

2. Resolución de problemas aritméticos

escolares en EI

Desarrollo del pensamiento
matemático infantil

Curso 2015/2016

Bloque 2

Índice

- 2. Problemas aritméticos elementales (PAEs) de estructura aditiva y multiplicativa
 - 2.1. Resolución de problemas en Educación Infantil
 - 2.2. Problemas Aritméticos Escolares de una etapa
 - 2.2.1. Clasificación de los PAEs
 - 2.3. PAEs de una etapa y estructura aditiva
 - 2.3.1. Contenido: criterios de clasificación
 - 2.3.2. Aprendizaje: dificultades
 - 2.3.3. Enseñanza: estrategias de resolución
 - 2.4. PAEs de estructura multiplicativa

Resolución de problemas en EI

Para reflexionar...

Bienés, P. (2008). *Conversaciones matemáticas con María Antonia Canals*. Barcelona: Graó. P. 30-31.

PB1. Te compran una raqueta por 15 euros y la vendes por 20 ¿ganas o pierdes? El niño contestó: “Pierdo porque me quedo sin raqueta”.

Buena lógica matemática

PB2. A un niño de cuatro años le dan un chicle y empieza a protestar porque quiere dos. Su primo, más mayor, para acabar con sus protestas se levanta, le parte el chicle y le dice: toma, uno y dos. El niño, bien contento, para de protestar.

Así es la noción de cantidad a esa edad: puede contar 2 y le parece que tiene más que al principio. El primo supo hallar una buena estrategia.

PB3. Tienes cuatro cerezas y María te da dos más ¿cuántas tendrás? La alumna, impertérrita, contesta: “A mí no me gustan las cerezas”

Las respuestas de los niños son geniales cuando no son condicionadas. Probablemente sabe que tiene 6, o que al menos tiene más, pero para ella es irrelevante. Como no le gustan no ha ganado nada. Se podría replantear: como no te gustan las cerezas ¿qué harás con ellas? ¿repartirlas? Un nuevo planteamiento supone una mejora del problema. La situación se personaliza y se hace más cercana gracias a la respuesta de la niña y la acogida del adulto.

Resolución de problemas en EI

¿Qué es un problema?

➤ EJERCICIOS

Aplicación inmediata para consolidar los conocimientos adquiridos. Se sabe qué hay que hacer porque viene dado, no hay que buscar estrategias

32

Ejemplo: *Realiza la siguiente suma: +21*

➤ PROBLEMAS

Se plantea una situación con determinadas condiciones y no se proporciona el modo de resolverlo, sino que el resolutor debe utilizar diferentes estrategias para llegar a la solución o soluciones (pueda haber más de una, dependiendo de las condiciones que se planteen)

Están ligados a procesos característicos de la actividad matemática como: formular conjeturas, argumentar, probar, etc.

Resolución de problemas en EI

¿Por qué usar problemas en infantil?

- ❖ Articular la enseñanza-aprendizaje de la aritmética en los primeros niveles relacionándola con la resolución de problemas aritméticos
- ❖ Problema como medio para desarrollar una comprensión significativa del concepto de operación y del significado de los símbolos.
- ❖ Durante la resolución de problemas se producen procesos característicos de la actividad matemática como: formular conjeturas, argumentar, probar, etc.

Resolución de problemas en El ¿Por qué usar problemas en infantil?

¿Qué es 1 2 3 4 5 6?
+ - x ?

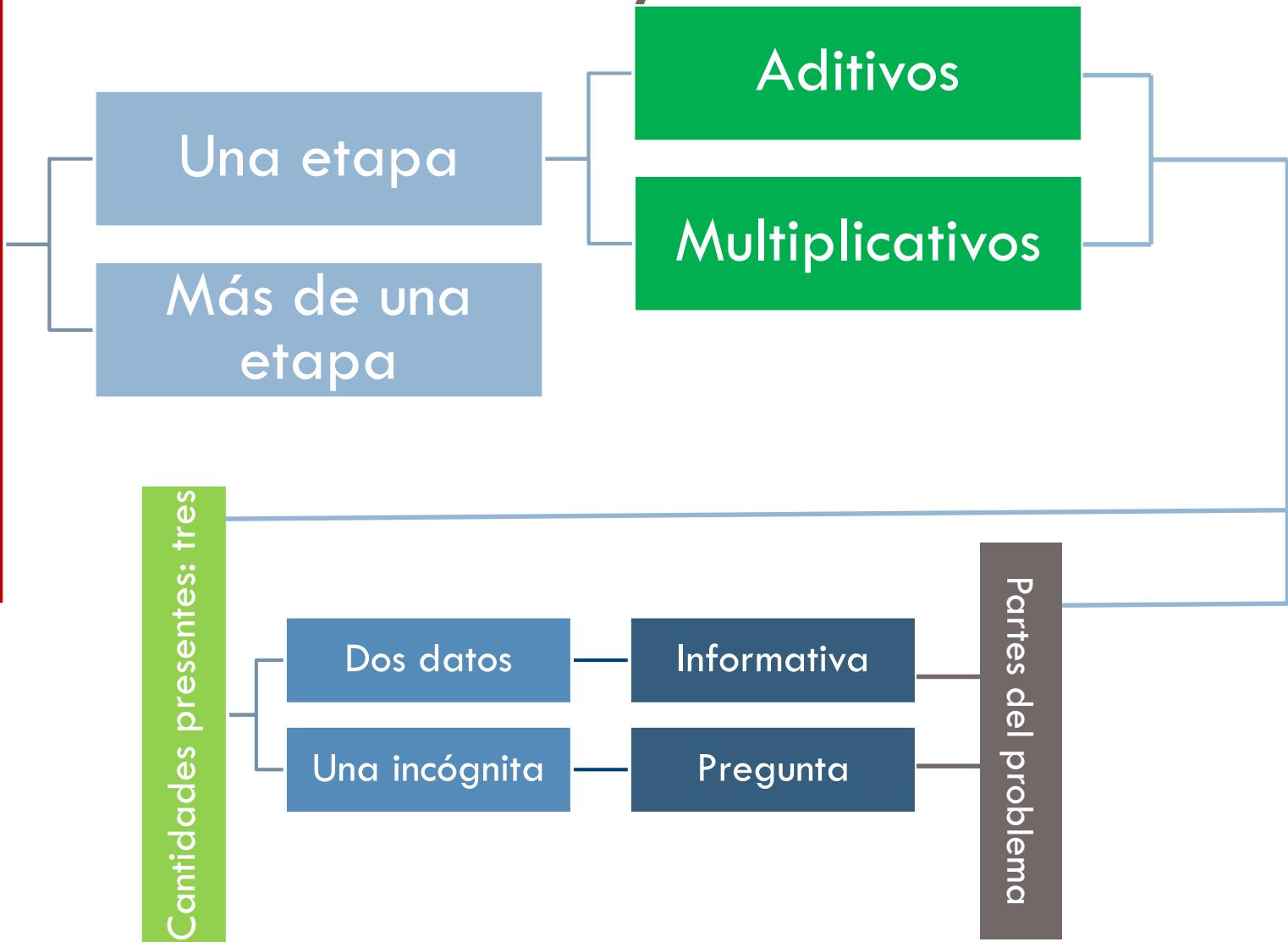
El dotar de significado a los símbolos matemáticos: plantear la enseñanza a partir de la resolución de problemas aritméticos ayuda a conectar el símbolo con su significado

