

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN EMPLEADAS POR LOS NIÑOS.

Fennema y Carpenter, 1989<sup>1</sup>.

Las investigaciones han identificado de manera bastante coherente las estrategias que los niños utilizan para resolver problemas aritméticos de sumar y restar, y cómo estas estrategias evolucionan a lo largo del tiempo. Las diferencias entre los tipos de problemas generalmente se ponen de manifiesto en los procesos de resolución empleados por los niños, que tienden a reflejar la acción o relaciones descritas en un problema. En las estrategias más básicas los objetos físicos o los dedos se utilizan para modelar directamente la acción o relaciones descritas en cada problema. Con posterioridad las estrategias de modelación directa son reemplazadas por estrategias de contar más abstractas, que a su vez son más tarde reemplazadas por el uso de hechos numéricos.

Estrategias de modelación directa.

Para resolver un problema de suma simple, Cambio-Unión (incógnita el estado final) o Parte-Parte-Todo (con la incógnita el todo), los objetos o los dedos se utilizan para representar cada uno de los sumandos, y luego la unión de estos dos grupos se cuenta empezando desde 1. Esta estrategia, que llamamos Contar todos, se muestra en el protocolo siguiente.

Profesor: Roberto tiene 4 coches de juguetes. Su amigo le da 7 coches más. ¿Cuántos tiene ahora?

Carolina hace un grupo de 4 fichas y luego un grupo de 7 fichas. Luego, las coloca todas juntas y empieza a contarlas "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11," señalando una ficha cada vez que dice un número. Luego responde "Tenía 11 coches".

Aunque existe solo una estrategia de modelación directa que los niños utilizan para resolver problemas de sumar, existen varias estrategias distintas de modelación que los niños utilizan para resolver problemas de restas. Estas estrategias corresponden a las acciones o relaciones descritas en los diferentes problemas.

La estrategia que mejor modela los problemas de Cambio-Separar (siendo la cantidad final la incógnita) implica una acción de quitar o separar. En este caso, la cantidad más grande en el problema de restar se representa inicialmente, y luego la cantidad más pequeña se separa de ella. Esta estrategia denominada Separar desde se muestra en el protocolo siguiente:

Profesor: Carol tiene 12 caramelos. Le da 5 a Pepe. ¿Cuántos le quedan?

Carolina hace un grupo de 12 fichas y quita 5. Ella cuenta las fichas restantes, y responde "Le quedan 7".

<sup>1</sup>. Traducción-adaptación S. Linares. Departamento de Didáctica de las Ciencias (Matemáticas). Universidad de Sevilla.

El problema de Cambio-separar (siendo el cambio la incógnita) también implica una acción de separar. La estrategia, generalmente utilizada para resolver este problema es semejante a la estrategia 'Separar desde', excepto que las fichas se van quitando desde el grupo más grande hasta que el número de fichas que quedan es igual al número más pequeño en el problema. Esta estrategia se llama Separar hasta, y se muestra en el protocolo siguiente.

Profesor: Roberto tiene 6 caramelos. Le da algunos a su amigo. Ahora le quedan todavía 2. ¿Cuántos caramelos le ha dado a su amigo?

Carolina hace un grupo de 6 fichas. Ella lentamente va quitando una ficha cada vez, mirando al mismo tiempo las fichas que quedan en el grupo inicial. Cuando en este grupo quedan solo 2 fichas, se detiene y cuenta las 4 fichas que ha separado. Entonces responde "Le ha dado 4".

'Separar hasta' implica una cierta cantidad de ensayo y error, ya que el niño no puede simplemente contar los objetos cuando físicamente se han separado sino que debe comprobar las fichas que quedan en el grupo inicial para determinar si ya ha quitado el número apropiado de fichas. Esta estrategia es más fácil aplicarla con números pequeños ya que así los niños pueden percibir directamente si quedan dos o más fichas en el grupo inicial.

La estrategia relacionada al problema de Cambio-Unir (con el cambio desconocido) implica una acción aditiva. Los niños hacen un grupo equivalente a la cantidad inicial y van añadiendo fichas hasta que el nuevo grupo es igual al total dado por el problema. La cantidad de fichas añadidas es la respuesta. Esta estrategia, llamada Añadir hasta se muestra en el protocolo siguiente:

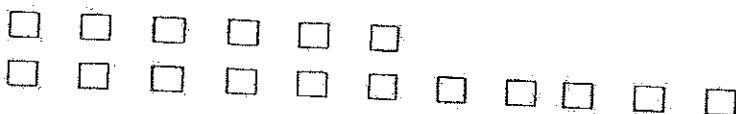
Profesor: Roberto tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos le faltan si quiere tener 11?

