alguna forma, no la actividad de cubrir el espacio/longitud de un objeto sin dejar huecos. Cuando los niños cuentan cada unidad, el maestro debe enfocar las conversaciones de estos en aquello a lo que se están refiriendo; por ejemplo, si un alumno itera una unidad cinco veces, el “cinco” representa cinco unidades de longitud. Para algunos alumnos, “cinco” significa la marca de la regla próxima al numeral 5 en lugar de la cantidad de espacio cubierto por 5 unidades (Stephan, Cobb, Gravemeijer y Estes, 2001). En este sentido, las marcas en una regla enmascaran la buscada comprensión envuelta en la medida. Muchos alumnos no encuentran problemas en mezclar unidades (e.g. usar a la vez clips y capuchones de bolígrafo para medir) o en usar unidades de diferente tamaño (e.g., clips de diferente medida) siempre que cubran la longitud completa del objeto de alguna manera (Clements, Battista y Sarama, 1998; Leher, 2001).

Es más, los alumnos suelen comenzar a contar con el numeral “1” en una regla (es decir, 1 como el punto 0, Leher, 2001) o, cuando cuentan pasos, comienzan el conteo con el primer paso (i.e., olvidan el “primer pie” y comienzan a contar desde el “segundo pie” como uno; Leher, 2001, Stephan *et al.* 2001). Seguramente los alumnos no están pensado en la medida como “cubrir un espacio”; más bien, los números en una regla (o en el lugar de un “pie”) significan cuándo comenzar a contar, no una cantidad de espacio que ya ha sido cubierto (es decir, “uno” es el espacio entre el inicio de la regla hasta la marca del “1”, o la marca en sí misma). Finalmente, muchos alumnos encuentran inicialmente necesario iterar la unidad hasta ‘rellenar’ la longitud del objeto y no extenderán la unidad más allá del punto final del objeto que están midiendo (Stephan *et al.* 2001).

Transitividad es la comprensión de que si la longitud del objeto 1 es igual (o mayor o menor) que la longitud del objeto 2 y la longitud del objeto 2 es igual (o mayor o menor) que la longitud del objeto 3, entonces la longitud del objeto 1 tiene la misma (o mayor o menor que) longitud que el objeto 3. Los niños pueden usar, por ejemplo, un palo para juzgar cuándo dos torres, una en el suelo y otra en una mesa, tienen la misma longitud; un alumno que puede usar este razonamiento puede tomar un tercer o intermedio objeto (el palo) como una referencia con la que comparar las longitudes de otros objetos. Debido a esto, muchos investigadores mantienen que los alumnos pueden razonar *transitivamente* antes de que puedan entender la medida (Boulton-Lewis, 1987; Hiebert, 1981; Kamii y Clark, 1997). Algunos investigadores concluyen que la regla es un instrumento sin utilidad para la medida si el alumno no puede utilizar el razonamiento transitivo (Kamii y Clark, 1997). Esto podría ser solo parcialmente verdad, como discutiremos en la sección siguiente.

Conservación de la longitud, es la comprensión de que cuando movemos un objeto, su longitud no cambia. Por ejemplo, si se le muestran a un niño dos barras de la misma longitud alineadas, dirán que miden igual; pero si movemos una de forma que ya no estén alineadas, los niños de 4,5 a 6 años dirán que esa que hemos movido es más larga que la otra; de 5 a 7 años, muchos niños dudarán, y más allá de esta edad responderán rápidamente, como si fuera obvio. La conservación de la medida no es equivalente al concepto de medida, pero se desarrolla a la vez que el niño aprende a medir (Inheler, Sinclair y Bovet, 1974). Algunos investigadores mantienen que la conservación es esencial para, pero no equivalente a, una completa concepción de la medida (Copeland, 1974). Por ejemplo, Piaget, Inhelder y Szeminska (1960) argumentan que la transitividad es imposible para los alumnos que no conservan longitudes porque, una vez que mueven la unidad, es posible, desde el punto de vista del alumno, que la longitud de esa unidad cambie. La mayoría de los investigadores están de acuerdo en que los estudiantes desarrollan antes la conservación que la transitividad (Boulton-Lewis, 1987). Aunque los investigadores están de acuerdo en que la conservación es esencial para una comprensión completa de la medida, muchos artículos advierten que los alumnos no tienen necesariamente que desarrollar la conservación y la transitividad antes de que puedan aprender algunas ideas sobre la medida (Boulton-Lewis, 1987; Clements, 1999; Hiebert, 1981).

Dos ideas sobre la medida que parecen requerir conservación y transitividad son:

a) La relación inversa entre el tamaño de la unidad y el número de esas unidades que se deben usar.
b) La necesidad de usar unidades de igual longitud cuando medimos.

En muchas de las tareas que *parecen* requerir un razonamiento lógico general, los niños encuentran su propia estrategia de medida, y lo hacen bien. Estas estrategias de solución no necesariamente concuerdan con la estructura lógica de la tarea. Por ejemplo, los niños usan medidas intermedias para comparar dos longitudes sin explicitar la transitividad; mueven una unidad para medir la longitud de un objeto y no se preocupan por si la longitud se conserva o no. Por último, los niños de todos los niveles de desarrollo resuelven tareas simples de medida que no parecen apoyadas fuertemente en el razonamiento general.