La comprensión significativa de la idea de operación se apoya en la capacidad gradual del niño aplicar estrategias cada vez más sofisticadas al resolver situaciones problemáticas

eje entorno al que se articula el aprendizaje de los conocimientos matemáticos
contexto donde se generan conceptos, procedimientos y actitudes matemáticas

¿Qué significa sumar?
¿Qué significa restar?

Clasificación y estructura PAEs



Clasificación y estructura PAEs

Tipos de PAEs



Estrategias de
resolución

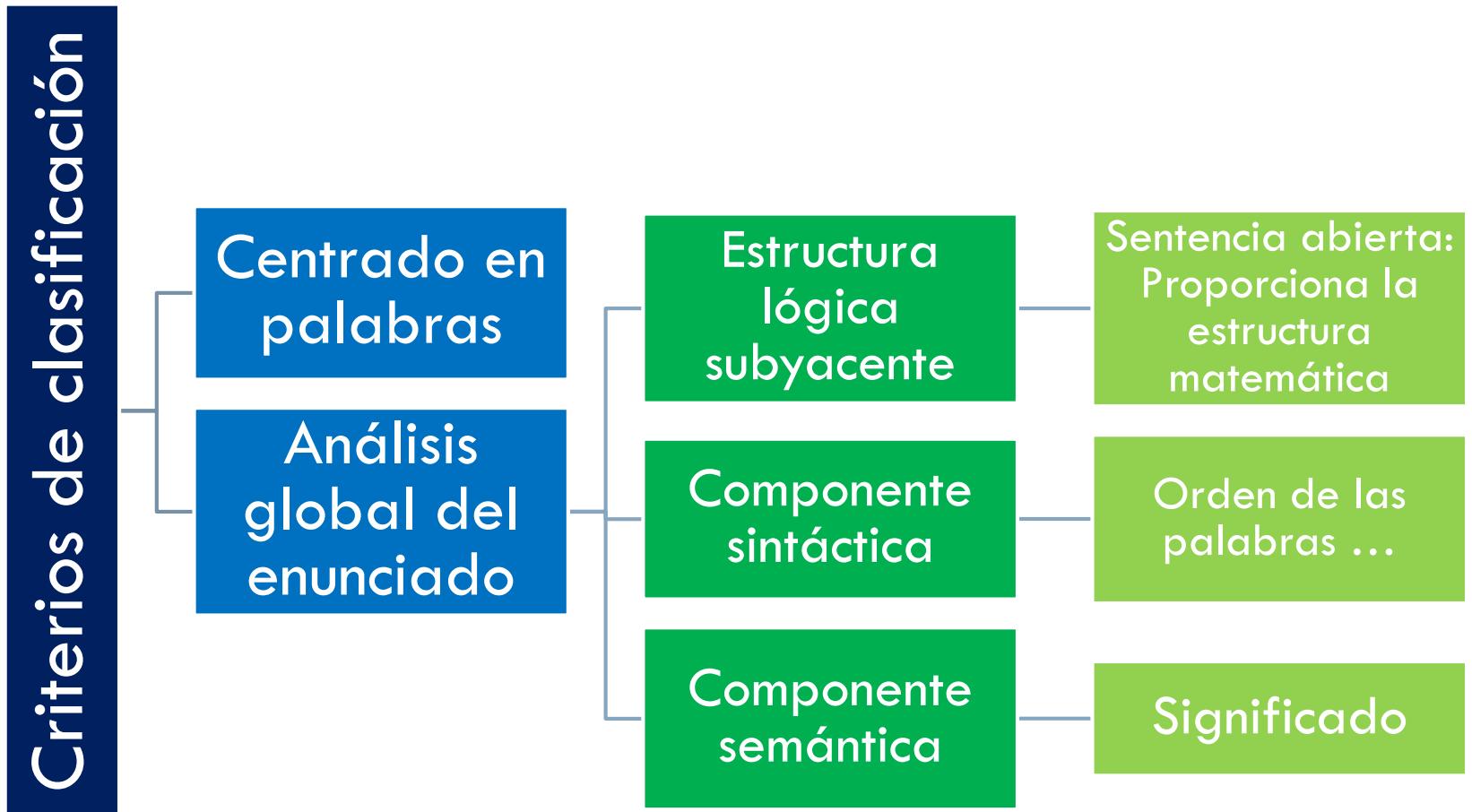
Evolución en la
comprensión del
significado del
número