Carolina hace un grupo de 4 fichas. Ella va colocando fichas a continuación (contando 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) hasta que tiene un total de 11 fichas. Las fichas que ha ido añadiendo están un poco separadas de grupo inicial de 4, así que ahora puede contar las fichas añadidas. Ella cuenta las 7 fichas, y responde "Necesita 7 más".

Los problemas de comparar (siendo la incógnita la diferencia) describen un proceso de emparejamiento. La estrategia utilizada para resolver este problema implica la construcción de una correspondencia uno-a-uno entre los dos grupos hasta que en un grupo ya no queden más fichas. Contar las fichas no emparejadas proporciona la respuesta. La estrategia de Emparejar se muestra en el protocolo siguiente:

Profesor: Marcos tiene 6 caramelos. Jaime tiene 11. Cuántos caramelos tiene Jaime más que Marcos?

Carolina hace un grupo de 6 fichas y otro de 11 fichas. Coloca el grupo de 6 fichas en fila. Luego hace una fila con el grupo de 11 fichas emparejando las fichas de los dos grupos. (ver dibujo). Luego cuenta las 5 fichas que no se han podido emparejar con el grupo inicial, y responde "Tiene 5 más".



Es difícil modelar los problemas siendo la incógnita la cantidad inicial, ya que al desconocerse esta cantidad inicial no se puede representar. Unos pocos niños intentan resolver este tipo de problemas utilizando una estrategia de Ensayo y error. El siguiente protocolo muestra uno de estos intentos.

Profesor: Roberto tiene algunos coches de juguete. Sus amigos le dan 5 más el día de su cumpleaños. Ahora Roberto tiene 11 coches. ¿Cuántos coches tenía antes de su cumpleaños?

Carolina cuenta 3 fichas. Ella añade 5 fichas y cuenta el número de fichas en el grupo. Se da cuenta que tiene 8 y no 11. Carolina junta todas las fichas que tenía encima de la mesa y empieza de nuevo. Ahora hace un grupo de 5 fichas y añade 5 más. De nuevo vuelve a contar el grupo de fichas que tiene y se da cuenta que ha estimado una cantidad demasiado pequeña. En este momento parece darse cuenta de que sólo le falta 1, así que añade 1 al grupo inicial y luego lo une al otro grupo de 5 fichas que tenía. Contando el total observa que ahora tiene 11. Entonces cuenta el primer grupo de 6 fichas. Luego responde "Tenía 6 coches antes del cumpleaños".

Este ejemplo de Ensayo y Error muestra un intento razonablemente sistemático para resolver el problema. Cuando las dos primeras estimaciones son demasiado bajas, las aumenta. Algunos niños que intentan la estrategia de Ensayo y Error son menos sistemáticos.

Las seis estrategias de modelación directa descritas hasta aquí se resumen en el cuadro 1.

Estrategia	Descripción
<u>ADICION</u> Contar todos  Elena tiene 3 caramelos. Ella compra 5. ¿Cuántos caramelos tiene ahora?	Usando fichas o los dedos, se construyen un grupo de 3 y un grupo de 5. Los grupos se unen y se cuenta el número de objetos en el grupo total.
<u>SUSTRACCION</u> Separar desde  Había 8 niños jugando. Se fueron 3. ¿Cuántos quedan?	Utilizando fichas o los dedos se forma un grupo de 8. Se quitan 3 fichas/dedos. La respuesta es el número de fichas/dedos que quedan.
Separar hasta  Había 8 personas en un autobús. Se bajaron algunas. Ahora hay 3 personas. ¿Cuántas se bajaron?	Se hace un grupo de 8 objetos. Se van quitando objetos hasta que solo quedan 3. La respuesta es el número de objetos que se han quitado.
Unir hasta (Añadir hasta)  Pepe tenía 3 canicas. Clara le dio algunas. Ahora Pepe tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas le dio Clara?	Se hace un grupo de 3 fichas. Se van añadiendo fichas hasta tener un total de 8. La respuesta se halla contando el número de fichas añadidas.

<b>Emparejar</b> Maria tiene 3 globos. Rosa tiene 8 globos. ¿Cuántos globos tiene Rosa más que Maria?	Se hace un grupo de 3 fichas y un grupo de 8 fichas emparejando la fichas. La respuesta es el número de fichas no emparejadas.
<b>OTROS</b> <b>Ensayo y error</b> Rosa tiene algunos libros. Fue a la biblioteca y cogió 3 más. Ahora tiene 8. ¿Cuántos libros tenía al principio?	Se hace un grupo de fichas. Se añade un grupo de 3 fichas y se cuenta lo que se tiene en total. Si es 8, entonces el grupo inicial de fichas es la respuesta, si no se vuelve a intentar con otro grupo de fichas.

Cuadro 1. Estrategias de modelación directa.