Acumulación de la distancia es la comprensión de que si iteras una unidad a lo largo de la longitud de un objeto, y cuentas esa iteración, las palabras-número significan el espacio cubierto por todas las unidades contadas hasta ese punto. Piaget *et al.* (1960) caracteriza la actividad de medida de los estudiantes como una acumulación de distancia cuando el resultado de la formas de iteración anida relaciones de unos con otros. Esto es, el espacio cubierto por tres unidades está contenido en el espacio cubierto por cuatro unidades. Por ejemplo, en Stephan *et al.* (2001), los alumnos medían las longitudes de los objetos contando los pasos (de talón a dedo); cuando una estudiante midió de este modo una pequeña alfombra, el maestro la interrumpió preguntándole qué quería decir con "8". Algunos estudiantes dijeron que 8 significaba el espacio cubierto por 8 pies, mientras que otros argumentaban que era el espacio desde el comienzo del primer pie hasta el final del octavo; estos últimos estaban midiendo por acumulación de distancias. La mayoría de los investigadores han observado este tipo de interpretación entre los 9 y los 10 años de edad (Clements, 1999; Copeland, 1974; Kamii y Clark, 1997; Piaget *et al.*, 1960). Sin embargo, Stephan *et al.* (2001) mostraron que, con una instrucción seria y fácil de comprender, los niños de 6 años son capaces de construir la interpretación de la medida como acumulación de distancias.

Relación entre número y medida: la experiencia más importante de los niños con las matemáticas en la escuela infantil está relacionada normalmente con el conteo de objetos. Este tipo de conteo puede ser pensado como una medida de unidades discretas. Los alumnos pueden reorganizar su comprensión de los objetos que están contando a la medida con unidades continuas. Por lo tanto, no es sorprendente que el conteo en los alumnos juegue un papel en su desarrollo de las concepciones sobre la medida. Hacen juicios sobre la medida basados en ideas del conteo; por ejemplo, Inhelder *et al.* (1974) mostró a los estudiantes dos filas de cerillas con la misma medida total pero con distinto número de elementos (figura 11.1). Aunque desde la perspectiva del adulto la medida de las dos filas es la misma, muchos niños argumentaron que la fila con 6 cerillas era más larga porque tenía más cerillas; otros estudios han encontrado también que los niños utilizan sus experiencias con el conteo para interpretar su actividad con la medida. Cualquiera que haya enseñado medida sabe que los alumnos normalmente empiezan a medir con el numeral "1" como punto de inicio en lugar del 0. Después de todo, cuando medimos, la primera palabra número que decimos es "uno". Leher (2001) argumenta que la medida asume un "punto cero", el punto donde comienza la medida, que no necesariamente ha de ser el "0"; si los estudiantes entienden la medida como "leer la regla", no entenderán esta idea. Lubinski y Thiessan (1996) encontraron que una formación significativa enfocada en las interpretaciones de la actividad de la medida de los alumnos, haría que los estudiantes fueran capaces de usar de forma flexible los puntos de comienzo en la regla para indicar la medida satisfactoriamente.

A pesar de que los investigadores debaten el orden del desarrollo de estos conceptos y las edades en las que son obtenidos, están de acuerdo en que estas ideas forma parte del fundamento de la medida y deben ser consideradas durante la formación en este tópico. Cuando un maestro tiene estas ideas en mente durante su enseñanza, es más capaz de interpretar la comprensión de sus alumnos y de hacer preguntas que les permitan construir esas ideas. Está claro, sin embargo, que la formación tradicional en medida es insuficiente para ayudar a los alumnos en la construcción de estas concepciones. ¿Qué clase de actividades de formación usa un maestro para construir estas ideas?

Enseñanza y aprendizaje de medida lineal

Tradicionalmente, el objetivo en le formación de la medida ha sido ayudar a los alumnos a aprender las habilidades necesarias para usar una regla convencional. En contraste, la investigación y la reciente reforma del currículum sugiere desarrollar los bloques conceptuales construidos que permitan estimar y medir significativamente; Se pueden ralizar diferentes aproximaciones para conseguir estos objetivos.

Kamii y Clark (1997) llaman la atención sobre que la comparación de longitudes está en el corazón del desarrollo de las nociones de conservación, transitividad e iteración de la unidad, perola mayoría de los libros de texto no tienen este tipo de tareas relacionadas. Estos libros tienden a preguntar cosas como "¿Cuántos clips mide este bolígrafo?". A pesar de que Kamii y Clark aconsejan comenzar la instrucción con la comparación de longitudes no estándar (no usar la regla), también advierten que tal actividad se hace normalmente como una rutina, sin significado. Los maestros deben enfocar a sus alumnos en la actividad mental del razonamiento transitivo y en la acumulación de distancias; un tipo de tarea que envuelve indirectamente comparaciones es preguntarles si el hueco de la puerta es suficientemente ancho para que quepa una mesa: envuelve el razonamiento citado, razonamiento transitivo y, como consecuencia, no enfatiza los procedimientos físicos de medida (uso de instrumentos, por ejemplo).