Clasificación y estructura PAEs

1. Hay cuatro chicos y siete chicas alrededor de una mesa. ¿Cuántos niños hay en total?
2. Juan ha gastado 4€. Ahora tiene 7€ en su bolsillo. ¿Cuántos francos tenía antes?
3. Pedro tiene siete lápices y María tiene cuatro lápices. ¿Cuántos lápices tiene Pedro más que María?
4. Juan tiene siete canicas. Pedro tiene cuatro. ¿Cuántos tiene que ganar Pedro para tener tantas como Juan?
5. Roberto jugó dos partidas a las canicas. En la primera partida perdió cuatro canicas. Después jugó la segunda partida. En total, ha ganado siete canicas. ¿Qué pasó en el segundo juego?

¿SON TODOS IGUALES?

Clasificación y estructura PAEs



Clasificación y estructura PAEs

La sentencia abierta es una traducción secuencial del enunciado del problema.

Hay que tener en cuenta:

- 1.- Orden de los datos.
- 2.- La acción del problema, que proporcionará la operación aritmética necesaria

Yo tenía 4 chuches y mi hermana me dio otras 2. ¿Cuántas chuches tengo ahora?

Proposición abierta: $a + b = ?$

Datos:

$a = 4$ chuches iniciales

$b = 7$ chuches que me dan

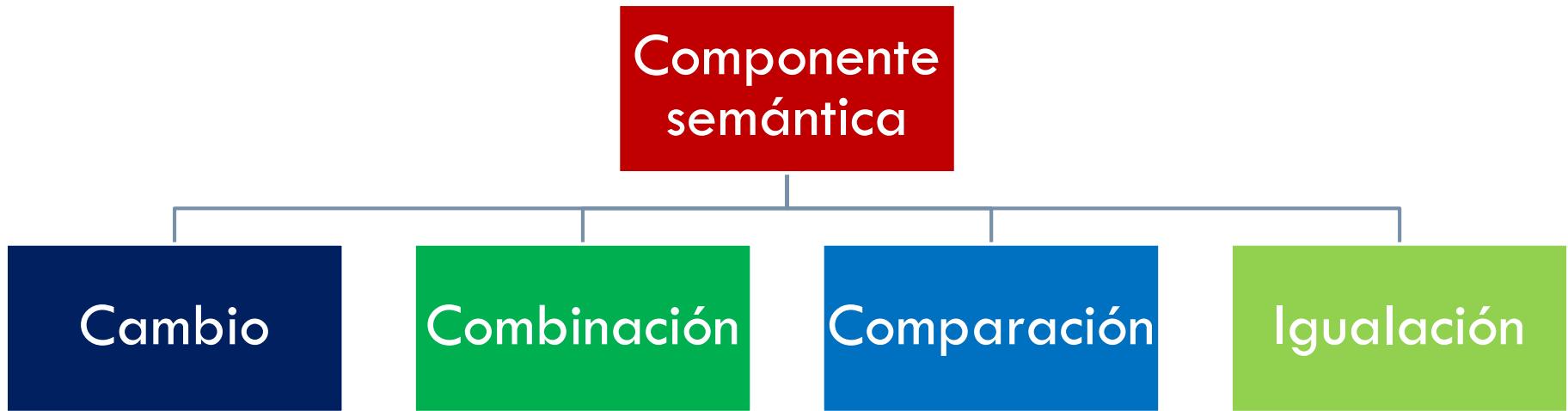
$? =$ chuches totales

Clasificación y estructura PAEs

Identifica las cantidades (datos e incógnita) y la sentencia o proposición abierta.

1. Tengo cinco caramelos y me regalan dos, ¿cuántos tengo ahora?
2. Paco tiene cuatro coches y Sara dos, ¿cuántos tienen entre los dos?
3. María tenía tres casas y ahora sólo una, ¿cuántas casas ha vendido?
5. Carmen tiene varios lápices en el estuche, Cinta le regala cuatro y ahora en total tiene en el estuche siete, ¿cuántos lápices tenía al principio?
6. Alba tiene cinco globos y entre Inma y ella tienen ocho, ¿cuántos tiene Inma?

PAEs aditivos de una etapa: Criterios de clasificación componente semántica



Analizar globalmente el significado del texto del problema es mucho más importante que el análisis por partes. Papel crucial para comprender los procesos que utilizan los niños para resolver los problemas.

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Cambio

Implican una historia: una situación inicial en la que se produce un cambio y se genera una situación final, siendo tal cambio creciente o decreciente

Situación inicial:
Tengo tres lazos

Cambio

Situación final:
¿Cuántos tengo ahora?