Estrategias de contar.

Las estrategias de contar son más eficientes e implican una aplicación menos mecánica del contar que la modelación directa con objetos físicos. Al aplicar estas estrategias, un niño reconoce que no es necesario reconstruir la sucesión de contar entera. Con frecuencia se utilizan dos estrategias de contar relacionadas para resolver los problemas de sumar. Con Contar desde el primero, un niño empieza a contar hacia adelante desde el primer sumando en el problema. La secuencia termina cuando el número de pasos contados que representan el segundo sumando se ha completado. Esta estrategia se muestra en el siguiente protocolo:

Profesor: Roberto tiene 4 coches de juguete. Sus amigos le dieron 7 en día de su cumpleaños.  
 ¿Cuántos coches tiene ahora?

Ana: "4 (pausa), 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Tiene 11 coches". Cuando Ana estaba contando iba levantando un dedo cada vez que decía un número. Cuando tenía 7 dedos levantados, paró de contar y dio la respuesta.

La estrategia de Contar desde el más grande es idéntica a la anterior excepto que el niño empieza a contar hacia adelante a partir del mayor de los dos sumandos. En el protocolo siguiente Jorge Cuenta desde el más grande para responder al mismo problema anterior:

Jorge: "7 (pausa), 8, 9, 10, 11. Once coches". Jorge también levantaba sus dedos para contar, pero sus movimientos son muy ligeros, y es fácil no darse cuenta de que los está utilizando para mantener las pistas.

Hay que darse cuenta de que para conocer cuando hay que detenerse, las estrategias de contar requieren algún método de mantener la pista del número de pasos contados que representan al segundo sumando. Muchos niños utilizan sus dedos para mantener la pista de lo ya contado, pero un número sustancial de niños no proporciona ninguna evidencia de ninguna acción física acompañando a su proceso de contar. Cuando el proceso de contar se realiza mentalmente, es difícil determinar cómo un niño sabe cuando tiene que pararse. Algunos niños parecen utilizar alguna clase de cadencia rítmica de tal manera que al decir los números los agrupan en grupos de dos o tres. (Otros explícitamente describen una doble

cuenta (por ejemplo, seis es uno, siete es dos, ocho es tres, etc) pero los niños normalmente tienen dificultades en explicar este proceso. Cuando se utilizan los dedos en las estrategias de contar, juegan un papel diferente que en las estrategias de modelación directa. En este caso, los dedos no representan el segundo sumando per se, sino que se utilizan para mantener la pista del número de pasos dados en el proceso de contar. Cuando se utilizan los dedos, los niños con frecuencia no parecen estar contando sus dedos, pero de todas maneras pueden decir inmediatamente la cantidad de dedos levantados cuando levantan un número dado de dedos.

Una estrategia similar se utiliza para resolver problemas de Cambio-Unir (siendo el cambio la incógnita). La diferencia es que, la respuesta no es el número al que se llega, sino que la respuesta es el número de pasos en la secuencia de contar. El niño inicia una estrategia de contar hacia adelante empezando con el número dado más pequeño. La secuencia finaliza con el número dado más grande. Manteniendo la pista de los números dichos en esta secuencia, los niños determinan la respuesta. Esta estrategia que se llama Contar hasta es la estrategia análoga a la estrategia de modelación directa que denominábamos Unir hasta. El siguiente protocolo es un ejemplo de esta estrategia:

Profesor: Roberto tiene 8 coches de juguete. Sus padres le dan algunos más por su cumpleaños. Ahora tiene 13. ¿Cuántos coches le han dado sus padres?

Ana: "8 (pausa), 9, 10, 11, 12, 13, ". Ella va levantando un dedo cada vez que dice un número cuando va desde 9 a 13. Luego mira el número de dedos que tiene levantados y contesta "Le dieron 5".

Para reflejar la acción en los problemas de Cambio-separar (siendo la cantidad final la incógnita), se emplea una secuencia de contar hacia atrás. Los niños empiezan a contar hacia atrás desde el número dado más grande. El número que hay que quitar es el número de pasos hacia atrás que hay que dar. La respuesta es el anterior del último número pronunciado. Esta estrategia se llama Contar hacia atrás desde es análoga a la estrategia de modelación directa 'Separar desde'. El siguiente protocolo es un ejemplo:

Profesor: Pepe tiene 11 caramelos. Le dio 3 a su amigo. ¿Cuántos le quedan?

Ana: "11, 10, 9, (pausa), 8. Le quedan 8". Ana utiliza sus dedos para llevar la pista del número de pasos en la secuencia de contar.

También se utiliza una secuencia de contar hacia atrás para representar la acción en el problema de Cambio-Separar (siendo el cambio la incógnita). Pero la secuencia de contar hacia atrás en la estrategia Contar hacia atrás hasta continúa hasta que se alcanza el número más pequeño; el número de palabras en la secuencia de contar es la solución al problema. Esta estrategia, que es la contrapartida en los procesos de contar de la estrategia de modelación directa 'Separar hasta' se muestra en el protocolo siguiente:

Profesor: Pepe tiene 12 canicas. Le da algunas a Pedro. Entonces le quedan 8. ¿Cuántas canicas le ha dado?

Ana: "12, 11, 10, 9, (pausa), 8. Le dio 4 canicas a Pedro".

Las estrategias de contar están resumidas en el cuadro 2.

Estrategia	Descripción	Esquema
<b>ADICION</b> <u>Contar desde el primero</u> Elena tiene 3 caramelos. Compra 5 caramelos más. ¿Cuántos tiene ahora?	La secuencia de contar empieza en el 3 y continúa 5 más. La respuesta es el último término de la sucesión.	
<u>Contar desde el más grande</u> Elena tiene 3 caramelos. Compra 5 caramelos más. ¿Cuántos tiene ahora?	La secuencia de contar empieza en el 5 y continúa 3 más. La respuesta es el último término de la sucesión.	
<b>SUSTRACCION</b> <u>Contar hacia atrás.</u> Había 8 niños jugando. Tres se fueron a casa. ¿Cuántos quedan?	Se inicia una secuencia de contar hacia atrás desde el 8. Se cuentan 3 números hacia atrás. La respuesta es el siguiente en la secuencia hacia atrás.	
<u>Contar hacia atrás hasta</u> En un autobús viajaban 8 viajeros. Se bajaron algunos. Ahora quedan 3 viajeros. ¿Cuántos se bajaron?	Se inicia una secuencia de contar hacia atrás desde el 8 y continúa hasta el 3. La respuesta es la cantidad de números contados.	
<u>Contar hasta</u> Pepe tenía 3 caramelos. Clara le dio algunos. Ahora tiene 8 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dio Clara?	Se inicia una secuencia de contar desde el 3 hasta llegar al 8. La respuesta es la cantidad de números contados.	

Cuadro 2. Estrategias de contar.

Distinción entre contar y modelar.

Es importante observar la distinción entre estrategias de modelar y de contar. La modelación directa se distingue por la representación exacta de cada objeto y la acción o relación del problema. Cuando un niño utiliza una estrategia de contar, el niño tiene una descripción mental más que física de los objetos. En las estrategias de contar los objetos físicos que el niño puede utilizar (dedos, fichas) se utilizan para llevar pistas de la secuencia de contar más que para representar objetos en el problema. El uso de los dedos no distingue estas dos tipos de estrategias. Como se muestra en el protocolo siguiente, los dedos se pueden utilizar como 'contadores' o para modelar directamente la situación.

Profesor: Pedro tiene 5 caramelos. Su hermana le da 3 más. ¿Cuántos tiene ahora?

Jaime modela directamente. Levanta 3 dedos en una mano y 5 dedos en la otra. Luego cuenta sus dedos, doblándolos cada vez que cuenta. "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Tiene 8 caramelos."

Angela utiliza los dedos en una estrategia de contar. Ella piensa 5 en su cabeza y dice, "5 (pausa), 6, 7, 8," levantando un dedo cada vez que dice un número. "Tiene 8 caramelos".

### Hechos numéricos.

Las soluciones de los niños a los problemas aritméticos no se limitan a las estrategias de modelar o de contar. Los niños aprenden hechos numéricos dentro y fuera de la escuela, y aplican este conocimiento para resolver los problemas aritméticos. Sin embargo, el conocimiento apropiado de los hechos numéricos no asegura que no se utilizará la modelación y el contar. Ciertas combinaciones numéricas se aprenden antes que otras; antes de que se conozcan completamente las tablas de sumar, algunos niños utilizan un pequeño grupo de hechos memorizados para generar soluciones en problemas con otras combinaciones numéricas. Los dobles (por ejemplo,  $4+4$ ,  $7+7$ ) generalmente se aprende antes que otras combinaciones, y las sumas que dan diez (por ejemplo  $7+3$ ,  $4+6$ ) con frecuencia se aprenden relativamente pronto. Ejemplos del empleo de los hechos derivados utilizados por los niños se muestran en los protocolos siguientes.

Profesor: Había 6 ranas sentadas en la orilla del río. Vinieron 8 ranas más. ¿Cuántas hay en total ahora?

Casi inmediatamente, Rosa, Diana, Teresa y Sandra contestaron "14".

Profesor: ¿Cómo lo sabeis?

Rosa: "Porque 6 y 6 son 12, y 2 más son 14".

Diana: "Ocho y ocho son 16. Pero esto es 8 y 6. Esto es 2 menos, así que son 14".

Teresa: "Bien, quito 1 de 8 y se lo doy al 6. Esto hace 7 y 7, que son 14".

Sandra: "Ocho y 2 más son 10, y 4 más son 14".

Las soluciones basadas en 'derivar hechos numéricos' se apoyan en la comprensión de las relaciones entre los números, y algunas personas pueden suponer que solo son utilizadas por un puñado de alumnos brillantes. Pero esto no es así. Incluso en una enseñanza específica, numerosos niños utilizan el proceso de generar hechos numéricos a partir de hechos recordados antes de que lleguen a manejar y recordar todos los hechos numéricos. En un estudio longitudinal de tres años de duración más del 80% de los niños utilizaron estrategias de generar hechos derivados al menos ocasionalmente desde primero a tercero, y alrededor del 40% de los niños, los 'hechos derivados' representaban su primera estrategia en algún momento durante este período. Esto sucede en diferentes momentos para diferentes estudiantes, y de esta manera no más del 10 o 15 % de los niños utilizaban 'hechos derivados' en algún momento. Sin embargo, un gran número los usaba en algún momento, cuando ellos estaban individualmente haciendo la transición desde estrategias de contar al uso de los hechos numéricos en el nivel de recuerdo.

Aunque las estrategias de contar y los 'hechos derivados' proporcionan estrategias relativamente eficientes para calcular sumas y diferencias, los niños eventualmente necesitan aprender a recordar los hechos numéricos. Ya que es simplemente demasiado trabajo tener que calcular cada hecho numérico en un cálculo implicando 10 o 20 hechos numéricos. La mayoría de los niños aprenden sus hechos numéricos, aunque algunos continúan utilizando estrategias de contar o 'hechos derivados' durante un período de tiempo amplio. Sin embargo, no debería asumirse que los niños que recuerdan hechos simplemente porque hacen bien las evaluaciones (test). Los niños llegan a ser muy hábiles en usar estrategias de contar y las pueden aplicar con mucha rapidez.

### Relación entre las estrategias y los diferentes tipos de problemas.

La relación entre las estrategias y los tipos de problemas se resume en el cuadro 3. Los niños tienden a seleccionar las estrategias que representan la acción o relaciones del problema. Sin embargo, cuando los niños empiezan a reemplazar las estrategias de modelación directa por estrategias de contar, también llegan a ser más flexibles en sus habilidades para usar las estrategias, por lo que pueden seleccionar estrategias de contar que no siempre corresponden a la acción en un problema dado.

Tipo de problema	modelación física	Procedimiento de contar
Cambio-Unir (cantidad final desconocida) y Parte-Parte-Todo (Todo la incógnita)	Contar todo	Contar desde
Cambio-Separar (cantidad final incógnita)	Separar desde 5 o de	contar hacia atrás
Cambio-Separar (Cambio incógnita)	Separar hasta	contar hacia atrás hasta
Cambio-Unir (Cambio incógnita)	Añadir hasta (Unir hasta)	Contar hasta
Comparar (diferencia incógnita)	Emparejar	***
Cambio-Unir, Cambio-Separar (Cantidad inicial incógnita)	Ensayo y error	Ensayo y error

Cuadro 2. Relación de estrategias a tipo de problemas

La acción domina en algunos tipos de problemas más que en otros. Casi todos los niños 'Unen hasta' o 'Cuentan hacia adelante' para resolver problemas de Cambio-Unir (siendo el cambio la incógnita). Los problemas de Cambio-Separar (siendo la cantidad final la incógnita) son resueltos de manera consistente con la estrategia 'Separar desde'. Debido a que es relativamente difícil contar hacia atrás, muchos niños utilizan esta estrategia de manera menos frecuente. Como consecuencia, ellos pueden seguir utilizando la estrategia 'Separar desde', cuando están usando estrategias de contar que implican contar hacia adelante para resolver otros problemas. 'Emparejar' y 'Separar hasta' son estrategias más difíciles de



emplear y no se usan de forma universal, aunque son usadas por muchos niños. Ensayo y error' se utiliza aún con menos frecuencia.

Las estrategias han sido descritas en este documento en relación a los problemas aritméticos. Los niños utilizan las mismas estrategias para resolver expresiones aritméticas que para resolver los problemas. 'Contar todo' y 'contar hacia adelante' se utilizan para resolver expresiones aritméticas aditivas. Problemas como  $8 - 3 = ?$  se resuelven utilizando las estrategias de 'Separar desde' y 'contar hacia atrás', mientras que expresiones como  $3 + ? = 8$  se resuelven mediante 'Unir hasta' o 'contar hacia adelante'.

### Niveles de desarrollo.

Existe una gran variedad en las edades en las que los niños utilizan diferentes estrategias. Cuando entran en primer curso, la mayoría de los niños pueden resolver al menos algún problema aritmético utilizando estrategias de modelación directa con objetos físicos (fichas, etc) aunque ellos tengan poco o ninguna enseñanza formal sobre la suma o la resta. Algunos alumnos de primero son capaces de utilizar estrategias de contar, y unos pocos utilizan el recuerdo de hechos numéricos o hechos derivados de manera consistente. La mayoría de los niños pasan a través de cuatro niveles básicos en la adquisición de los conceptos de suma y resta y destrezas de resolución de problemas. El primero y cuarto nivel están cada uno de ellos subdivididos en otros dos subniveles.

#### Nivel 1: Modelación directa.

Los niños en el nivel 1 se limitan a soluciones de modelación directa utilizando objetos concretos. Resuelven problemas de Cambio-Unir (cantidad final la incógnita) y Parte-Parte-Todo (siendo la incógnita el todo) utilizando las estrategias de 'Contar todo', y los problemas de Cambio-Separar (siendo la incógnita la cantidad final) utilizando la estrategia de 'Separar desde'. Los problemas que no pueden ser fácilmente modelados (por ejemplo aquellos en los que la cantidad inicial es la incógnita) no pueden ser resueltos por los niños de este nivel. Los niños del nivel 1 no tienen éxito de manera uniforme en resolver todos los problemas que pueden ser modelados, en el mejor de los casos solo un tercio de los niños en este nivel pueden resolver problemas de Comparar (siendo la incógnita la diferencia). Sin embargo si la redacción del problema de Comparar muestra claramente la estructura de la acción de comparar, los niños en este nivel podrían resolverlo.

Los niños más pequeños son limitados en sus capacidades de modelación. Estos niños no realizan ninguna previsión de lo que les puede salir y van pensando "sobre la marcha". Esto no presenta ningún tipo de problema con las estrategias 'Contar todo' y 'Separar desde', pero puede generar dificultades con 'Unir hasta'. Por ejemplo, consideremos el siguiente protocolo:

Profesor: Roberto tiene 5 coches de juguete. ¿Cuántos necesita para tener 9?

Carlos hace un grupo de 5 fichas y luego va añadiendo 4 fichas más contando "6, 7, 8, 9," según va añadiendo fichas. El no tiene cuidado en mantener las fichas añadidas un poco separadas del grupo inicial así que cuando termina de añadir fichas no puede distinguir entre las fichas añadidas y las 5 que había inicialmente. El parece confuso durante un momento y

luego cuenta el grupo entero de 9 fichas y responde "9".

Comparando este protocolo con el caso en que el niño sí tuvo éxito, descrito anteriormente al hablar de la estrategia 'Unir hasta', se pone de manifiesto los dos subniveles dentro del nivel 1. En el nivel 1a los niños sólo pueden resolver problemas de Cambio-Unir (siendo la incógnita la cantidad final), problemas de Parte-Parte-Todo (siendo el todo la incógnita) y problemas de Unir-Separar (siendo la incógnita la cantidad final). Los niños en el nivel 1b pueden pensar sobre sus estrategias de modelación. Esto les permite la habilidad de planificar sus soluciones y evitar errores como los del protocolo de Carlos anterior. Además de los problemas que pueden ser resueltos en el nivel 1a estos niños pueden resolver los problemas de Cambio-Unión (siendo la incógnita el cambio) utilizando la estrategia de 'Unir hasta'. Muchos de estos niños pueden resolver también problemas de Comparar (siendo la diferencia la incógnita) mediante una estrategia de 'emparejamiento'.

### Nivel 2: Transición al uso de estrategias de contar.

El nivel 2 es un período de transición. En este nivel los niños utilizan tanto estrategias de modelación directa como procedimientos de contar. Durante esta fase de transición, los niños utilizan todas las estrategias de adición - Contar todo, Contar desde el primer sumando y contar desde el más grande - además de 'Unir hasta' y 'Contar hacia adelante'. 'Contar hacia atrás' se utiliza con menos frecuencia.

Los niños en el nivel 2 tienen alguna flexibilidad entre el uso de estrategias de modelación directa o de contar que reflejan la estructura del problema. La estructura de los problemas Cambio-separar (siendo la incógnita la cantidad final) y de Cambio-Unir (siendo el cambio la incógnita) generalmente continúan dominando las soluciones de los niños en el nivel 2, pero los niños en este nivel resuelven los problemas de Comparar tanto utilizando la estrategia de Emparejar como de 'Contar hacia adelante'.

### Nivel 3: Estrategias de contar.

En el nivel 3 los niños se apoyan en las estrategias de contar, aunque puedan ocasionalmente utilizar la modelación directa con objetos. La mayoría de los niños usan consistentemente 'Contar desde el más grande', pero algunos niños continúan utilizando las dos estrategias de contar hacia adelante excepto en casos extremos. La mayoría de niños en este nivel pueden utilizar 'Contar hacia atrás' pero muchos de ellos no utilizan esta estrategia de manera consistente. En el nivel 3 los niños pueden representar problemas para resolverlos mediante procedimientos de contar que no son consistentes con la estructura del problema. Como consecuencia pueden resolver los problemas en los que la incógnita es la cantidad inicial, que no pueden ser modelados directamente. Generalmente también resuelven problemas de Comparar (con la diferencia la incógnita) utilizando estrategias de 'Contar hacia adelante' o 'Contar hacia atrás'.

Lo que permite a los niños ser más flexibles en su elección de estrategia es una comprensión de la relación parte-todo. Los niños en este nivel aprenden que los problemas de suma y resta pueden ser vistos en términos de partes de un todo. En una gran cantidad de problemas, las dos partes son conocidas, y el objetivo es encontrar el todo. En los otros,

una parte del todo es conocida, y el objetivo es encontrar la otra parte. Todos los problemas en los que se conocen ambas partes del todo se pueden resolver con las estrategias 'Contar todo' y 'Contar hacia adelante'; todos los problemas en que se conocen una parte y el todo se pueden resolver usando una de entre muchas estrategias, incluyendo: 'Unir hasta', 'Contar hasta', 'Contar hacia atrás desde', 'Separar desde', etc.

Para los problemas Cambio-Unir (Cantidad final incógnita), Separar (Cantidad inicial incógnita) y Parte-Parte-Todo (todo la incógnita) las dos partes son datos. Para los problemas de Cambio-Separar (cambio y cantidad final incógnita), Cambio-Unir (cambio y cantidad inicial incógnita), y Parte-Parte-Todo (parte incógnita), el todo y una de las partes es lo no conocido.

Ya que los problemas de comparar implican dos cantidades disjuntas, el esquema parte-todo no se aplica bien a estos problemas. Pero al mismo tiempo que los niños desarrollan una comprensión de la relación parte-todo, son capaces de ser flexibles en la elección de la estrategia para este problema también. En estos momentos no tenemos una descripción clara de la forma de pensar que permite esta flexibilidad.

Otro principio básico que permite a los niños ser más flexibles al tratar con los problemas de Cambio-Unir y Cambio-Separar es una comprensión de que las acciones pueden invertirse. En otras palabras, la acción de unir objetos a un conjunto puede ser deshecho quitando los objetos del grupo resultante. Por ejemplo, el siguiente problema de cantidad inicial incógnita se puede resolver invirtiendo la acción:

Carla tiene algunas canicas. Le da 3 a su amiga. Le quedan 7. ¿Cuántos caramelos tenía Carla al principio?

Si las tres canicas que fueron dadas se devuelven a las cinco que quedan se puede reconstruir el grupo inicial. Este análisis permite a los niños pensar este problema en términos de una acción de unir pudiéndolo resolver sin utilizar Ensayo y Error.