El currículum más reciente aconseja una secuencia de instrucción en la que los estudiantes comparen longitudes, midan con unidades no estándar, incorporen el uso de unidades estándar manipulaticas y la medida con regla (Clements, 1999; Kamii y Clark, 1999) La base para esta secuencia es explícita o implícitamente, la teoría del desarrollo de la medida de Piaget *et al.* (1960). El argumento es que esta aproximación motiva a los estudiantes a ver la necesidad de tener una unidad estándar de medida. Los investigadores que aconsejan esta aproximación argumentan que, cuando las discusiones de la clase se centran en el significado de los alumnos cuando miden, son capaces de construir un conocimiento sofisticado (Leher, 2001; Lubinski y Thiessan, 1996; Stephan *et al.* 2001).

Por ejemplo, tal aproximación debe comenzar con la medida por pasos o pies de un punto a otro. Mientras los alumnos trabajan su actividad de medida, emergen las ideas sobre una unidad iterada y unidades idénticas (Leher, 2001; McClain, Cobb, Gravemeijer y Estes, 1999; Stephan *et al.* 2001). Los alumnos progresan desde los pasos continuos a la construcción de la unidad de unidades, como es la "tira de pies" consistente en huellas de su pie pegadas a un rollo de papel de calculadora; pueden confrontar entonces la idea de expresar su resultado en unidades de diferente medida (por ejemplo, 15 pies o tres "tiras de pies" cada una de las cuales contiene cinco pies) También discutirán cómo manejar el espacio que sobra, en el que no nos cabe una unidad entera: contarlo como una unidad completa o como una parte de ella. Medir con unidades de unidades les ayuda a pensar en la longitud como una composición de esas unidades; es más, les provee de una base para construir reglas.

Otros investigadores proponen una aproximación diferente (Bulton-Lewis, 1987; Clements 1999; Clements, Batista, Sarama, Swaminathan y McMillen, 1997; Nunes, Light y Mason, 1993) que cuestiona la bondad de concentrarse inicialmente en unidades de medida no estándar. Por ejemplo, Boulton-Lewis *et al.* (1996) lo encontraron infructuoso en un grupo de estudiantes, pero estos mismos alumnos tuvieron éxito en temprana edad con unidades estándar y con instrumentos de medida; los investigadores concluyeron que el uso de unidades no estándar no es un buen camino para ayudar inicialmente a los niños a entender la necesidad de estandarizar unidades convencionales en el proceso de medida de longitudes. Igualmente interesante fueron las preferencias de estrategias de los estudiantes: los de todas las edades, especialmente entre infantil de 4 y 5 años, preferían usar las reglas estándar, a pesar de que los maestros fomentaban el uso de unidades no estándar; un maestro prohibió el uso de las reglas en su clase porque se habían convertido en una distracción, ya que ¡los niños querían usarlas!.

Otro estudio (Nunes *et al.*, 1993) sugiere que los niños pueden usar significativamente las rglas antes de "reinventar" las ideas como las unidades y la iteración. Eran niños de 6 a 8 años de edad haciendo mediciones de longitudes usando reglas, cordeles y una regla rota que comenzaba en 4cm. La regla tradicional apoyaba el razonamiento de los niños de forma más efectiva que el cordel; sus estrategias y lenguaje indicaban que los niños daban "respuestas correctas basadas en procedimientos rigurosos, sacando provecho de la representación numérica disponible en la regla" (p. 46). Incluso lo hacían mejor con la regla rota que con el cordel, mostrando que no solo estaban "leyendo números" de la regla. Los investigadores concluyeron que las unidades convencionales elegidas y ya construidas en una regla no hacen la medida más difícil. En efecto, los niños se ven beneficiados por la representación numérica que proporciona, incluso, la regla rota.

El argumento Piagetiano que indica que los niños deben comprender la conservación de la longitud antes que puedan usar con sentido sistemas hechos, como las reglas, es una exageración. Estos descubrimientos apoyan la perspectiva Vygotskiana, en la que las reglas son vistas como instrumentos culturales de los que los niños se pueden apropiar; esto es, los niños pueden usar reglas, apropiarse de ellas y construir nuevas herramientas mentales. Los niños no solo pueden usar reglas, sino que también pueden hacerlo significativamente y en combinación con unidades manipulables para desarrollar la comprensión de la medida de longitud.

Basándose en investigaciones como estas, Clements (1999) sugirió la siguiente secuencia de instrucción: los niños deben recibir una variedad de experiencias comparando tamaños de objetos (por ejemplo, encontrando todos los objetos de la clase que son más largos que su antebrazo); después, los alumnos deben abordar experiencias que les permitan conectar el número con la longitud, debiendo los maestros proveerles de reglas convencionales y de unidades manipulativas usando unidades estándar. Mientras ellos exploran con estas herramientas, las ideas de iteración de medida sin dejar espacios entre unidades sucesivas, con una correcta alineación (con una regla) y el concepto "punto cero" pueden ser desarrollados. Advierte que los maestros han de poner el foco en el significado de los numerales en las reglas de los alumnos, como enumerando longitudes mejor que los números en sí. En otras palabras, las discusiones de clase deben enfocarse hacia "¿qué estás contando?". Usar unidades manipulables para hacer sus propias reglas ayuda a los niños a conectar sus experiencias con sus ideas. En segundo o tercero de primaria, los maestros deben introducir la necesidad de usar unidades estándar y la relación entre el tamaño y el número de unidades. La relación entre el tamaño y el número de unidades, la necesidad de estandarización de las unidades y los dispositivos de medida aditiva pueden ser explorados.