Creciente:
Me compro dos

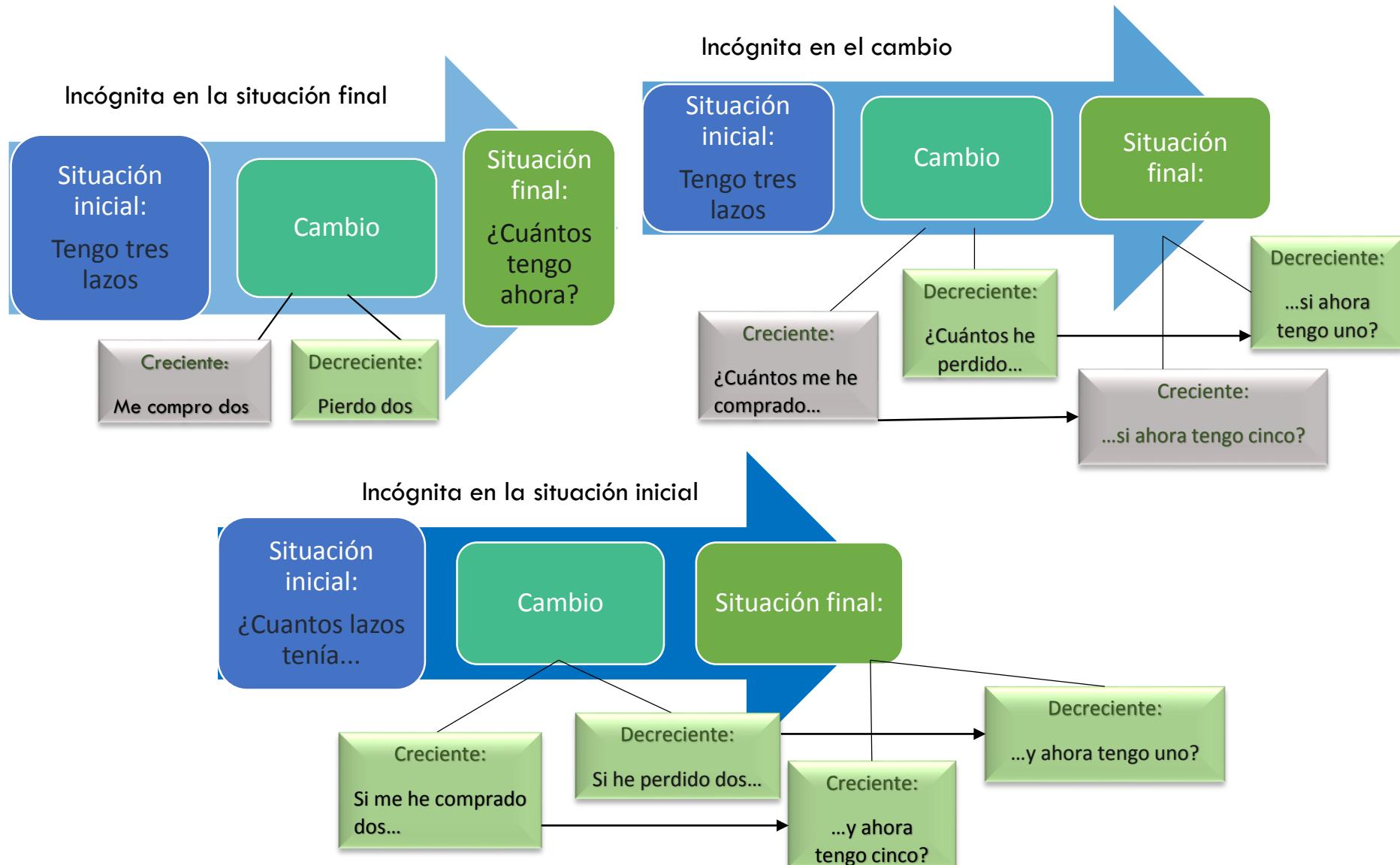
Decreciente:
Pierdo dos

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Cambio

1. Hay cuatro chicos y siete chicas alrededor de una mesa. ¿Cuántos niños hay en total?
2. Juan ha gastado 4€. Ahora tiene 7€ en su bolsillo. ¿Cuántos francos tenía antes?
3. Pedro tiene siete lápices y María tiene cuatro lápices. ¿Cuántos lápices tiene Pedro más que María?
4. Juan tiene siete canicas. Pedro tiene cuatro. ¿Cuántos tiene que ganar Pedro para tener tantas como Juan?
5. Roberto jugó dos partidas a las canicas. En la primera partida perdió cuatro canicas. Después jugó la segunda partida. En total, ha ganado siete canicas. ¿Qué pasó en el segundo juego?

¿Cambio?