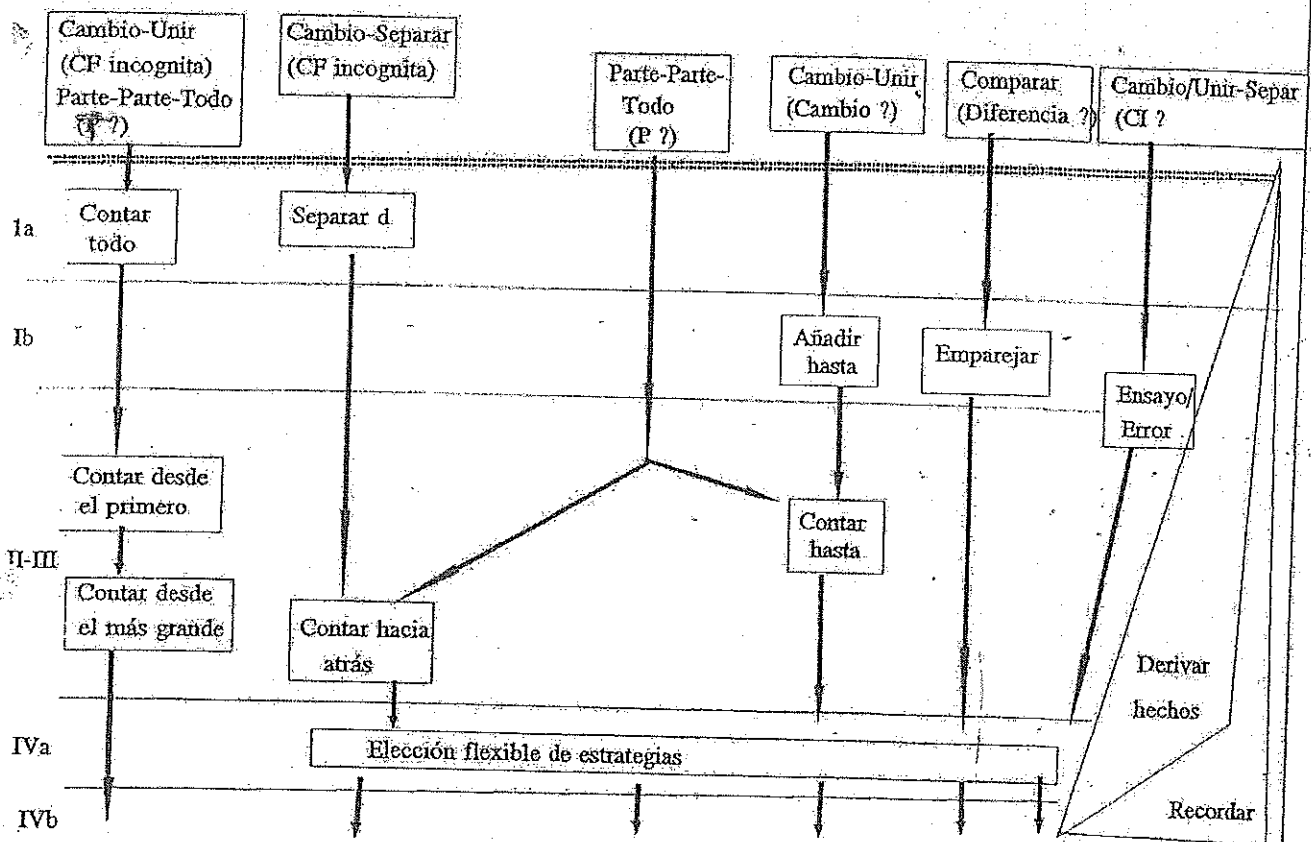
#### Nivel 4: Hechos numéricos.

En el último nivel, los niños pueden resolver problemas de sumar y restar utilizando hechos numéricos. Los Hechos numéricos no se aprenden todos de una vez, y determinados hechos numéricos se utilizan en los tres niveles anteriores de modelación y contar. Aunque no todos los niños utilizan hechos numéricos de manera consistente, es útil pensar sobre el nivel 4 estando formado por dos subniveles. En el nivel 4a, no todos los hechos numéricos se conocen, y los niños utilizan hechos derivados para muchas combinaciones. En el nivel 4b, los niños los han memorizado y los recuerdan inmediatamente.

#### Resumen de los niveles.

La relación entre las estrategias y los tipos de problemas y los niveles en los que las estrategias se pueden utilizar se representa en el cuadro 4. Este cuadro presenta una versión algo simplificada de los niveles descritos. Pero esta simplificación hace más fácil tomar decisiones relativas a la enseñanza y a la evaluación. En general la secuencia de desarrollo descrita antes se puede aplicar a muchos niños. Virtualmente todos los niños utilizan

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE LOS NIÑOS



estrategias de contar en algún momento de su desarrollo de los conceptos y destrezas de sumar y restar. Aunque muchos libros de texto presenta una secuencia que va directamente de la modelación con objetos o dibujos al aprendizaje de los hechos numéricos, los niños no realizan esta transición directamente. Muchos niños pasan a través de cada uno de los niveles descritos antes.

En un estudio de tres años de duración se pudo comprobar que dos tercios de los niños estaban en el nivel 1 o inferior al inicio del primer curso. Al final del primer curso, solo el 10% estaban en el nivel 1. Muchos niños estuvieron en el nivel 2 durante al menos 6 meses, y muchos niños estuvieron en el nivel 3 durante un período medio de 10 meses antes de que empezaran a confiar en el recuerdo de hechos numéricos. Muchos niños continuaban utilizando estrategias de contar incluso en tercer curso. Por lo tanto, es razonable esperar que muchos niños serán capaces de utilizar al menos alguna estrategia de modelación directa al principio de primer curso y que irán adquiriendo el conocimiento relativo a las estrategias de contar y recordando algunos hechos numéricos durante ese año. Pocos niños llegan a manejar el recuerdo de hechos numéricos mediante la enseñanza tradicional, aunque muchos aprenden una gran variedad de hechos que son más fáciles de recordar o se utilizan con más frecuencia. Muchos niños de primero están limitados en su flexibilidad para seleccionar estrategias de resolución de problemas aritméticos y confían en las acciones o relaciones descritas en los problemas para guiar sus procesos de solución.