Los niños deben desarrollar también el *sentido de la medida*. Los maestros deben presentar problemas que envuelvan dibujar y estimar longitudes, observando las estrategias para resolverlos. Pueden proponerse tareas de longitud como hacer un dibujo de un rectángulo con unas medidas particulares, y los maestros deben observar si los alumnos dividen las longitudes. Los alumnos que dibujan marcas deben necesitarlas para cuantificar la longitud; a estos niños se les pueden presentar tareas similares, como dibujar un rectángulo de 10 por 5 cm, haciendo énfasis en la división en intervalos iguales y en la creación de diferentes unidades de longitud. Los alumnos que no pueden segmentar las líneas para iterar unidades pueden ser guiados, por ejemplo con actividades como dibujar un juguete, medirlo y volverlo a dibujar usando las mismas (y después, más pequeñas) medidas. Pueden medir las distancias contando los pasos a o largo de un camino y los maestros pueden enfatizar las experiencias e ideas de movimiento y distancia. Finalmente, algunos estudiantes muestran estrategias sofisticadas; dibujan figuras proporcionales y segmentos divisores para asignarles una medida. Estos alumnos pueden visualizar segmentos distancia y usar estrategias parte-todo para averiguar longitudes desconocidas: tiene una "herramienta interna de medida", que no es una imagen estática, sino un proceso mental de movimiento a lo largo de un objeto, segmentándolo y contando sus segmentos, incluso a lo largo de caminos complejos como el perímetro de una forma. Estos estudiantes pueden imponer esta "regla conceptual" en objetos y figuras geométricas (Steffe, 1991). Este es un punto crítico en su desarrollo del sentido de la medida; deben recibir problemas de "medidas perdidas" más complejos, como determinar todas las medidas en la figura 11.2.

La experiencias de la "Turtle geometry" ayudan a los alumnos a unir número con geometría en actividades de medida y construyen el sentido de la medida, generando motivación y significado en las actividades de medida. Esto ilustra una importante referencia: los alumnos deben usar la medida como recursos para conseguir un objetivo, no solo como un fin en sí mismo. Debemos tener en cuenta que incluso los niños más pequeños son capaces de generalizar y llegar a la abstracción en las ideas sobre medida usando ordenadores (Clements *et al.* 1997; Clements y Meredith, 1994; Kull, 1986; Try, 1989) si la interfaz es apropiada y las actividades están bien diseñadas (Watson y Brinkey, 1990/1991). Dándole a la tortuga instrucciones como "hacia delante, 10 pasos; gira a la derecha 90º; 5 pasos más", los niños aprenden los conceptos de longitud, ángulo y giro.

Finalmente, Clements y Barret (1996) encontraron que la introducción de tareas relacionadas con el concepto perímetro no solo enseña este importante concepto, sino que introduce a los alumnos en la necesidad de coordinar medidas de partes de caminos con la medida del camino completo; estas tareas destacan además los atributos medibles mientras los niños examinan una cuadrícula y otros modos de dividir los lados y el perímetro de una forma; estableciendo tareas que le requieran al niño la identificación de características de la medida, como centrarse en los bordes de un azulejo cuadrado más que en el azulejo entero como una unidad, los alumnos pueden aprender a discriminar la longitud del área. Estos investigadores encontraron que cuando los niños han de relacionar unidades de longitud (por ejemplo, cm) con la longitud de un lado y con el perímetro de la misma figura, empiezan a forjar una relación multiplicativa invariante –empiezan a definir cada segmento en referencia a un particular conjunto de imágenes repetidas de segmentos unidad más pequeños encadenados entre sí− como resultado de la iteración de unidades. A la vez que los niños miden el perímetro y después relacionan su valor con la suma de lados individuales, desarrollan imágenes coordinadas de colecciones de unidades. En este sentido, los alumnos interiorizan el proceso de iteración a lo largo de caminos y aprenden a relacionar medidas de segmentos con la iteración de segmentos unidad como una base de comparaciones cuantitativas del perímetro.

A pesar de que los investigadores han sugerido distintas aproximaciones, la mayoría de estos estudios comparten varias conclusiones. La primera: la medida no debe ser enseñada como una habilidad simple; en lugar de esto, debe ser tratada como una combinación compleja de conceptos y habilidades que se desarrollarán lentamente a lo largo de los años; aquí hemos tratado seis de estos conceptos. La segunda: las actividades informales iniciales deben establecer el atributo de la longitud y desarrollar conceptos como “más largo que”, “más corto que” e “igual en longitud que”, además de estrategias que impliquen comparación directa. La tercera, hacer énfasis en la resolución de problemas de medida reales, en cuyo desarrollo se deben construir e iterar unidades, así como unidades de unidades, ayudando a los niños a desarrollar profundamente conceptos y habilidades. La cuarta, los maestros deben ayudar a los niños a conectar el uso de unidades manipulativas y las reglas; aunque los investigadores proponen la variación de las estrategias de instrucción, debe existir alguna convergencia; por ejemplo, los investigadores no apoyan el uso temprano de unidades no estándar múltiples: tanto las unidades como las reglas deben ser usados, y las medidas no estándar, como los pies, pueden introducirse en una cuidadosa secuencia de actividades que lleven hacia el uso de unidades estándar.

MEDIDA DEL ÁREA

El área es la cantidad de superficie bidimensional que está contenida dentro de un límite y que puede ser cuantificada de alguna manera (Baturo y Nason, 1996). La medida del área asume que:

a) Una región bidimensional apropiada ha de ser tomada como unidad
b) Regiones congruentes tienen la misma área
c) Las regiones no se solapan
d) El área de la unión de dos regiones es la suma de sus áreas (Reynolds y Wheatley, 1996).

Por lo tanto, encontrar el área de una región se puede considerar como un “alicatado” o particionamiento de una región con una unidad bidimensional de medida. Estos conceptos son complejos y los niños los van desarrollando con los años.Por ejemplo, deben desarrollar la comprensión de que la descomposición y reagrupamiento de las formas no afecta a su área. Quizá es más desafiante desarrollar la habilidad para usar dos unidades lineales para construir la idea de un espacio bidimensional; sin esta comprensión de los conceptos y habilidades,, los alumnos normalmente aprenden una instrucción, como multiplicar dos longitudes, sin significado.

A pesar de que la medida del área se trata profundamente entre 3º y 5º de primaria, la literatura al respecto sugiere que existen aspectos menos formales relacionados con la medida del área que pueden introducirse en años anteriores. Describimos a continuación algunos de los más importantes conceptos que forman el fundamento de la medida del área y, después, mencionaremos algunas formas de instrucción que impulsan esas ideas.

Conceptos de medida del área.

Hay al menos cinco conceptos fundacionales que están envueltos en el aprendizaje de la medida del área:

a) Particionamiento; como en la medida lineal, este es el acto mental de partir el espacio bidimensional en unidades bidimensionales. Los maestros asumen usualmente que el producto de dos longitudes estructuran una región en un área de unidades de dos dimensiones para los estudiantes, sin embargo, la construcción de una colección de dos dimensiones partiendo de unidades unidimensionales no es trivial. Las primeras experiencias de los estudiantes con el área deben incluir el "alicatado" de una región con una unidad bidimensional de su elección y, en el proceso, discutir temas relacionados con los espacios que quedan libres, unidades que se solapan y precisión. La discusión de estas ideas dirigirá a los alumnos a la partición mental de una región en subregiones que pueden ser contadas.
b) Iteración de la unidad. Cuando cubren regiones con unidades de área sin espacios ni solapamientos, los niños pueden desarrollar el concepto de iteración de la unidad para medir un área. Como en la medida de longitud, los niños suelen cubrir el espacio, pero no extienden las unidades sobre los límites (Stephan *et al.* 2001). Además, habitualmente eligen unidades que físicamente se parecen a la región que deben cubrir, por ejemplo, eligen ladrillos para cubrir una superficie rectangular y alubias para cubrir la línea exterior de la mano (Leher, 2001; Nunes *et al.* 1993). Además, mezclan formas de unidades , triángulos y rectángulos, para cubrir la misma región. Una vez se han resuelto estos problemas, los alumnos necesitan estructurar el espacio bidimensional en una colección organizada de unidades, concepto al que volveremos más tarde.
c) Conservación. De forma similar a la medida lineal, esta es una idea importante que usualmente es descuidada en la formación. Los alumnos tienen problemas para aceptar que cuando cortan una región dada y la reagrupan para formar otra forma, el área se mantiene invariante (Leher, 2001). Los niños deben explorar y discutir las consecuencias de doblar o reorganizar piezas para establecer que una región, cortada y reorganizada, cubre el mismo espacio. Investigaciones relacionadas muestran que los niños usan estrategias diferentes para tomar decisiones sobre el área. Por ejemplo, los niños de 4 y 5 años de edad podrían unir solo un lado de las figuras cuando intentan comparar sus áreas; además, usan reglas de altura + anchura para hacer juicios sobre el área (Cuneo, 1980). Los niños de 6 a 8 años de edad realizan una extensión lineal, como usar la diagonal de un rectángulo. Solo después de esta edad, la mayoría de los alumnos llega a reglas multiplicativas, lo que nos dirige a nuestro siguiente concepto:
d) Estructura de una distribución en filas y columnas (matriz) (array en la versión original). Los niños necesitan esto para entender que el área es realmente bidimensional. Desarrollan en una serie de niveles esta difícil competencia, incluyendo los siguientes:
    - Habilidad, pequeña o no, para organizar, coordinar y estructurar un espacio bidimensional (no pueden representar el recubrimiento de un rectángulo con azulejos o piezas sin que haya espacios o se solapen).
    - Completar el recubrimiento, pero contando incorrectamente (no pueden mantener la cuenta de cuáles unidades han sido ya contadas, e.g., cuentan

alrededor del borde y, después, no sistemáticamente, cuentan las unidades interiores).
  - Cubren y cuentan, pero sin una estructura de filas y columnas.
  - Usan de forma incompleta y local filas y columnas (e.g., cuentan algunas filas, no todas, como unidades).
  - Estructuran el rectángulo como un conjunto de filas
  - Iteran esas filas (e.g., contando cada fila de 5 “5, 10, 15,...”)
  - Iteran las filas en coordinación con el número de cuadrados en una columna
  - Comprenden que las dimensiones de un rectánguloproveen el número de cuadrados en las filas y columnas y, entonces, calculan de forma significativa el área de esas dimensiones (Batista, Clements, Arnoff, Batista y Borrow, 1998; Outhred y Michelmore, 1992, 2000)

  Sin esta competencia, los alumnos no pueden usar la forma del área de forma significativa. Es más probable, además, que confundan conceptos como perímetro y área, por ejemplo, creyendo que contar las unidades alrededor de una figura nos proporciona su área.

e) Medida lineal. Muchos artículos mencionan que un buen fundamento en este tópico es una condición necesaria para comprender la medida del área, debido, obviamente, a que la medida del área, en su forma más sofisticada, es el producto de dos medidas lineales.

Enseñanza de la medida del área

¿Qué clase de actividades ayudan a los estudiantes a aprender conceptos iniciales sobre el área, estructuras en array y, finalmente, a aprender los cinco conceptos para formar un fundamento completo para medir el área de forma significativa?

Primero, los estudiantes deben investigar cubriendo regiones con una unidad de medida, dándose cuenta de que no hay espacios ni solapamientos y de que debe cubrirse la región completa.

Segundo, deben aprender cómo estructurar los arrays. Esto es un proceso largo, pero los niños de segundo de primaria pueden realizar avances significativos. Tareas que permitan averiguar cuántos cuadrados en dibujos de arrays hay, con cada vez menos información gráfica, son muy apropiados para esto (Akers, Battista, Goodrow, Clements y Sarama, 1997; Battista *et al.* 1998) Los alumnos pueden también “alicatar”regiones rectangulares mientras cuentan. Sin embargo, usar solo cuadrados manipulables podría provocar finalmente dependencia. En su lugar, los alumnos deberían ser animados a escribir o dibujar los resultados de su recubrimiento mientras lo realizan físicamente (Akers *et al.* 1997; Reynolds y Wheatley, 1996). Estos dibujos podrían revelar cómo los alumnos estructuran o no realmente los arrays. Por ejemplo, algunos alumnos dibujaron una serie de cuadrados en la región que estaban midiendo, donde se podía observar cómo todavía había espacios; otros niños dibujaron filas con diferente número de cuadrados en cada una. Los niños necesitan tener disponibles tareas y formación que les dirijan hacia los niveles de aprendizaje con estructura (Akers *et al.* 1997; Battista *et al.* 1998).

Tercero, los alumnos deben aprender que la longitud de las caras de un rectángulo puede determinar el número de unidades de cada fila y el número de filas en el array.

Cuarto, y este es normalmente apropiado solo en los cursos intermedios, los alumnos pueden aprender significativamente a multiplicar las dos dimensiones como un “atajo” para encontrar el número total de cuadrados. Una comprensión apropiada de la medida lineal, que la longitud de un lado especifica el número de unidades de longitud que caben a lo largo del mismo, es esencial. Solo entonces los alumnos podrán construir la fórmula del área.

Por tanto, la formación en el área no debe comenzar con reglas. En un estudio realizado por Nunes *et al.* (1993), los alumnos fallaban en la resolución de problemas de área cuando usaban una regla, pero eran capaces de concebir soluciones multiplicativas cuando se les daba la oportunidad de cubrir la superficie con una unidad. Si la formación comienza con una regla, uno de los errores más comunes que cometerán los niños es medir las longitudes de cada lado y luego sumarlas. Leher, Jenkins y Osana (1998) sugirieron interesar a los niños con tareas que les requiriesen encontrar el área de una superficie irregular con una unidad de su elección. Por ejemplo, les pidió a sus alumnos que dibujasen sus manos y que encontrasen su área usando una variedad de materiales manipulativos, como alubias, cubos,... Aunque la mayoría eligieron las alubias, que s parecían más a la forma de sus manos (por las curvas), esta tarea les dio la oportunidad de discutir sobre qué hacer con el espacio que quedaba sin cubrir. Debido a esa inseguridad de los alumnos sobre cómo resolver este dilema, el maestro introdujo una cuadrícula para que la usaran como instrumento de medida. Gradualmente, los niños aceptaron esta notación y la usaron para estimar y combinar unidades parciales.

Como tarea de continuación o subsecuente, se les pidió que dibujasen y midieran islas con sus cuadrículas; este tipo de tareas les proporcionan más oportunidades para medir con unidades cuadradas y para combinar partes de unidades para formar unidades completas; el maestro no pone aquí el foco en el proceso de cálculo de los estudiantes, sino en el significado que estos procedimientos tienen para ellos. Finalmente, los alumnos deben avanzar en la construcción de arrays con tareas como encontrar el área de las jaulas del zoo; a los alumnos del estudio de Leher (2001) se les dio un conjunto de formas poligonales que representaban la base de distintas jaulas del zoo y se les dejaron reglas a su disposición por si las consideraban necesarias. Aunque algunos alumnos midieron cada lado de los rectángulos y dijeron, erróneamente, que medían 40 *pulgadas*; sin embargo, otros niños partieron las jaulas rectangulares en estructuras de arrays y argumentaron que los que ellos querían decir realmente era que medían 40 *cuadrados*. Así, se les da la oportunidad a los alumnos de relacionar la idea del array con la de la longitud.

En resumen, la práctica frecuente del simple conteo de unidades para encontrar el área (realizable por alumnos de infantil) dirigida directamente a la enseñanza de las fórmulas es una receta para el desastre. En su lugar, los educadores deben construir en los niños ideas intuitivas espaciales iniciales y apreciar la necesidad de:

a) Construir la idea de unidades de medida, incluyendo el desarrollo del sentido de la medida para unidades estándar;
b) Tener muchas experiencias cubriendo elementos con unidades de medida apropiadas y contando esas unidades;
c) Estructurar espacialmente el objeto que van a medir, construyendo conceptos bidimensionales;
d) Construir la relación inversa entre el tamaño de la unidad y la cantidad de unidades necesarias para una determinada medida (segundo de primaria);
e) Construir el espacio bidimensional y las correspondientes relaciones multiplicativas.

MEDIDA DE ÁNGULO Y GIRO

Matemáticamente, un ángulo se define de distintas formas, aunque todas ella relacionadas. Por ejemplo, puede ser considerada la figura formada por dos rayas extendidas desde el mismo punto;

también como la cantidad de giro necesario para hacer coincidir con o hacer paralela una línea o plano con otro. Los métodos de medida del ángulo están basados en la división de un círculo; el grado, 1/360 parte de un círculo o ángulo completo, es la unidad más común usada en la escuela elemental.

Como en la longitud y el área, los niños necesitan comprender conceptos como el particionamiento y la iteración de la unidad para entender la medida del ángulo y del giro. Debido a la naturaleza de este dominio y a que nos estamos centrando en niños de infantil y primeros años de primaria, vamos a enfatizar los conceptos básicos de la comprensión de qu´`e estamos midiendo.

Estos conceptos son difíciles para los alumnos. Estos suelen fijarse en la longitud de las líneas que forman el ángulo cuando intentan medirlo, en la inclinación del segmento que está por encima, en el área encerrada por la región triangular definida por los lados del ángulo, en la distancia entre los lados o en su procimidad (Clements, Battista, 1989). Algunos de estos errores decrecen o desaparecen durante la escuela primaria, pero otros, como el efecto de la longitud de los lados que forman el ángulo, no cambian y, en algunos casos, aumentan. (Leher *et al.* 1998).

Podríamos argumentar que la medida del ángulo y del giro son difíciles y pertenecientes a los conceptos matemáticos disponibles solo para personas con especial interés e iniciadas y, como consecuencia, no tienen interés para los niños de los primeros cursos. Sin embargo, existen razones muy válidas para incluirlos como objetivos a conseguir en la educación matemática de los primeros años: primero, pueden y deben usar los giros y los ángulos de manera informal; segundo, usar el tamaño del ángulo, al menos implícitamente, es necesario para trabajar con formas, por ejemplo, los niños que distinguen un rombo no cuadrado de un rombo cuadrado, están reconociendo relaciones entre tamaños de ángulos; tercero, la medida del ángulo juega un papel primordial en la geometría escolar; y por último, existe evidencia en la literatura de investigación de que los niños pueden aprender estos conceptos satisfactoriamente (Leher *et al.* 1998).

Hay fundamentos iniciales sobre los que los niños pueden construir (Clements, capítulo 10 de este volumen, que discute distintos estudios realizados al respecto de los conceptos relacionados con el ángulo que no se van a repetir aquí) Por ejemplo, los niños de infantil usan ángulos implícitamente en la construcción con bloques (Ginsburg, Inoue y Seo, 1999). Niños con 5 años parecen usar ángulos para representar localizaciones de objetos en un círculo, es decir, un uso intuitivo de las coordenadas polares (Sandberg y Huttenlocher, 1996). Algunos alumnos de primero de primaria pueden distinguir entre ángulos basándose en su tamaño (Leher *et al.*, 1998). Por tanto, ayudar a los niños con su idea intuitiva de tamaño de ángulo solapando formas por sus ángulos y usando ángulos para completar puzles está dentro de las competencias de la mayoría de los niños a temprana edad.

Los niños hacen mucho más que reconocer que algunas figuras geométricas tienen esquinas, pues parece que son capaces de distinguir entre ángulos de diferentes medidas y pueden mentalmente descomponer una figura en atributos separados de longitud y ángulo (Leher *et al.* 1988). Todavía, como ya hemos dicho, confunden ángulo y medida de longitud, así que es necesario dar una atención especial a la formación de la medida estos conceptos (ángulo y giro). Necesitan especialmente ayuda en la integración de giros y, en general, en la comprensión dinámica de la medida del ángulo como una rotación.

Una herramienta de enseñanza especialmente útil para alcanzar estos objetivos es el uso del ordenador. Ciertos tipos de programas ayudan a los niños a cuantificar ángulos, especialmente los correspondientes a un giro, asociando números a esas cantidades y consiguiendo así una auténtica medida. Examinamos a continuación dos tipos de programas:

- El primero, manipulativo, quizá es el más apropiado para los niños más pequeños. En *"Shapes"*, por ejemplo, los niños juegan con figuras geométricas en la pantalla, usando herramientas que permiten girar y voltear (en el sentido de generar una imagen simétrica) para hacer dibujos y resolver puzles.
  El solo uso de estas herramientas permite ofrecer a los niños explícitamente el concepto de giro y tener conciencia del mismo (Sarama, Clements y Vukelic, 1996). Por ejemplo, una niña de 4 años llamada Leah llamó a la herramienta inicialmente "giro completo" (*spin* en inglés), lo que tenía sentido porque hacía click repetidamente y conseguía hacer un *"spinning"* con la figura (giros completos repetidamente). En una semana, sin embargo, comenzó a llamarla *"herramienta de giro"*, pues la usaba para girar a la derecha o a la izquierda deliberadamente. De forma similar, cuando otro niño trabajó sin el ordenador, manipuló rápidamente los bloques y se resistía a responder a las preguntas del investigador relativas a su intención o razones para mover así las piezas; finalmente, probando con varias respuestas, llegó a decir que lo había girado. Cuando este mismo niño comenzó a trabajar con el ordenador sí parecía consciente de sus actos porque cuando se le preguntó cuántas veces había girado una pieza respondió "tres" sin dudarlo (Sarama *et al.* 1996).

- El segundo juego de ordenador propuesto es la *"Tortuga Logo"*, que también puede ayudar a la comprensión de los niños de la medida del ángulo y el giro. Un niño de primero (primaria) explicaba cómo había girado la tortuga 45º: "*Fui 5, 10, 15, 20, … 45!* [rotando su mano según iba contando] *Es como un cuentakilómetros de un coche: ¡puedes contar de 5 en 5!"* (Clements y Batista, 1991). Esta niña ha matematizado [2]el giro: aplica una unidad al acto de girar y usa sus habilidades de conteo para determinar una medida.
  La investigación indica que la filosofía del *Logo* tradicional de sintonía corporal –o conexión con los movimientos de uno mismo– es un componente crítico de enseñanza. Un estudio mostró que los niños aprenden a medir giros primero con rotaciones físicas, especialmente con sus propios cuerpos (Clements, Batista, Sarama y Swaminathan, 1996). En el mismo tiempo, consiguen un conocimiento limitado sobre la asignación de números a ciertos giros en la geometría de la tortuga mediante el establecimiento de puntos de referencia. Una síntesis de estos dos dominios (giro como un movimiento del cuerpo y giro como un número) constituyen una unión crítica en el aprendizaje de los giros para muchos de los alumnos de primero de primaria. Este y otros estudios han usado la Tortuga Logo para ayudar a los niños a matematizar sus experiencias físicas, consiguiendo que los niños incluso de educación infantil desarrollen firmemente conceptos de su medida.
  Para entender los ángulos, los estudiantes deben comprender varios conceptos relacionados, venciendo dificultades como la orientación, distinguiendo los ángulos

[2] Definimos matematización como el proceso de representación y elaboración matemática, creando modelos de actividades del día a día con objetos matemáticos, como son los números y las formas, acciones matemáticas, como el conteo o la transformación de figuras y sus relaciones estructurales. Matematizar envuelve la reorganización, el reinventar, redescribir, cuantificar, estructurar y llegar a la abstracción y generalización de lo que inicialmente se entiende en un nivel intuitivo e informal en el contexto del día a día.

como partes críticas de las figuras geométricas y construyendo y representando la idea de giros, entre otros. Es más, deben construir un alto nivel de integración entre estos aspectos, tarea difícil que es mejor comenzar pronto, en cuanto los niños comienzan a enfrentarse a las esquinas de las figuras, comparando tamaños de ángulos y giros.

CONCLUSIÓN

La medida es una de las principales aplicaciones de las matemáticas al mundo real. Une dos campos críticos de las matemáticas: la geometría o relaciones espaciales, y los números. Los números y las operaciones son elementos esenciales en la medida. El proceso de medida subdivide cantidades continuas, como la longitud, para hacerlas contables. La medida proporciona un modelo y aplicación tanto del número como de las operaciones; en este sentido, la medida ayuda a conectar los campos número y geometría, proporcionándose mutuamente respaldo conceptual.

Investigaciones en medida de longitud, área y ángulo y giro indican que la medida es, en general, más compleja que el aprendizaje de las habilidades o procedimientos para determinar una medida. Las actividades mentales y conceptuales de los niños cuando están envueltos en situaciones de medida deberían ser el foco de la enseñanza.