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Cambio



PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Cambio

Tipo	Inicial	Cambio	Final	Crece	Decrece	Prop. Abierta	Operación
Cambio 1 Yo tenía cuatro rotuladores y mi mamá me regaló por mi cumpleaños un estuche con otros 5 rotuladores, ¿cuántos tengo ahora?	D	D	?	Sí		$a+b=?$	Suma
Cambio 2 Yo tenía cuatro rotuladores y le di a mi hermano 3 rotuladores, ¿cuántos tengo ahora?	D	D	?		Sí	$a-b=?$	Resta
Cambio 3 Yo tenía cuatro rotuladores. Mi mamá me regaló por mi cumpleaños un estuche con más rotuladores y ahora tengo 9 ¿cuántos me ha dado?	D	?	D	Sí		$a+?=c$	Resta
Cambio 4 Yo tenía cuatro rotuladores. Le di algunos a mi hermano y ahora tengo 1, ¿cuántos rotuladores le he dado a mi hermano?	D	?	D		Sí	$a-?=c$	Resta
Cambio 5 Yo tenía algunos rotuladores. Mi mamá me ha regalado por mi cumpleaños un estuche con otros 5 rotuladores y ahora tengo 9 ¿cuántos tenía antes?	?	D	D	Sí		$?+b=c$	Resta
Cambio 6 Yo tenía algunos rotuladores y mi hermano me pidió 3. Me quedan 2, ¿cuántos tenía ahora?	?	D	D		Sí	$?-b=c$	Suma

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Combinar

Relación entre tres conjuntos: dos partes disjuntas (sin elementos comunes) conforman un conjunto total. Las partes se unen para formar el todo y el todo se puede descomponer en sus partes. No hay cambios: son problemas estáticos.

Parte

Tengo cuatro caramelos
de fresa

Parte

y tres de naranja

Todo

¿Cuántos caramelos tengo?

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Combinar

- 1. Hay cuatro chicos y siete chicas alrededor de una mesa. ¿Cuántos niños hay en total?**
- 2. Juan ha gastado cuatro francos. Ahora tiene siete francos en su bolsillo. ¿Cuántos francos tenía antes?**
- 3. Pedro tiene siete lápices y María tiene cuatro lápices. ¿Cuántos lápices tiene Pedro más que María?**
- 4. Juan tiene siete canicas. Pedro tiene cuatro. ¿Cuántos tiene que ganar Pedro para tener tantas como Juan?**
- 5. Roberto jugó dos partidas a las canicas. En la primera partida perdió cuatro canicas. Después jugó la segunda partida. En total, ha ganado siete canicas. ¿Qué pasó en el segundo juego?**

¿COMBINACIÓN?

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Combinar

Incógnita en el todo

Parte

Tengo cuatro caramelos de fresa

Parte

y tres de naranja

Todo

¿Cuántos caramelos tengo?

Incógnita en una de las partes

Todo

¿Si tengo siete caramelos...

Todo

¿Si tengo siete caramelos...

Parte

...y cuatro son de fresa ...

Parte

...cuántos son de
naranja?

Parte

cuántos son de fresa ...

Parte

...si tengo tres de
naranja?

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Combinar

Tipo	Parte	Parte	Todo	Prop. Abierta	Operación
Combinar 1 En el autobús del cole vamos 5 niños y 4 niñas ¿cuántos somos en total?	Sí	Sí	?	$a+b=?$	Suma
Combinar 2 En el autobús del cole somos 9 en total. Si somos 4 niñas ¿cuántos niños hay?	Sí	?	Sí	$a+?=c$	Resta

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Comparar

Relación estática que compara dos cantidades

Cantidad
Referente:

María tiene tres
caramelos

Cantidad
Comparada:

Pedro tiene
cinco

Diferencia:
¿Cuántos tiene
Pedro
más/menos
que María?

Más que

Menos que

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Comparación



PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Combinar

- 1. Hay cuatro chicos y siete chicas alrededor de una mesa. ¿Cuántos niños hay en total?**
- 2. Juan ha gastado cuatro francos. Ahora tiene siete francos en su bolsillo. ¿Cuántos francos tenía antes?**
- 3. Pedro tiene siete lápices y María tiene cuatro lápices. ¿Cuántos lápices tiene Pedro más que María?**
- 4. Juan tiene siete canicas. Pedro tiene cuatro. ¿Cuántos tiene que ganar Pedro para tener tantas como Juan?**
- 5. Roberto jugó dos partidas a las canicas. En la primera partida perdió cuatro canicas. Después jugó la segunda partida. En total, ha ganado siete canicas. ¿Qué pasó en el segundo juego?**

¿COMPARCIÓN?

	Referencia	Comparada	Diferencia	Más	Menos	Resolución
Comparar 1 Juan tiene 5 rotuladores y Pedro tiene 3 ¿cuántos tiene Juan más que Pedro?	D	D	I	Sí		Resta
Comparar 2 Juan tiene 5 rotuladores y Pedro tiene 3 ¿cuántos tiene Pedro menos que Juan?	D	D	I	Sí		Resta
Comparar 3 Pedro tiene 3 rotuladores. Juan tiene 2 más que Pedro. ¿Cuántos tiene Juan?	D	I	D	Sí		Suma
Comparar 4 Pedro tiene 3 rotuladores. Juan tiene 2 menos que Pedro. ¿Cuántos tiene Juan?	D	I	D	Sí		Resta
Comparar 5 Juan tiene 5 rotuladores, dos más que Pedro. ¿Cuántos tiene Pedro?	I	D	D	Sí		Resta
Comparar 6 Juan tiene 2 rotuladores, 3 menos que Pedro. ¿Cuántos rotuladores tiene Pedro?	I	D	D	Sí		Suma

PAEs aditivos de una etapa: Problemas de Igualar

Relación dinámica que compara dos cantidades para saber cuántos faltan para que sean iguales

Cantidad
Referente:

María tiene
cinco caramelos

Cantidad
Comparada:

Pedro tiene tres

Diferencia:

¿Cuántos tiene
que ganar
Pedro para
tener tantos
como María?

PAEs aditivos de una etapa: Dificultades

- Proposiciones abiertas que subyacen al problema, es decir, con la estructura matemática del mismo. Es más sencillo cuando el dato que falta es el resultado (situación final en los problemas de cambio, diferencia en los problemas de comparar e igualar, el todo en los problemas de combinar)
- Dificultades sintácticas, relacionadas con el lugar en el que se encuentra la pregunta. Puede ser un problema de cambio 1 y, sin embargo, añadirle dificultad al poner la pregunta al comenzar el problema: *¿Cuántos caramelos tengo si tenía tres y me regalaron otros dos?*
- Dificultades semánticas. Los problemas de cambio son los más sencillos, mientras que los más complicados son los de igualación. Dentro de ellos, son más complicados los de tipo 5 y 6 que los demás.

Estrategias de resolución de los PAEs

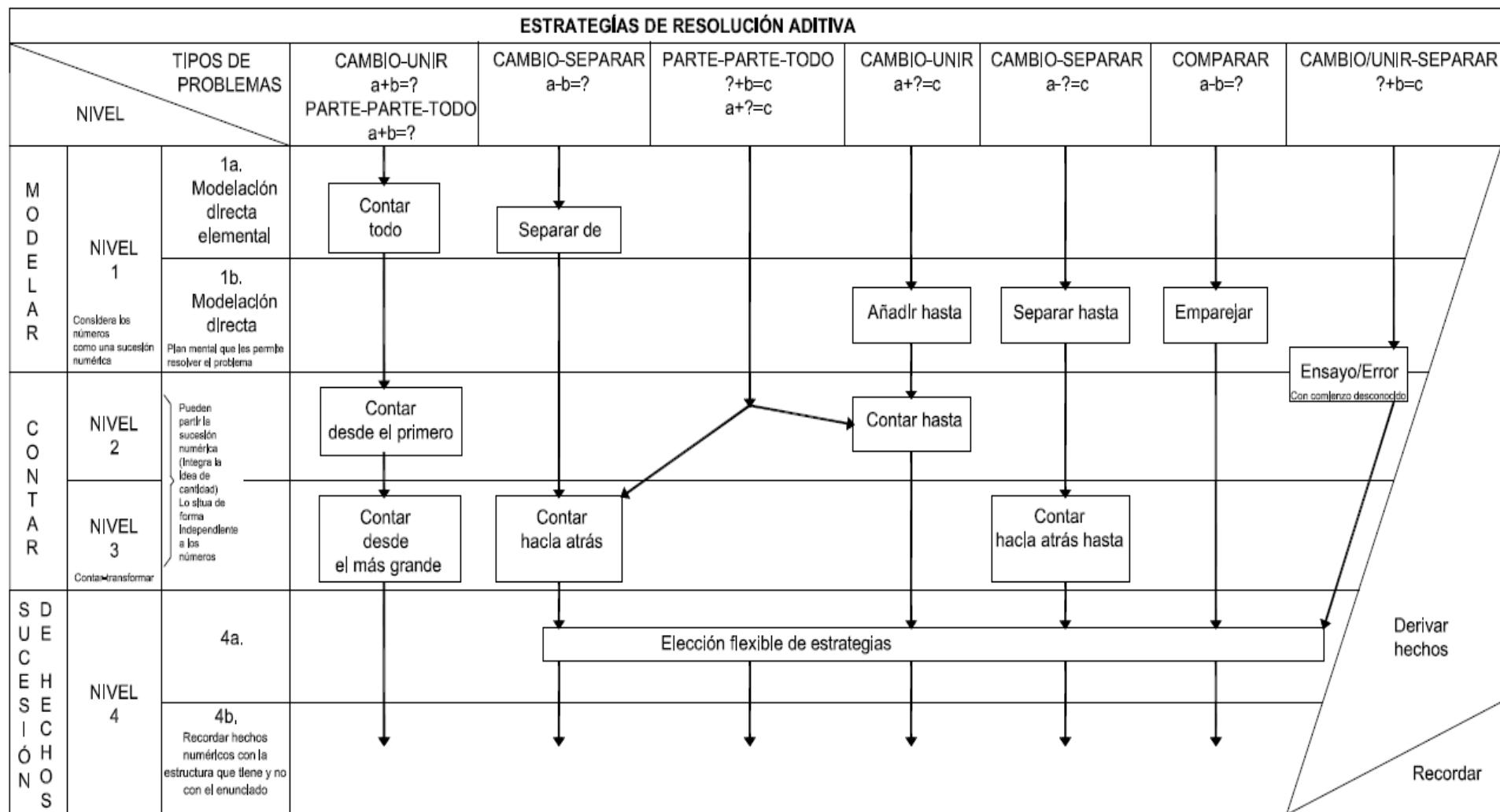
Tipos de PAEs



Estrategias de
resolución

Evolución en la
comprensión del
significado del
número

Estrategias de resolución de los PAEs



PAEs Cambio

	Inici al	Cambio	Final	Crece/decrece	ESTRATEGIA Modelación	ESTRATEGIA Conteo
Cambio 1 Yo tenía cuatro rotuladores y mi mamá me regaló por mi cumpleaños un estuche con otros 5 rotuladores, ¿cuántos tengo ahora?	D	D	I	Crece	contar todos	Contar desde el primero, o bien, Contar desde el más grande
Cambio 2 Yo tenía cuatro rotuladores y le di a mi hermano 3 rotuladores, ¿cuántos tengo ahora?	D	D	I	Decrece	Separar de	Contar hacia atrás desde
Cambio 3 Yo tenía cuatro rotuladores. Mi mamá me regaló por mi cumpleaños un estuche con más rotuladores y ahora tengo 9 ¿cuántos me ha dado?	D	I	D	Crece	Añadir hasta	Contar hacia delante hasta
Cambio 4 Yo tenía cuatro rotuladores. Le di algunos a mi hermano y ahora tengo 1, ¿cuántos rotuladores le he dado a mi hermano?	D	I	D	Decrece	Separar hasta	Contar hacia atrás hasta
Cambio 5 Yo tenía algunos rotuladores. Mi mamá me ha regalado por mi cumpleaños un estuche con otros 5 rotuladores y ahora tengo 9 ¿cuántos tenía antes?	I	D	D	Crece	Ensayo- error	
Cambio 6 Yo tenía algunos rotuladores y mi hermano me pidió 3. Me quedan 2, ¿cuántos tenía ahora?	I	D	D	Decrece	Ensayo- error	

PAEs Combinación

PAEs Combinación	Parte	Parte	Todo	ESTRATEGIA Modelación	ESTRATEGIA Conteo
Combinación 1 En el autobús del cole vamos 5 niños y 4 niñas ¿Cuántos somos en total?	D	D	I	Contar todos	Contar desde el primero, o bien, Contar desde el más grande
Combinación 2 En el autobús del cole somos 9 en total, si somos 4 niñas ¿Cuántos niños más hay?	D	I	D		Contar hasta, O bien, Contar hacia atrás

Actividad

1. Un profesor plantea el siguiente problema: María tiene 10 globos y en el camino a su casa tres globos salen volando. ¿Cuántos globos tiene cuando llega a la casa?

Mario dice: “10, 9 (levantando un dedo en su puño derecho), 8 (levanta el dedo siguiente del mismo puño), (realiza una pausa), 7 (levanta el dedo siguiente del mismo puño). Le quedan 7 globos”.

Pepa lo resuelve de la siguiente manera; extiende sus dos manos y dobla 3 dedos de manera consecutiva. A continuación cuenta los dedos que quedan extendidos: “1, 2, 3, 4, 5 y 7; le quedan 7 globos”.

- a) ¿De qué tipo de problema se trata y por qué?
- b) Justifica qué estrategia utilizan Mario y Pepa y en qué nivel de desarrollo se encuentran. Comenta el papel de los dedos en cada estrategia empleada.

Estrategias de resolución de los PAEs: hechos numéricos

7 decenas y 2 unidades

70 más 2

Es un número cuyas 2/9 partes son 16

Doble de 36

9 veces 8

40 más 32

100 menos 28

Mitad del cuadrado de 12

Doble del cuadrado de 6

Mitad de 144

$3 \times 6 \times 4$

$4 \times 2 \times 9$

Triple de 24

72

Número natural

¿Qué comprensión del número posee el alumno de cada nivel?

1. El n° es entendido en contextos orales

- Cada número es ‘anterior a’ y ‘posterior a’
- Nivel modelación directa

2. Noción de cantidad

- Se añade la idea de que el 3 se corresponde con un conjunto así: III
- Nivel de conteo. El número como contador

3. Noción del número como una entidad flexible, compuesto por otros

- Se añade la idea de que el $3=1+2=4-1=6/2\dots$
- Nivel de hechos numéricos. El número transformador y transformable

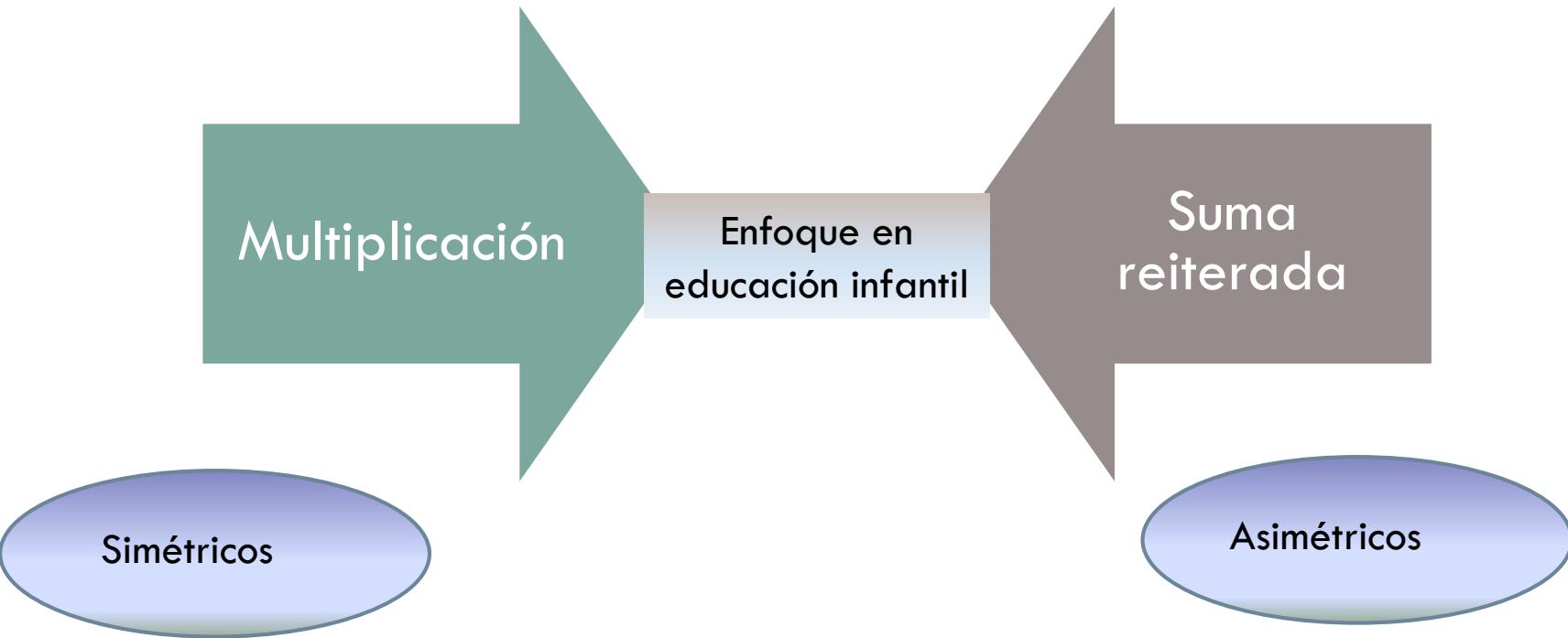
2.4. Problemas aritméticos elementales (PAE) de estructura multiplicativa de una etapa

En su enunciado presentan datos en forma de cantidades y establecen entre ellos relaciones de tipo cuantitativo, cuyas preguntas hacen referencia a la determinación de una cantidad y que necesitan la realización de una multiplicación o división para su resolución

¿Problemas multiplicativos en Educación Infantil?

<http://www.youtube.com/watch?v=0gAidHFX3kw&feature=related>

PAEs multiplicativos



los papeles de los factores son intercambiables: si tengo dos pantalones y tres camisas, ¿de cuántas formas distintas me puedo vestir

los dos factores desempeñan papeles diferentes: Si tengo tres cajas con dos rotuladores cada una, ¿cuántos rotuladores tengo?

PAEs multiplicativos

Problema	Estrategias de modelación
<p>Multiplicación: sabemos cuántos grupos tenemos y cuánto mide cada uno, queremos saber cuántos elementos tenemos en total.</p> <p>Pedro tiene 4 cajas de lápices. Hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices tiene Pedro?</p>	<p>Agrupar</p> <p>Hacer 4 grupos con 6 contadores en cada grupo. Contar todos los contadores para encontrar la respuesta.</p>
<p>División medida: tenemos la medida de los grupos y cuántos elementos tenemos en total; queremos saber cuántos grupos hay.</p> <p>Pedro tiene 24 lápices. Hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántas cajas de lápices tiene?</p>	<p>Medición</p> <p>Coger los 24 contadores. Ir separando grupos de 6. Contar los grupos formados para encontrar la respuesta.</p>
<p>División reparto: tenemos la cantidad de grupos y cuántos elementos tenemos en total; queremos saber cuánto mide cada uno.</p> <p>Pedro tiene 24 lápices. Quiere repartirlos en 4 cajas de modo que haya el mismo número de lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices hay en cada caja?</p>	<p>Reparto</p> <p>Contar 24. Se van repartiendo los 24 contadores en 4 lugares separados, uno en cada lugar, continuando el proceso hasta que se hayan utilizado todos. Cuando termina, cuenta los contadores en un grupo para encontrar la respuesta.</p>

Problema	Estrategias de conteo
Multiplicación Pedro tiene 4 cajas de lápices. Hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices tiene Pedro?	Agrupar Hacer 4 grupos con 6 contadores en cada grupo. Contar todos los contadores para encontrar la respuesta.
División medida Pedro tiene 24 lápices. Hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántas cajas de lápices tiene?	Medición Coger los 24 contadores. Ir separando grupos de 6. Contar los grupos formados para encontrar la respuesta.
División reparto Pedro tiene 24 lápices. Quiere repartirlos en 4 cajas de modo que haya el mismo número de lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices hay en cada caja?	Reparto Contar 24. Se van repartiendo los 24 contadores en 4 lugares separados, uno en cada lugar, continuando el proceso hasta que se hayan utilizado todos. Cuando termina, cuenta los contadores en un grupo para encontrar la respuesta.

¿Multiplicación y división en Infantil?

<http://eprints.ucm.es/12631/>

https://youtu.be/Wdml32qY_cA

“Elegimos el cuento de Toy Hong (1993), titulado: ***"El doble de todo***, que trata el concepto del doble. En él, **un anciano muy pobre encuentra una olla mágica en la que cualquier cosa que se introduce sale duplicada de la misma**. A partir de ahí, redujimos la complejidad de la expresión de comparación utilizando sólo el término **«doble»** y dejamos como incógnitas la cantidad comparada y la referencia”.

¿Multiplicación y división en Infantil?

<http://eprints.ucm.es/12631/>

“¿Bajo qué condiciones es posible plantear problemas de Comparación multiplicativa, que habitualmente se consideran muy difíciles, en la Educación Infantil? Hipótesis:

- reducir problemas de comparación multiplicativa a los de «doble y mitad»,
- Planteados en el último curso de Educación Infantil,
- con números inferiores a 20,
- Buscar un contexto que hiciera que los enunciados de los problemas resultasen familiares para los alumnos.(Castro, Walsh, Del Coso et al, 2009, pág. 35-36)

Para reflexionar...

Polya (1985)

"...un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad.

Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos y ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello"