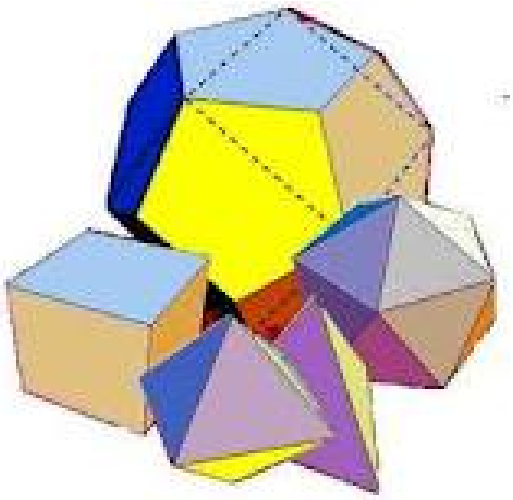
MATEMÁTICAS ACADÉMICAS

4º ESO



I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I.E.S. FERNANDO DE MENA
DPTO. DE MATEMÁTICAS
CURSO 2022-2023
Profesor: Alfonso González

Alumno: _________________________________ 4º ESO ___

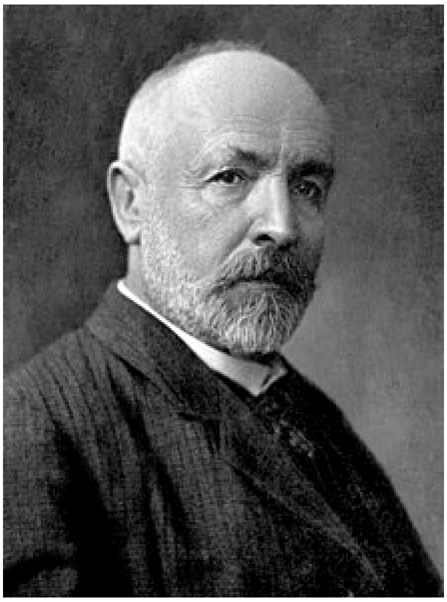
ÍNDICE

ITEMS a REFORZAR

1ª eval.	
examen parcial	**examen eval.**
1.	1.
2.	2.
3.	3.
4.	4.
5.	5.
6.	6.
7.	7.
8.	8.
9.	9.
2ª eval.	
examen parcial	**examen eval.**
1.	1.
2.	2.
3.	3.
4.	4.
5.	5.
6.	6.
7.	7.
8.	8.
9.	9.
3ª eval.	
examen parcial	**examen eval.**
1.	1.
2.	2.
3.	3.
4.	4.
5.	5.
6.	6.
7.	7.
8.	8.
9.	9.

NÚMEROS REALES

(2 semanas)



Georg Cantor *(1845-1918), matemático alemán que definió rigurosamente por primera vez el conjunto de los números reales.*

MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO

Alfonso González

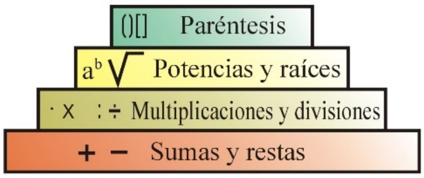
I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

IES Fernando de Mena

Dpto. de Matemáticas

I) REPASO OPERACIONES con FRACCIONES y JERARQUÍA

1°) **Jerarquía:** Recordar la pirámide:



1) Primero se hacen las operaciones entre **paréntesis**. Si la expresión contiene dos o más paréntesis anidados, se empieza desde dentro hacia fuera.
2) Calcular a continuación las potencias **potencias** y **raíces**.
3) Después se evalúan, de izquierda a derecha, los **productos** y **cocientes**.
4) Finalmente, y también empezando por la izquierda, se hacen las **sumas** y **rectas**.

2°) Si hay varios **operadores con la misma jerarquía**, se hacen **de izquierda a derecha**:

Ejemplo 1: $\frac{4}{3} : \frac{5}{6} \cdot \frac{17}{6} =$ *(Sol: 68/15)*

3°) Algunas veces conviene **quitar convenientemente paréntesis** en vez de efectuar el interior:

Ejemplo 2: $\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) =$ *(Sol: – 1/2)*

$\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) =$

4°) Obligatorio **simplificar cada fracción en cada paso** antes de continuar: para ello factorizamos ambos términos de la fracción convenientemente (¡no necesariamente en factores primos!) y cancelamos factores repetidos arriba y abajo:

Ejemplo 3: $\frac{33}{13} \cdot \frac{37}{66} =$ *(Sol: 37/26)*

$\frac{8}{4} : \frac{4}{2} =$ *(Sol: 1)*

$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2+3} =$ *(Sol: 6)*

$\frac{\frac{2}{35}}{\frac{3}{35}} =$ *(Sol: 2/3)*

$\frac{\frac{95}{3}}{\frac{95}{7}} =$ *(Sol: 7/3)*

5°) **Fracciones de fracciones:** Multiplicamos los térmonos más alejados y lo dividimos por el producto de los términos más cercanos:

barra de sub-fracción

barra de fracción (principal)

$$\frac{\dfrac{A}{B}}{\dfrac{C}{D}} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Caso particular: $\dfrac{1}{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{B}{A}$ (i.e. **fracción inversa**)

Ejercicios: Fichas 1 a 5 ← repaso operaciones combinadas con fracciones (en línea y "castillos")

II) REPRESENTACIÓN y COMPARACIÓN de FRACCIONES

Hay tres formas alternativas de comparar fracciones, es decir, de ponerlas en orden (normalmente de menor a mayor):

1º) Pasarlas todas a común denominador y comparar sus numeradores. ← LA MEJOR OPCIÓN

2º) Pasarlas a forma decimal.

3º) Representarlas en la recta real y hacer un barrido de izquierda a derecha.

Ejercicios: **1 a 6 ficha de "Números reales"** ← representación y comparación de fracciones

7 a 12 ficha de "Números reales" ← fracción generatriz

III) CLASIFICACIÓN de los NÚMEROS REALES

infinito

III.1) Naturales:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5...\}$ ← Hay ∞ números naturales

Recordar: para definir un conjunto siempre se usan llaves

III.2) Enteros:

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5...\}$ ← Nótese que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

proviene de "zahlen", que en alemán significa "número"

"contenido en"

III.3) Racionales:

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,/\, a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$

"el conjunto de todos los"

"tales que"

"y"

Es decir, "**Los racionales son los números que pueden ser expresados como una fracción de enteros**".

v.g. $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ $\quad -\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{13}{6} \in \mathbb{Q}$

$0.5 \in \mathbb{Q}$ $\quad -0.\overset{\frown}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad 2.1\overset{\frown}{6} \in \mathbb{Q}$

exacto

periódicos

Definición alternativa: "**Los racionales son aquellos números cuya expresión decimal es exacta o periódica**".

Nótese que los enteros pueden ser considerados como racionales, por ejemplo con denominador 1:

v.g. $3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{-9}{-3}=\ldots\in\mathbb{Q}$ $\quad -7=-\frac{7}{1}\in\mathbb{Q}$, etc.

Por tanto, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

III.4) Irracionales $(\mathbb{I})$: son aquellos números que no son racionales. Por tanto:

1ª definición: "**Los irracionales son aquellos números que no pueden ser expresados como fracción de enteros**".

v.g. $\pi\in\mathbb{I}$ $\quad \sqrt{2}\in\mathbb{I}$ (en realidad, todas las fracciones no exactas son $\mathbb{I}$)

$\downarrow$ $\quad \downarrow$

$3.141592654\ldots\in\mathbb{I}$ $\quad 1.414213562\ldots\in\mathbb{I}$ $\quad 1.01001000100001\ldots\in\mathbb{I}$

Definición alternativa: "**Los irracionales son aquellos números cuya expresión decimal consta de ∞ cifras no periódicas**".

Notas:

1st) No hay un símbolo matemático universalmente aceptado para los irracionales. De forma rigurosa, el conjunto de los irracionales se define como el conjunto de números reales "menos" el conjunto de los racionales, es decir, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. No obstante, nosotros usaremos el muy extendido símbolo $\mathbb{I}$.

2nd) ¡Cuidado!: Irracional significa lo opuesto a racional, pero nosotros aquí lo usamos en un sentido muy distinto al habitual; es decir, algo es irracional cuando no es lógico o razonable.

III.5) Números reales $(\mathbb{R})$: incluyen a todos los racionales e irracionales: $\boxed{\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}}$.

Notas:

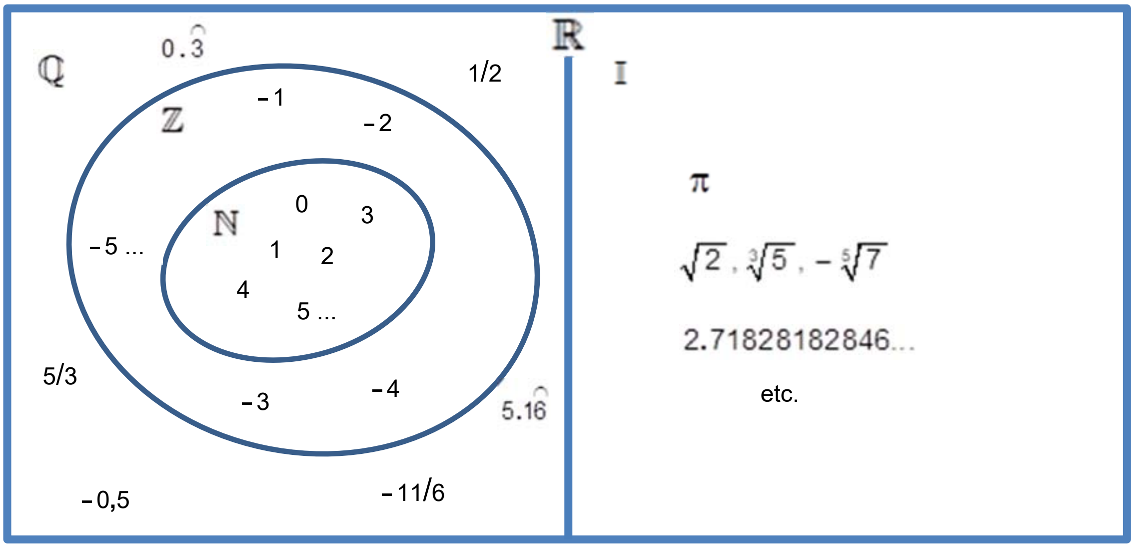
1°) Nótese que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\varnothing$.

2°) Racionales = Fraccionarios (enteros incluidos) = Periódicos o exactos.

Irracionales = Ni periódicos ni exactos.

3°) Los enteros pueden ser considerados como fraccionarios, como ya se ha dicho.
Los decimales exactos pueden ser considerados como periódicos de período 0.

4°) Veamos dos posibles diagramas resumen de todo esto:



- **REALES** $\mathbb{R}$
  - **RACIONALES** $\mathbb{Q}$
    - **ENTEROS** $\mathbb{Z}$
      - **NATURALES:** $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5...\}$
      - **ENTEROS NEGATIVOS:** $\mathbb{Z}^{-}=\{0,-1,-2,-3,-4...\}$
    - **FRACCIONARIOS**
      - **DECIMALES EXACTOS:** $1.5=\frac{3}{2}$
      - **PERIÓDICOS:** $-3.1\overset{\frown}{6}=-\frac{19}{6}$
  - **IRRACIONALES** $\mathbb{I}$
    - π
    - **RAÍCES NO EXACTAS:** $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, -\sqrt[5]{7}$
    - 1.01001000100001...

Ejercicios: 13 a 18 ficha de "Números reales"

IV) INTERVALOS en la RECTA REAL

infinito

TIPO de INTERVALO	SÍMBOLO	REPRESENTACIÓN en la RECTA REAL	¿QUÉ ES?	DEFINICIÓN MATEMÁTICA
INTERVALO CERRADO	$[a,b]$	a b	Representa los ∞ números reales comprendidos entre **a** y **b**, **incluidos** ambos extremos.	$\{x\in\mathbb{R} / a\leq x\leq b\}$
INTERVALO ABIERTO	(a,b)	a b	Representa los ∞ números reales comprendidos entre **a** y **b**, **excluidos** ambos extremos.	$\{x\in\mathbb{R} / a<x<b\}$

INTERVALOS SEMIABIERTOS	SEMIABIERTO por la IZQUIERDA	$(a,b]$		Representa los ∞ números reales entre **a** (excluido) y **b** (incluido).	$\{x\in\mathbb{R}/\ a<x\leq b\}$
	SEMIABIERTO por la DERECHA	$[a,b)$		Representa los ∞ números reales entre **a** (incluido) y **b** (excluido).	$\{x\in\mathbb{R}/\ a\leq x<b\}$
INTERVALOS INFINITOS (semirrectas)		(a,∞)		Representa los ∞ números reales mayores que **a**.	$\{x\in\mathbb{R}/\ x>a\}$
		$(-\infty,b]$		Representa los ∞ números reales menores o iguales que **b**.	$\{x\in\mathbb{R}/\ x\leq b\}$

Notas:

1°)

extremo:	tipo de paréntesis:	símbolo de desigualdad:	significado:	nombre:	significado:
● un círculo relleno	[o]	$\leq$ o $\geq$	INCLUIDO	CERRADO	los extremos **pertenecen** al intervalo
○ un círculo vacío	(o)	< o >	NO INCLUIDO	ABIERTO	los extremos **no pertenecen** al intervalo

2°) El paréntesis del ∞ es lógicamente siempre (o).

3°) Nótese que $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ $\quad\mathbb{R}^+=[0,\infty)$ $\quad\mathbb{R}^-=(-\infty,0]$

4°) ¿Cómo se nombran los intervalos?:

$[-1,2]$ se lee "intervalo cerrado (de extremos) -1 2" o "intervalo -1 2 cerrado"

$(-2,2)$ se lee "intervalo abierto (de extremos) -2 2" o "intervalo -2 2 abierto"

$(-3,0]$ se lee "intervalo (de extremos) -3 abierto (a) 0 cerrado"

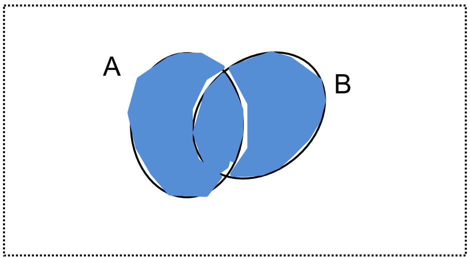
$[1,3)$ se lee "intervalo (de extremos) $-$ 1 cerrado (a) 3 abierto"

$(-1,\infty)$ se lee "intervalo -1 abierto (a) ∞"

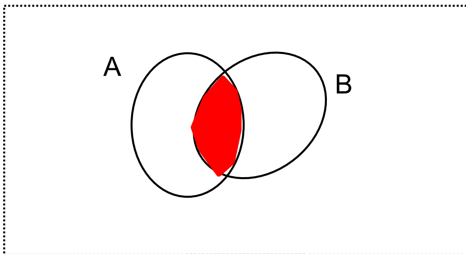
$(-\infty,0]$ se lee "intervalo $-\infty$ a 0 cerrado"

Ejercicio: 19 ficha de "Números reales"

5°)



A U B



A ∩ B

unión

$A\cup B$ es el conjunto que contiene todos los elementos pertenecientes a A **o** B.

NOTA: La conjunción "o" normalmente significa la U.

intersección

$A\cap B$ es el conjunto de todos los elementos **comunes a** A **y** B.

NOTA: La conjunción "y" o "al mismo tiempo, simultáneamente" normalmente es la ∩.

Podemos entender todo esto por medio de un diagrama de Venn[1] (la U e ∩ están sombreadas).

Ejercicios: **20 a 26 ficha de "Números reales"** ← U e ∩ de intervalos

Fichas 1 y 2 de "Repaso proporcionalidad y porcentajes"

V) APROXIMACIONES y ERRORES

V.1) Redondeo de números decimales: cifras significativas

En muchas ocasiones damos un resultado aproximado a un cálculo. Por ejemplo, si tenemos que expresar cuánta gente votó en unas elecciones, 57 000 podría ser mejor que el número exacto, 56 897. Así, necesitamos acortar o **redondear** números que tienen más cifras de las necesarias. También utilizamos números aproximados cuando no sabemos la cantidad exacta...

Procedimiento general de redondeo:

Redondear **a la parte entera**:

Se lee "aproximadamente"

$52,\boxed{83}$ ← si la parte decimal es $>0,5000000...$, redondeamos para arriba $\Rightarrow$ $52,83\approx 53$

$52,\boxed{35}$ ← si la parte decimal es $<0,5000000...$, no cambiamos la parte entera (i.e. redondeamos por debajo, truncamos) $\Rightarrow$ $52,35\approx 52$

¿Qué pasa si la parte decimal es 0,5000000…? Piénsese.

Redondear **a las décimas**:

$237,7\boxed{55}$ ← si la parte decimal a la derecha es $>0,05000000...$, redondeamos al alza $\Rightarrow$ $237,755\approx 237,8$

$237,7\boxed{49}$ ← en caso contrario, no cambiamos el 1[er] decimal y borramos el resto (i.e. truncamos) $\Rightarrow$ $237,749\approx 237,7$

Redondear **a las centésimas**:

$-1,21\boxed{605}$ ← si la parte decimal a la derecha es $>0,005000000...$, redondeamos $\Rightarrow$ $-1,21605\approx -1,22$

$-1,21\boxed{499}$ ← en caso contrario, no cambiamos el 2º decimal y truncamos el resto $\Rightarrow$ $-1,21499\approx -1,21$

Ejemplo 4: **a)** Redondear 39,748 a la parte entera: $39,748\approx$ _____

Redondear 39,748 a las décimas: $39,748\approx$ _____

Redondear 39,748 a las centésimas: $39,748\approx$ _____

b) Escribir 278 463 con 3 cifras significativas[2] correctas: $278\,463\approx$ __________

Escribir 0,0076584 con 3 cifras significativas correctas: $0,0076584\approx$ __________

[1] **John Venn** (1834-1923), matemático y filósofo inglés famoso por introducir los diagramas homónimos, los cuales se utilizan en Lógica, Teoría de Conjuntos, Probabilidad, Estadística, Informática, etc.

2 Ver anexo.

V.2) Errores

Puesto que ninguna medida es exacta, siempre existe la posibilidad de cometer un error:

Error absoluto, ε_a es la diferencia entre el valor medido o inferido de una cantidad y su valor real:

$$\boxed{\varepsilon_a = |\text{valor real} - \text{valor aproximado}|} \qquad (1)$$

Ejemplo 5: Medimos el ancho de un libro usando una regla con marcas milimétricas y resulta ser 75 mm. Lógicamente lo más apropiado es dar el resultado en milimetros. En otras palabras, podemos decir que el ancho es 75 ± 1 mm, esto es, el error absoluto es 0,5 mm. Nótese que el **error absoluto** en la medida **es 5 unidades a partir de la primera cifra que no se utiliza**.

- Sin embargo, el error absoluto realmente no nos dice mucho sobre cómo de grande es el error. Tenemos que incorporar a la fórmula el valor real:

Error relativo, ε_r es el cociente entre el error absoluto y el valor real:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\text{valor real}}} \qquad (2)$$

El error relativo se suele multiplicar por 100 para así expresarlo como un porcentaje.

Ejemplo 6: El velocímetro de un coche marca 60 km/h cuando en realidad va a 62 km/h, de acuerdo con la medición más precisa del GPS. Hallar ε_a y ε_r.

Solución: $\varepsilon_a = |\text{valor real} - \text{valor aproximado}| = |62 - 60| = \boxed{2 \text{ km/h}}$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\text{valor real}} \cdot 100 = \frac{2}{62} \cdot 100 \cong \boxed{3.2\%}$$

Notas:

1°) El ε_a tiene las mismas unidades que el valor medido, mientras que ε_r no tiene unidades (realmente es un %).

2°) **Cuanto más pequeño es el error cometido, más precisa es la medida realizada.**

Vocabulario:

1	2	3	4	,	5	6	7	8	9	1	2	3	4
↑	↑	↑	↑		↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
ÚNIDADES de MILLAR	CENTÉSIMAS	DECENAS	UNIDADES		DÉCIMAS	CENTÉSIMAS	MILÉSIMAS	DIEZMILÉSIMAS	CIENMILÉSIMAS	MILLONÉSIMAS	DIEZMILLONÉSIMAS	CIENMILLONÉSIMAS	BILLONÉSIMAS

Ejercicios: 29 a 38 ficha de "Números reales"

ANEXO: CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Cifras significativas son aquellas cifras necesarias para convertir un número a notación científica.

Hay dos casos:

1º) **Ceros al final:** **Ejemplo:** Escribir 278 463 con 3 cifras significativas correctas.

Solución: $278\,463 \approx \boxed{278}000$ tiene 3 cifras significativas porque $278\,000 = 2{,}78 \cdot 10^{5}$

2º) **Ceros al ppo.:** **Ejemplo:** Escribir 0,0076584 con 3 cifras significativas correctas.

Solución: $0{,}0076584 \approx 0{,}00\boxed{766}$ tiene 3 cifras significativas ya que $0{,}00766 = 7{,}66 \cdot 10^{-3}$

¡Esto es un convenio matemático! Pueden encontrarse otros criterios. Nosotros en este texto seguiremos esta convención.

26 EJERCICIOS DE FRACCIONES HOJA 1

Resolver las siguientes operaciones con fracciones en línea, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $\frac{5}{4}-\frac{2}{4}=$ *(Soluc: 3/4)*

2. $\frac{5}{5}-\frac{4}{4}=$ *(Soluc: 0)*

3. $\frac{5}{5}-\frac{16}{4}=$ *(Soluc: -3)*

4. $-\frac{2}{3}-4=$ *(Soluc: -14/3)*

5. $\left(32+\frac{1}{2}-4\right)-\left(16-\frac{3}{2}-2\right)=$ *(Soluc: 16)*

6. $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: 13/20)*

7. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: 7/10)*

8. $1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=$ *(Soluc: 13/15)*

9. $\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{5}=$ *(Soluc: 1/15)*

10. $-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=$ *(Soluc: 0)*

11. $-2-\frac{1}{3}=$ *(Soluc: -7/3)*

12. $\frac{17}{15}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{3}=$ *(Soluc: 39/25)*

13. $\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: -1)*

14. $-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: -8/15)*

15. $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}=$ *(Soluc: 1/3)*

16. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=$ *(Soluc: 19/30)*

17. $\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=$ *(Soluc: -34/75)*

18. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{12}+\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{3}=$ *(Soluc: 151/36)*

19. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{12}+\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{3}=$

(Soluc: 157/36)

20. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}-\frac{2}{14}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}=$ *(Soluc: -1/14)*

21. $-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{7}-\frac{2}{14}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}=$

(Soluc: 1/7)

22. $\frac{21}{2}-\frac{19}{2}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}\right)-\frac{9}{2}:\frac{3}{4}=$

(Soluc: -11/2)

23. $\frac{17}{9}-\frac{15}{5}+\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{15}\right)+\frac{14}{3}:\frac{16}{8}=$

(Soluc: 26/9)

24. $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}:\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{9}+4\right)=$

(Soluc: 73/15)

25. $\frac{21}{2}-\frac{19}{2}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}\right)=$

(Soluc: 1/2)

26. $\dfrac{\left(\frac{3}{4}+2\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{5}-\dfrac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}{4}=$

(Soluc: -3/4)

CURIOSIDAD MATEMÁTICA: *El matemático italiano Leonardo de Pisa (1ª mitad s. XIII), más conocido como **Fibonacci**, fue el primero en utilizar la notación actual para fracciones, es decir, dos números superpuestos con una barra horizontal entre medias.*

20 EJERCICIOS DE FRACCIONES **HOJA 2**

Resolver las siguientes operaciones con fracciones en línea, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $\frac{2}{3}+\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]=$ *(Soluc: 13/12)*

2. $\frac{4}{5}-\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\left(2+\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{3}+4:\frac{6}{5}=$

(Soluc: 13/10)

3. $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{10}\right)-\frac{5}{4}+\left(\frac{3}{5}:4\right)+\frac{12}{5}=$

(Soluc: 193/60)

4. $2+\frac{1}{5}:\left(2+\frac{7}{3}-\frac{2}{4}+\frac{5}{3}\right)=$

(Soluc: 112/55)

5. $\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{5}+\frac{2}{8}\right)\cdot\frac{3}{2}-\frac{7}{5}:\frac{4}{7}=$

(Soluc: -797/280)

6. $2\,\frac{-301}{65}-3\,\frac{-109}{65}-2\,\frac{5}{13}=$

(Soluc: −5)

7. $\frac{21}{5}+\frac{15}{4}\cdot\frac{16}{3}-\frac{15}{30}+\frac{12}{4}:\frac{5}{4}+3=$

(Soluc: 291/10)

8. $\frac{2}{3}-\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=$

(Soluc: -37/20)

9. $2-\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\right]-\left(\frac{4}{3}+2\right)-\frac{1}{5}=$

(Soluc: -49/30)

10. $2+\left(\frac{5}{2}-3\right)-\left[\frac{7}{10}-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)\right]=$

(Soluc: 29/20)

11. $-\frac{3}{8}+\left(4-\frac{1}{2}\right)-\left[\left(2-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{8}\right)\right]=$

(Soluc: -1)

12. $\left(\frac{4}{3}-\frac{-1}{9}\right)+\left[2-\left(-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{7}{2}=$

(Soluc: 19/36)

13. $\left[\left(\frac{4}{6}+\frac{1/7}{2}\right):\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{12}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\right)=$

(Soluc: 31/165)

14. $\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot 3-\frac{1+2/5}{3}\right]=$

(Soluc: 259/225)

15. $\frac{4}{5}:\left[\frac{12}{16}\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{8}\right]-3\left[\frac{1}{6}:\left(1-\frac{2}{5}\right)\right]=$

(Soluc: 71/30)

16. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}:\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{8}+1\right)=$

(Soluc: 23/26)

17. $3\,\dfrac{-301}{65}-2\,\dfrac{-109}{65}+4\,\dfrac{5}{13}=$

(Soluc: –9)

18. $3\,\dfrac{-33}{7}-2\,\dfrac{-7}{4}+4\,\dfrac{23}{56}=$

(Soluc: –9)

19. $2\,\dfrac{-33}{7}-3\,\dfrac{-7}{4}-2\,\dfrac{23}{56}=$

(Soluc: –5)

20. $5\,\dfrac{-33}{7}+3\,\dfrac{-7}{4}+2\,\dfrac{23}{56}=$

(Soluc: –28)

17 EJERCICIOS DE FRACCIONES HOJA 3

Operar las siguientes fracciones de términos racionales, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=$ *(Soluc: 33/5)*

2. $\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}}=$ *(Soluc: 7/24)*

3. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right):\frac{1}{6}}=$ *(Soluc: 1/16)*

4. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-4}{\left(3+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{3}}=$ *(Soluc: -39/17)*

5. $\dfrac{\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{2}{3}\right)}{1+\frac{5}{4}:\frac{3}{12}}=$ *(Soluc: 35/27)*

6. $\dfrac{1+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}}{1-\dfrac{1-\frac{1}{3}}{3}}=$ *(Soluc: 9/4)*

7. $\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}-3}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+3}=$ *(Soluc: -73/98)*

8. $\dfrac{\left(\frac{2}{5}:3+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{7}}{\frac{2}{5}\cdot3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{7}}=$

(Soluc: -47/606)

9. $\dfrac{\frac{3}{5}:\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}\right)+3}{\left[\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{2}\right]:\frac{1}{2}}=$

(Soluc: 1323/3665)

10. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{2}:\frac{1}{4}+5}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{2}:\frac{1}{4}+5\right)}=$

(Soluc: -31/9)

11. $\dfrac{\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}+2\right)\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}:\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{3}}=$

(Soluc: 81/50)

12. $\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{6}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{5}-\frac{6}{4}}-\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{6}{5}}=$

(Soluc: 893/1512)

13. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{2+\frac{5}{2}-\frac{1}{6}}\cdot\dfrac{2}{1-\dfrac{3}{2-\frac{1}{4}}}=$

(Soluc: -49/130)

14. $\dfrac{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}:1-\frac{5}{4}+\frac{17}{3}}{\frac{15}{3}+\frac{2}{5}}=$

(Soluc: 205/162)

15. $\dfrac{\left[-3+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{27}\right)\right]:\frac{3}{2}}{\left(\frac{2}{5}-3:\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{8}{27}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)}=$

(Soluc: 59/32)

16. $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}}{2+\frac{1}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)}=$

(Soluc: 55/152)

17. $\dfrac{\frac{5}{3}-\left[\frac{2}{3}:\frac{2}{5}-\left(3+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\frac{3}{11}}{\frac{14}{3}-\frac{13}{3}:\left(\frac{2}{5}-3\right)+\frac{1}{2}}=$

(Soluc: 13/41)

18 EJERCICIOS DE FRACCIONES **HOJA 4**

Operar las siguientes fracciones de términos racionales, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $$\frac{\frac{1}{3}:\left(2+\frac{2}{5}\cdot\frac{25}{8}\right)}{\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}:2\right)\cdot\frac{25}{8}}=$$

(Soluc: -64/455)

2. $$\frac{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\,\frac{25}{6}-2:\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}\left(\frac{1}{5}-2\right)-\frac{1}{3}}=$$

(Soluc: 27/17)

3. $$\frac{2-\frac{5}{3}:\left(1+\frac{1}{5}\right)-2}{2:\frac{5}{3}+1-\frac{1}{5}:2}=$$

(Soluc: -125/189)

4. $$\frac{\frac{3}{5}:\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}:\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{9}\right)}{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}:\frac{2}{5}\,\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}+\frac{10}{9}\right)}=$$

(Soluc: 585/347)

5. $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=$$

(Soluc: 8/5)

6. $$\frac{\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right]\frac{2}{5}-3}{\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}:\frac{1}{3}\,\frac{2}{5}-3}=$$

(Soluc: 311/342)

7. $$3+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{3}}}=$$

(Soluc: 139/39)

8. $$\frac{\frac{1}{2}\,\frac{8}{3}+\frac{3}{5}:\frac{9}{25}-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{3}{5}\right):\frac{9}{25}+1}=$$

(Soluc: 108/299)

9. $$\frac{\frac{3}{5}:3-2\,\frac{3}{8}+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)-3}=$$

(Soluc: -21/380)

10. $$\frac{\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,\frac{8}{27}\right)\frac{2}{5}-3\right]:\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\frac{8}{27}\left(\frac{2}{5}-3:\frac{3}{2}\right)}=$$

(Soluc: 59/32)

11. $$1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7}}}=$$

(Soluc: 233/151)

12. $$\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}-3\right)+\frac{29}{6}:5}{1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5}}:\left(2-\frac{28}{19}\right)}=$$

(Soluc: 1/2)

13. $$\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{15}{8}\,\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{10}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\,\frac{12}{5}\right)}=$$

(Soluc: -125/28)

14. $$\frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\left(2-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right):\frac{2}{5}-\frac{1}{5}}{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}:2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}:\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{5}}=$$

(Soluc: 128/33)

15. $$\frac{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{6}+\frac{2}{24}\right)-\left(\frac{2}{30}-\frac{1}{4}+\frac{3}{9}\right)}{\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{10}\right):\frac{5}{3}-\frac{4}{16}\left(3-\frac{5}{3}\right)}=$$

(Soluc: -11/13)

16. $$\frac{\left(\frac{1}{5}+2-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{5}+\frac{3}{2}}{\frac{1}{5}+\left(2-\frac{1}{3}:\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{3}{2}}=$$

(Soluc: 325/21)

17. $$\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}+3:\frac{6}{5}\right)-\frac{7}{20}}{\left(3+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{10}\right):\frac{6}{5}-\frac{4}{5}}=$$

(Soluc: 20/11)

18. $$\frac{\left(\frac{2}{3}-4+\frac{1}{5}\right):\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-\left(4+\frac{1}{5}:\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}}=$$

(Soluc: 131/23)

14 EJERCICIOS DE FRACCIONES **HOJA 5**

Operar las siguientes fracciones, **simplificando en todo momento** los pasos intermedios y el resultado:

1. $\frac{3}{21}+\frac{3}{84}-\frac{1}{28}=$ *(Soluc: 1/7)*

2. $5\left(2\,\frac{51}{22}-3\right)-8\left(4\,\frac{51}{22}-9\right)=$

(Soluc: 6)

3. $\frac{5}{9}-\frac{3}{20}+\frac{37}{30}=$ *(Soluc: 59/36)*

4. $\frac{2}{5}:\frac{7}{3}:\frac{13}{11}\cdot\frac{7}{2}:\frac{3}{5}=$ *(Soluc: 11/13)*

5. $$\frac{\left[\frac{7}{5}-\frac{2}{5}:\left(2+\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{43}\right)}{\left[\frac{7}{5}-\left(\frac{2}{5}:2+\frac{1}{3}\right)\right]:\left(-1-\frac{36}{3}\right)}=$$

(Soluc: 3/7)

6. $$\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}:\left(3-\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{2}\right)}{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}:\left[\left(3-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{15}{2}\right]}=$$

(Soluc: 11/37)

7. $$\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}:3+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\cdot 3:\frac{3}{2}\right):\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)}=$$

(Soluc: 23/7)

8. $$\frac{\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}-1\right):\left(-\frac{4}{3}\right)+1}{\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\left[\left(\frac{6}{5}-1\right):\frac{4}{3}+1\right]}=$$

(Soluc: 5/3)

9. $$\frac{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}{2}:\frac{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}}{\dfrac{2}{5}:\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{3}}=$$

(Soluc: 24/25)

10. $$\frac{\frac{5}{4}-\frac{3}{5}:\left[2+\frac{3}{5}\left(\frac{6}{9}:\frac{3}{4}\right)\right]}{\frac{5}{4}:\frac{3}{5}\left(2+\frac{3}{5}:\frac{6}{9}\right)-\frac{3}{4}}=$$

(Soluc: 462/2413)

11. $$\frac{\frac{4}{3}:\frac{7}{4}+\left(7+\frac{2}{5}\right):\frac{7}{3}}{\frac{4}{3}+\frac{7}{4}\left(7-\frac{2}{5}\right)\frac{7}{3}}=$$

(Soluc: 236/1697)

12. $$\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}:\left[\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{4}{15}\right)\right]}{1:\frac{1}{3}:\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{2}\right)}=$$

(Soluc: −19/12)

13. $$\frac{\frac{21}{2}-\frac{19}{2}:\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}\right)}{\left(\frac{21}{2}-\frac{19}{2}\right):\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{8}}=$$

(Soluc: 2/23)

14. $$\frac{\left(1-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right):\frac{15}{2}:\frac{15}{2}}{1-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}:\frac{15}{2}:\frac{15}{2}}=$$

(Soluc: 9/230)

38 EJERCICIOS de NÚMEROS REALES 4º ESO Acad.

Representación y comparación de números reales:

1. Ordenar de menor a mayor los siguientes números, pasándolos previamente a común denominador:

a) $\frac{1}{2}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{7}{15}$ **c)** $\frac{1}{5}\quad\frac{3}{4}\quad-\frac{2}{7}\quad\frac{9}{8}\quad\frac{6}{5}\quad\frac{5}{6}$

(Soluc: 1/2<3/4<5/6; 7/15<1/2<3/5; −2/7<1/5<3/4<5/6<9/8<6/5)

2. a) Representar en la recta real los siguientes números racionales:

$$\frac{2}{3}\quad\frac{7}{6}\quad\frac{16}{3}\quad-\frac{5}{7}\quad-\frac{18}{5}\quad 3\quad\frac{5}{4}\quad-\frac{9}{2}$$

b) A la vista de lo anterior, ordenarlos de menor a mayor.

c) Utilizar la calculadora para comprobar el resultado anterior.

3. Construir $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ y $\sqrt{10}$ sobre la recta real, utilizando regla y compás, y aplicando el teorema de Pitágoras (se recomienda utilizar, también, papel milimetrado), y comprobar el resultado con la calculadora.

4. Hallar una fracción comprendida entre las dos siguientes. Comprobar el resultado con la calculadora:

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{3}$ **c)** $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{3}$ **d)** 2 y $\frac{11}{5}$ **e)** $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ **f)** $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{4}$

5. a) Hallar un número irracional comprendido entre $\frac{1}{1000}$ y $\frac{1}{999}$.

b) Hallar un número racional comprendido entre 2,3030030003… y 3,070770777...

c) Ídem entre 1,101001000… y $\sqrt{2}$.

6. a) Hallar, razonadamente, dos posibles fracciones (irreducibles) y un entero comprendidos entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{3}$ (obligatorio pasando previamente a común denominador).

b) Hallar, razonadamente, una fracción **de denominador 9** comprendida entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{10}{9}$ (obligatorio pasando previamente a común denominador).

Paso de fracción a decimal y viceversa (fracción generatriz):

CURIOSIDAD MATEMÁTICA: Ejemplos de números de período muy largo:

número	nº cifras periódicas
$1/7=0,\overset{\frown}{142857}$	6
$1/13=0,\overset{\frown}{076923}$	6

$1/21=0,\overset{\frown}{047619}$	6
$1/17=0,\overset{\frown}{0588235294117647}$	16
$1/23=0,\overset{\frown}{0434782608695652173913}$	22

RECORDAR:

REGLA PRÁCTICA PARA AVERIGUAR SI UNA FRACCIÓN <u>IRREDUCIBLE</u> CONDUCE A UN DECIMAL EXACTO O PERIÓDICO (sin necesidad de efectuar la división): "Si los únicos divisores primos del denominador de una fracción **irreducible** de nos enteros son el 2 y/o el 5, entonces su expresión decimal será necesariamente exacta; en caso contrario, será periódica"

7. Utilizando la regla anterior, indicar si las siguientes fracciones conducen a un decimal exacto o periódico. Comprobar el resultado haciendo la división directamente (¡sin usar la calculadora!):

a) $\frac{1}{2}\quad\frac{3}{20}\quad\frac{7}{50}\quad\frac{23}{12}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{21}\quad\frac{3}{12}\quad\frac{23}{18}\quad\frac{1}{18}\quad\frac{7}{35}\quad\frac{16}{9}$ *(Soluc: E, E, E, P, P, P, E, P, P, E, P)*

b) $\frac{3}{4}\quad\frac{7}{5}\quad\frac{23}{20}\quad\frac{13}{25}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{3}{7}\quad\frac{23}{9}\quad\frac{132}{21}\quad\frac{7}{6}$ *(Soluc: E, E, E, E, P, P, P, P, P)*

8. Sin necesidad de efectuar la división, y sin factorizar el denominador, **razonar** a qué tipo de decimal (exacto o periódico) conducen las siguientes fracciones:

a) $\frac{7}{2025}$. **b)** $\frac{5}{2022}$ **c)** $-\frac{13}{11000}$ *(Soluc: P, P, P)*

RECORDAR:

$$\frac{\text{nº sin coma decimal}}{1\underbrace{0...0}_{\text{tantos 0 como cifras decimales}}}$$

DECIMAL EXACTO

$$\frac{\text{nº sin coma decimal} - \text{parte entera}}{\underbrace{9...9}_{\text{tantos 9 como cifras periódicas}}}$$

PERIÓDICO PURO

$$\frac{\text{nº sin coma decimal} - \text{parte entera y anteperíodo}}{\underbrace{9...9}_{\text{tantos 9 como cifras periódicas}}\underbrace{0...0}_{\text{tantos 0 como cifras anteperiódicas}}}$$

PERIÓDICO MIXTO

<u>Ejemplos</u>:

$$2,24=\frac{224}{100}=\frac{56}{25}$$

$$2,\overset{\frown}{24}=\frac{224-2}{99}=\frac{222}{99}=\frac{74}{33}$$

$$2,2\overset{\frown}{4}=\frac{224-22}{90}=\frac{202}{90}=\frac{101}{45}$$

(pueden comprobarse haciendo la división)

9. Hallar la fracción generatriz de los siguientes números decimales. Comprobar el resultado con la calculadora:

a) 0,25 *(Soluc: 1/4)*

b) $0,\overset{\frown}{6}$ *(Soluc: 2/3)*

c) $0,2\overset{\frown}{3}$ *(Soluc: 7/30)*

d) 0,12 *(Soluc: 3/25)*

e) $0,1\overset{\frown}{2}$ *(Soluc: 11/90)*

f) $0,12\overset{\frown}{35}$ *(Soluc: 1223/9900)*

g) $1,125$ *(Soluc: 9/8)*

h) $0,\overset{\frown}{126}$ *(Soluc: 14/111)*

i) $0,34\overset{\frown}{5}$ *(Soluc: 311/900)*

j) $1,1\overset{\frown}{8}$ *(Soluc: 107/90)*

k) $1,2\overset{\frown}{3}$ *(Soluc: 37/30)*

l) $25,372$ *(Soluc: 6343/250)*

m) $12,\overset{\frown}{20}$ *(Soluc: 1208/99)*

n) $5,13\overset{\frown}{5}$ *(Soluc: 2311/450)*

o) $12,13\overset{\frown}{40}$ *(Soluc: 120127/9900)*

p) $24,12\overset{\frown}{1}$ *(Soluc: 21709/900)*

10. Razonar por qué no cabe considerar el período 9, es decir, no tiene sentido indicar $0,\overset{\frown}{9}$ o $0,0\overset{\frown}{9}$

11. Razonar, sabiendo que $1/7 = 0,\overset{\frown}{142857}$, cómo es 43/7 (No vale efectuar la división). *(Sol: sumando 6 unid.)*

12. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas, y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

1º Operando **directamente** en forma decimal (a partir del apdo. **10**, utilizar la calculadora)

2º Pasando previamente a **fracción generatriz** y operando a continuación las fracciones resultantes.

1) $0,\overset{\frown}{3}+0,\overset{\frown}{6}=$ *(Soluc: 1)*

2) $0,3-0,\overset{\frown}{15}=$ *(Soluc: 49/330=$0,1\overset{\frown}{48}$)*

3) $3,4\overset{\frown}{1}+2,37\overset{\frown}{8}=$ *(Soluc: 579/100=5,79)*

4) $0,\overset{\frown}{4}\cdot 0,1=$ *(Soluc: 2/45=$0,0\overset{\frown}{4}$)*

5) $3,\overset{\frown}{1}+2,0\overset{\frown}{3}=$ *(Soluc: 463/90=$5,1\overset{\frown}{4}$)*

6) $0,\overset{\frown}{3}+0,1\overset{\frown}{6}=$ *(Soluc: 1/2=0,5)*

7) $4\cdot 2,\overset{\frown}{5}=$ *(Soluc: 92/9=$10,\overset{\frown}{2}$)*

8) $4,\overset{\frown}{89}-3,\overset{\frown}{78}=$ *(Soluc: 10/9=$1,\overset{\frown}{1}$)*

9) $8-2,\overset{\frown}{7}=$ *(Soluc: 47/9=$5,\overset{\frown}{2}$)*

10) $4,5\cdot 0,0\overset{\frown}{2}+0,\overset{\frown}{4}=$ *(Soluc: 49/90=$0,5\overset{\frown}{4}$)*

11) $\left(1,\overset{\frown}{1}+1,0\overset{\frown}{8}\right)\cdot 2,2=$ *(Soluc: 121/25=4,84)*

12) $1,\overset{\frown}{2}+1,1\overset{\frown}{7}+1,6=$ *(Soluc: 4)*

13) $0,\overset{\frown}{6}:0,0\overset{\frown}{5}+0,25=$ *(Soluc: 49/4=12,25)*

14) $1,1\overset{\frown}{3}\cdot 0,2+1,\overset{\frown}{3}=$ *(Soluc: 39/25=1,56)*

15) $3,5+1,\overset{\frown}{3}\cdot 1,1\overset{\frown}{6}=$ *(Soluc: 91/18=$5,0\overset{\frown}{5}$)*

16) $1,25-1,1\overset{\frown}{6}+1,\overset{\frown}{1}=$ *(Soluc: 43/36=$1,19\overset{\frown}{4}$)*

17) $\dfrac{1,5}{1,25}=$ *(Soluc: 6/5=1,2)*

18) $2,\overset{\frown}{7}\cdot 1,8+2,\overset{\frown}{26}:0,1\overset{\frown}{13}=$ *(Soluc: 25)*

19) $1,9\overset{\frown}{2}+0,25(0,2\overset{\frown}{5}+0,\overset{\frown}{5})=$ *(Soluc: 17/8=2,125)*

20) $\left(0,\overset{\frown}{1}+1,2\overset{\frown}{7}\right)\cdot 0,72=$ *(Soluc: 1)*

21) $\sqrt{2,\overset{\frown}{7}}=$ *(Soluc: 5/3=$1,\overset{\frown}{6}$)*

22) $1,25+0,\overset{\frown}{87}+0,8712=$ *(Sol: 247499/82500=$2,9999\overset{\frown}{87}$)*

23) $0,8\overset{\frown}{3}-0,8:0,\overset{\frown}{6}=$ *(Soluc: -11/30=$-0,3\overset{\frown}{6}$)*

24) $4,08\overset{\frown}{3}\cdot 11,\overset{\frown}{1}-0,1\overset{\frown}{5}:0,3=$ *(Soluc: 1211/27= $44,\overset{\frown}{851}$)*

25) $2,5\cdot 1,\overset{\frown}{1}+2,\overset{\frown}{2}=$ *(Soluc: 5)*

26) $0,\overset{\frown}{6}+1,3\overset{\frown}{8}\cdot 0,72=$ *(Soluc: 5/3=$1,\overset{\frown}{6}$)*

27) $0,\overset{\frown}{5}-0,15+1,2\overset{\frown}{3}$ *(Soluc: 59/36=$1,63\overset{\frown}{8}$)*

28) $1,\overset{\frown}{2}+1,1\overset{\frown}{7}\cdot 0,1$ *(Soluc: 67/50=1,34)*

29) $1,\overset{\frown}{6}\cdot 0,2+1,\overset{\frown}{6}=$ *(Soluc: 2)*

30) $1,0\overset{\frown}{3}-2,5:0,\overset{\frown}{25}=$ *(Soluc: −133/15=$-8,8\overset{\frown}{6}$)*

31) $1,\overset{\frown}{1}:0,0\overset{\frown}{3}-25=$ *(Soluc: 25/3=$8,\overset{\frown}{3}$)*

Clasificación de $\mathbb{R}$:

13. Separar los siguientes números en racionales o irracionales, indicando, **de la forma más conveniente** en cada caso, el porqué: *(Soluc: $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$)*

$$\frac{1}{8} \quad \frac{\pi}{3} \quad \sqrt{5} \quad 2{,}6 \quad 0 \quad -3 \quad -\frac{25}{3} \quad \sqrt{13} \quad 0{,}1 \quad 6{,}\overset{\frown}{4} \quad 534 \quad 1{,}010110111... \quad 1{,}010110111$$

14. Indicar cuál es el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$); en caso de ser $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$, **razonar** el porqué: *(Soluc: $\mathbb{I}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{N}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$)*

$$\frac{\pi}{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad 0{,}0015 \quad -10 \quad \frac{5}{6} \quad 2{,}\overset{\frown}{3} \quad 2{,}02002000\,2... \quad 2^{-3} \quad 1{,}5^{-1} \quad \sqrt[3]{9}$$

15. Señalar cuáles de los siguientes números son racionales o irracionales, indicando el porqué:

a) 3,629629629....
b) 0,128129130...
c) 5,216968888...
d) 0,123456789...
e) 7,129292929...
f) 4,101001000...
g) 0,130129128...
h) $\sqrt{16+25}$
i) $\sqrt{16}+\sqrt{25}$
j) $\sqrt{\frac{9}{6}}$

(Sol: $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$)

16. Para cada uno de los siguientes números razonar, **de la forma más apropiada** en cada caso, si $\in \mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$:

a) $\sqrt{17} \in$ **b)** $1{,}70770777... \in$ **c)** $1{,}70770777 \in$ **d)** $1{,}\widehat{70770777} \in$ *(Soluc: $\mathbb{I}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$)*

17. Ordenar de menor a mayor: $-\frac{29}{5} \quad \sqrt{5} \quad 1{,}6\overset{\frown}{3} \quad \pi \quad 2 \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{31}{3} \quad \sqrt{53}$

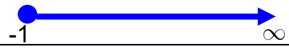
18. ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta:

a) Todo número real es racional.
b) Todo número natural es entero.
c) Todo número entero es racional.
d) Siempre que multiplicamos dos números racionales obtenemos otro racional.
e) Siempre que multiplicamos dos números irracionales obtenemos otro irracional.
f) Entre dos números racionales existe siempre un racional. ← $\mathbb{Q}$ es denso
g) " " " reales " " " racional.
h) " " " reales " " " real. ← $\mathbb{R}$ es denso
i) Dado un número real, podemos establecer su siguiente. *(Soluc: F; V; V; V; F; V; V; V; F)*

Intervalos:

19. Rellenar (en este cuaderno) la siguiente tabla (véase el primer ejemplo):

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
1		[-1,3]	{x∈IR/ -1≤x≤3}

2			
3			
4		[-2,1)	
5			{x∈IR/ 1<x≤5}
6			
7			{x∈IR/ x<2}
8		(0,∞)	
9			
10		(-1,5)	
11			{x∈R/ x≤0}
12		[2/3,∞)	
13			{x∈IR/ -2<x≤2}
14			{x∈IR/ |x|<3}
15			{x∈IR/ |x|≥3}
16			
17		[-1,1]	
18			{x∈IR/ x<-1}
19			
20		(-∞,-2)U(2,∞)	
21		(-∞,2)U(2,∞)	
22			{x∈IR/ |x|≤5}
23		[-2,2]	
24			

20. Hallar la U e ∩ de los siguientes intervalos, dibujándolos previamente:

a) A=[-2,5) B=(1,7)

b) C=(-1,3] D=(1,6]

c) E=(0,3] F=(2,∞)

d) G=(-∞,0] H=(-3,∞)

e) J=[-5,-1) K=(2,7/2]

f) L=(-∞,0) M=[0,∞)

g) O=(2,5) P=[5,9]

h) S=[-3,-1) T=(2,7]

i) U=(-3,7) W=(2,4]

j) A=[-3,2) B=(0,∞) C=[1,4]

¿Serías capaz de hacer la U e ∩ sin dibujar previamente los intervalos?

21. a) Completar la tabla adjunta (en este cuaderno).

b) Hallar la U e ∩ de los intervalos indicados:

B U C = B ∩ C =

D U E = D ∩ E =

F U G = F ∩ G =

	A=	$\{x \in \mathbb{R} / \lvert x \rvert \geq 1\}$
-∞ 0	B=	
	C=[-2,3)	

22. Completar la tabla, y hallar la U e ∩ de ambos intervalos (en este cuaderno):

A U B =

A ∩ B =

	A=	$\{x \in \mathbb{R} / \lvert x \rvert \leq 3\}$
0 ∞	B=	

23. Completar la tabla (usar valor absoluto cuando proceda), y hallar la U e ∩ de ambos intervalos (en este cuaderno):

A U B =

A ∩ B =

	A=(-2,2)	
		B=$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 1\}$

24. a) (En este cuaderno) Representar en la recta real el intervalo $A = \left[\frac{7}{6}, \frac{10}{3}\right]$ (No vale usar decimales)

b) Indicar (utilizar fracciones, no decimales) cuál es el intervalo B representado en la siguiente recta:

c) Hallar: A U B = A ∩ B =

25. (En este cuaderno) Completar la tabla, y hallar la U e ∩ del primero y el último de los intervalos.

A U C =

A ∩ C =

-∞ 0	A=	
	B=	$\{x \in \mathbb{R} / \lvert x \rvert < 2\}$
	C=[-3,3)	

26. **a)** Escribir dos intervalos cuya unión sea (2,6]. Ídem con la $\cap$.

b) ¿Qué otro nombre recibe el intervalo $[0,\infty)$? ¿Y $(-\infty,0]$?.

c) ¿A qué equivale $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$? ¿Y $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$?.

Varia:

27. **CURIOSIDAD MATEMÁTICA:** Comprobar, con la calculadora, la validez de las siguiente series, debidas a los insignes matemáticos que se reseñan:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \quad \text{Leibniz (alemán, s. XVII-XVIII)}$$

$$\pi=2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\ldots \quad \text{Viéte (francés, s. XVI)}$$

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots} \quad \text{John Wallis (inglés, s. XVII)}$$

28. **CURIOSIDAD MATEMÁTICA:** Comprobar las siguiente fórmulas, que utilizan el llamado "Método de la fracción continua infinita", y que se atribuyen a varios matemáticos: los italianos *Bombelli* (s. XVI) y *Cataldi* (s. XVI-XVII), los ingleses *Brook Taylor* (s. XVIII) y *Lord William Brouncker* (s. XVII), etc.:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{9}{7+\cfrac{16}{9+\cfrac{25}{11+\cfrac{36}{13+\cfrac{49}{\ddots}}}}}}}}$$

$$\pi=3+\cfrac{1}{6+\cfrac{9}{6+\cfrac{25}{6+\cfrac{49}{6+\cfrac{81}{6+\cfrac{121}{\ddots}}}}}}$$

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{\ddots}}}}}$$

Repaso de errores:

29. Un solar, cuya fachada sabemos que es de exactamente 34,5 m, se mide, arrojando un resultado aproximado de 34,53 m. Hallar el error absoluto y el error relativo cometido (este último en %) *(Soluc: 0,09%)*

30. Hallar el error absoluto y relativo que se comete al aproximar π a 22/7. *(Soluc: 0,04%)*

31. Supongamos que un coche se desplaza a 120 km/h de marcador. Si sabemos, mediante un GPS, que su velocidad real es 115 km/h, se pide: **a)** ε_a **b)** ε_r. *(Soluc: 4%)*

32. El velocímetro de los coches suele tener un error por exceso de alrededor de un 5%. Si sabemos que en autovía multan a partir de 127 km/h, ¿a qué velocidad de marcador podremos circular, como máximo, sin problemas? (Resultado con dos decimales, bien aproximados) *(Soluc: ≅ 133,68 km/h)*

33. Un grupo de alumnos mide el largo de una mesa y obtienen un valor de 49,5 cm, cuando el valor real, según el fabricante, es de 50 cm.

Por otra parte, otro grupo mide la profundidad de un solar, obteniendo un resultado de 99,90 m, mientras que el valor exacto, según la escritura del terreno, es 100 m.

Hallar el error relativo (expresado en %) en ambos casos e indicar cuál de las dos medidas es más precisa.

(Soluc: mesa 1%; solar 0,1%)

34. Supóngase un campo de fútbol cuyas dimensiones reales son 100 m de longitud por 50 m de anchura. Luis mide la longitud y obtiene una medida de 100,1 m, mientras que Carlos obtiene 49,8 m para el ancho. Hallar el Er (en %) en ambos casos e indicar qué medida es más precisa.

35. Supongamos que la distancia real entre un planeta y su satélite es de $2\cdot10^8$ m, pero una sonda espacial obtiene una medida de $2{,}1\cdot10^8$ m. Indicar el error absoluto y relativo cometidos, utilizando siempre en los cálculos notación científica.

36. Completar la siguiente tabla (Sígase el primer ejemplo). ¿Cuál es, de todas ellas, la mejor aproximación de π?

		Aproximación de π	Aproximación decimal (a la cienmillonésima)	Error absoluto ε_a	Error relativo ε_r
	Antiguo Egipto (>1800 a.C.)	$\left(\frac{4}{3}\right)^4$	**3,16049383**	**0,018901…**	**0,006016…**
	Babilonia (≅ 2000 a.C.)	$\frac{25}{8}$			
GRECIA	Arquímedes (s. III a.C.)	$\frac{223}{71}$			
GRECIA	Ptolomeo (s. II d.C.)	$\frac{377}{120}$			
CHINA	Zhang Heng (78-139)	$\frac{736}{232}$ o $\sqrt{10}$			
CHINA	Wang-Fang (217-257)	$\frac{142}{45}$			
CHINA	Zu Chong Zhi (429-500)	$\frac{355}{113}$			
INDIA	Bhashkara II (1114-1185)	$\frac{3917}{1250}$			
INDIA	S. Ramanujan (1887-1920)	$\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}$	3,141592654		

¿Algún día se podrá encontrar una fracción de enteros **exactamente** igual a π?

37. Como muy bien sabemos, los números π o $\sqrt{3}$ son irracionales, es decir, no pueden ser expresados de manera exacta como un cociente de números enteros; ahora bien, los matemáticos babilonios, egipcios y griegos manejaban aproximaciones bastante precisas, como por ejemplo:

$$\pi \cong 3+\frac{17}{120}=\frac{377}{120} \qquad \text{(Ptolomeo)}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\cong\pi \qquad \text{(desconocido)}$$

$$\sqrt{3}\cong 3+\frac{265}{153}\text{, y mejor : }\sqrt{3}\cong 3+\frac{1351}{780} \qquad \text{(Arquímedes)}$$

Comprobar la precisión de dichas aproximaciones e indicar el error cometido.

38. El sabio griego *Eratóstenes* (siglo III a.C.) fue capaz de obtener un valor del radio de la Tierra de 6548 km. Hallar el error cometido, teniendo en cuenta que el valor real es 6378 km. *(Soluc: $\cong$2,67 %)*

FICHA 1: 50 problemas de proporcionalidad

Pasos para resolver un problema de proporcionalidad:

1º) Leer atentamente el enunciado.

2º) Razonar de qué tipo de proporcionalidad se trata (directa o inversa).

3º) Construir una tabla y situar en ella los datos y la incógnita.

4º) Si es proporcionalidad directa: resolverlo por regla de tres directa.

" " " inversa: resolverlo, o bien por regla de tres inversa, o aplicando la k_I.

5º) Comprobar siempre que la solución obtenida tiene sentido. E indicar las unidades.

1. Si con 5 kg de pintura pintamos 4 m^2 de pared, ¿podremos pintar 6 m^2 con 7,5 kg? ¿Sobrará pintura? *(Sol: SÍ; NO)*

2. Si para llevar 15 panes necesitamos 3 cestas, con una cesta, ¿cuántos panes podemos llevar? Resolverlo planteando una regla de tres. *(Soluc: 5 panes)*

3. Una familia bebe 2,5 l de leche diarios. ¿Cuántos l consume a la semana? *(Soluc: 17,5 l)*

4. Al traducir un libro cobramos 6 € por página. Si nos han pagado 2532 €, ¿cuántas páginas hemos traducido? *(Soluc: 422 págs.)*

5. Una máquina produce 800 tornillos en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardará la máquina (en horas y minutos) en fabricar 1000 tornillos? *(Soluc: 6 h 15')*

6. Un coche recorre en una autopista 240 km en 2 h y cuarto, y otro 330 km en 3 h. **a)** ¿A qué velocidad circula cada uno? **b)** ¿Alguno ha podido ser multado? (recordar que la velocidad máxima en autopista es de 120 km/h) *(Soluc: 106,67 km/h y 110 km/h)*

7. En un pendrive de 7,5 GB hemos copiado 19 CDs de música, que ocupan 2 GB. ¿Cuántos CDs podremos grabar en el espacio restante? *(Soluc: Al menos 52 CDs)*

8. Dieciocho obreros realizan un trabajo en 30 días. Completar **razonadamente** los valores de la siguiente tabla:

Nº obreros	3	9	18	36	72
Días			30		

(Soluc: 180; 60; 6; 15; 7,5)

9. Un coche tarda 8 horas en recorrer un trayecto a 90 km/h. ¿Cuánto tardará a 60 km/h? Resolverlo de dos formas: por regla de 3, y empleando la constante de proporcionalidad. *(Soluc: 12 h)*

10. Cinco grifos llenan un depósito en 30 h. **a)** ¿Cuánto tardarán en llenarlo tres grifos? Resolverlo de dos formas: por regla de 3, y empleando la constante de proporcionalidad. **b)** ¿Y un solo grifo (resolverlo por k_I)

(Soluc: 50 h; 150 h)

11. Una cuadrilla de 5 personas tarda 12 h en vendimiar un campo. ¿Cuánto tardarán si se les une una persona más? (Resolverlo por regla de 3) *(Soluc: 10 h)*

12. En una clase de 4º de ESO 18 alumnos van a pagar 6 € cada uno para comprar un regalo a una compañera. **a)** ¿Cuánto pagará cada uno si al final participan los 24 alumnos de la clase? (Resolverlo por k_I) **b)** ¿Cuánto costará el regalo? *(Soluc: 4,5 €; 108 €)*

13. Si 6 cajas de ciruelas cuestan 9,72 €, ¿cuánto costarán 21 cajas? ¿Y una sola caja? *(Soluc: 34,02 €; 1,62 €)*

14. En una fábrica de coches se hacen 380 unidades cada 5 horas. ¿Cuántos coches se fabricarán en 12 horas, manteniendo el mismo ritmo? *(Soluc: 912 coches*

15. Cuatro tractores aran un campo en 6 horas. Calcular el tiempo que emplearían 6 tractores. *(Soluc: 4 h)*

16. Un pintor cobra 425 € por 5 días de trabajo. ¿Cuánto cobrará por una semana? *(Soluc: 595 €)*

17. Ocho personas recogen las naranjas de un huerto en 9 horas. ¿Cuánto tardarían en hacerlo 6 personas? *(Soluc: 12 h)*

18. De un manantial hemos recogido 200 l de agua en 4 minutos. ¿Cuántos litros obtendremos en 7 minutos? *(Soluc: 350 l)*

19. Tres caballos consumen una carga de heno en 10 días. ¿Cuánto les durará la misma cantidad de heno a 5 caballos? *(Soluc: 6 días)*

20. Cuatro excavadoras han levantado las aceras de una calle en dos semanas. Para hacerlo en una semana, ¿cuántas se necesitarían? *(Soluc: 8 excavadoras)*

21. Para hacer dos camisas se necesitan 4,5 m de tela. **a)** ¿Cuánta tela hace falta para confeccionar 3 camisas? **b)** ¿Y para 7? **c)** ¿Cuántas camisas se pueden hacer con 15 m de tela? *(Soluc: 6,75 m; 15,75 m; ≅6 camisas)*

22. Con una velocidad de 20 nudos, un barco hace una travesía en 8 horas. Halla la velocidad de otro barco que hace la misma travesía en 6 horas y media. *(Soluc: ≅24,62 nudos)*

23. Para hacer una paella se necesitan 2 vasos de agua por cada vaso de arroz. Si echamos 4 vasos y medio de agua, ¿cuántos vasos de arroz debemos añadir? *(Soluc: 2,25 vasos)*

24. El pelo crece aproximadamente a razón de 1,25 cm por mes. ¿Cuánto crecerá al cabo de un año? *(Soluc: 15 cm)*

25. Alicia y Antonio reparten propaganda. Los 5 paquetes de Alicia pesan 6 kg. ¿Cuánto pesarán los 7 paquetes de Antonio? *(Soluc: 8,4 kg)*

26. En una pensión disponen de comida para alimentar a sus 18 huéspedes durante 12 días. Si vienen 6 huéspedes nuevos, ¿para cuántos días tendrán comida? *(Soluc: 9 días)*

27. María escribe dos páginas en 1/2 hora. **a)** ¿Cuántas páginas escribirá en 3 horas? **b)** ¿Cuánto tiempo tardará en escribir 84 páginas? *(Soluc: 12 págs.; 21 h)*

28. Las ruedas traseras y delanteras de un vehículo tienen 1,3 m y 1 m de perímetro, respectivamente. Si las traseras han dado 260 vueltas, ¿cuántas han dado las delanteras? *(Soluc: 338 vueltas)*

29. Hemos pagado 60 € por el abono de piscina del verano, pero solo podemos asistir 45 días. Si la entrada normal cuesta 1,25 € diarios, ¿ahorraremos dinero comprando el abono? Razonar la respuesta. *(Soluc: NO)*

30. En la siguiente tabla se muestra la oferta de unos grandes almacenes al comprar un determinado número de litros de leche. ¿Es directamente proporcional el obsequio y la compra?

l comprados	40	55	75	100
l obsequiados	1	2	3	5

(Soluc: NO)

31. En la siguiente tabla se muestra la oferta de una frutería al comprar un determinado número de kg de patatas. ¿Es directamente proporcional el obsequio y la compra?

kg comprados	20	40	60	80
kg obsequiados	1,5	3	4,5	6

¿Qué cantidad de patatas hay que comprar para que nos regalen 10,5 kg? *(Soluc: SÍ; 140 kg)*

32. En una receta de una tarta se indica que hacen falta 125 g de azúcar para 6 personas. Si queremos hacer una tarta para 8, ¿cuánto azúcar necesitaremos? *(Soluc: ≅166,67 g)*

33. Un fórmula 1 ha dado 5 vueltas a un circuito en 8 minutos y 30 segundos. Si mantiene la misma velocidad, cuánto tiempo –en minutos y segundos– tardará en dar las próximas tres vueltas? *(Soluc: 5' 6'')*

34. Un grifo arroja un caudal de 25 l/min y llena un depósito en 1 h 20'. ¿Cuánto tardará otro grifo de 20 l/min? (Resultado en horas y minutos) *(Soluc: 1h 40')*

35. Una cinta transportadora tiene una velocidad de 2 m/s. ¿Cuánto tardará en recorrer 30 m? *(Soluc: 15 s)*

36. En una bañera el agua alcanza 12 cm de altura con un grifo que mana 180 ml/s en 12 minutos. Si el grifo manase 90 ml/s, ¿qué altura alcanzaría en el mismo tiempo? *(Soluc: 6 cm)*

37. Si la velocidad del viento es de 18 km/h, ¿cuántos segundos tardará una nube en recorrer 100 m? *(Soluc: 20 s)*

38. Un perro persigue a un conejo a 36 km/h y lo alcanza tras recorrer 85 m. ¿Cuántos segundos ha durado la persecución? *(Soluc: 8,5 s)*

39. Un ganadero tiene pienso para alimentar a 20 vacas durante 60 días. Si compra 10 vacas más, ¿cuánto le durará el alimento? *(Soluc: 40 días)*

40. Un ciclista que circula a una velocidad constante tarda 3 h en recorrer 72 km. **a)** ¿Qué distancia recorrerá en 5 h? **b)** ¿Cuánto tiempo –en horas y minutos– necesitará para cubrir una distancia de 108 km? *(Soluc: 120 km; 4 h 30')*

41. En un supermercado 4 paquetes de fresas cuestan 12 €. ¿Cuánto costarán 15 paquetes? ¿Cuánto cuesta el paquete? *(Soluc: 45 €; 3 €)*

42. Una pareja de pintores tarda 9 h en pintar una casa. ¿Cuánto tardarán si se les une uno más? ¿Y dos más? ¿Y si solo fuera un pintor? *(Soluc: 6 h; 4,5 h; 18 h)*

43. Un trabajador cobra semanalmente 420 €. ¿Cuánto cobrará por trabajar los 30 días del mes? *(Soluc: 1800 €)*

44. Un grifo que vierte 18 l/min tarda 28 h en llenar un depósito. Si su caudal fuera de 42 l/min, hallar el tiempo que tardaría en llenarlo. *(Soluc: 12 h)*

45. Si a 70 km/h tardamos 4 h, en 12 minutos, ¿cuántos km recorremos? *(Soluc: 14 km)*

46. Un kg de patatas cuesta 55 céntimos. ¿Cuánto costarán 3,5 kg? ¿Qué cantidad podremos comprar si sólo disponemos de un billete de 5 €? *(Soluc: 1,93 €; 9,09 kg)*

47. Un grifo vierte agua a un depósito dejando caer cada minuto 25 litros. ¿Cuánto tiempo –en horas y minutos– tardará en llenar una piscina de 50 m^3? *(Soluc: 33 h 20 min)*

48. El dueño de una papelería ha abonado una factura de 670 € por un pedido de 25 cajas de folios. ¿A cuánto ascenderá la factura por un segundo pedido de 17 cajas? *(Soluc: 455,60 €)*

49. Dos amigos han comprado un décimo de lotería que ha resultado premiado, de modo que cada uno ha cobrado 3000 €. Si hubieran comprado el décimo entre cinco personas, ¿cuánto hubiera cobrado cada uno? (No vale por tanteo). *(Soluc: 1200 €)*

50. De 1 kg de aceitunas se obtienen 0,2 l de aceite. De un olivo se recogen 40 kg de aceitunas. Si un agricultor tiene 10 olivos, ¿cuántos litros de aceite puede conseguir?

FICHA 2: 42 problemas de porcentajes

Cálculos simples de porcentajes:

1. Calcular **mentalmente**:

a) El 10% de 100
b) El 10% de 350
c) El 20% de 350
d) El 30% de 50
e) El 10% de 35
f) El 50% de 500
g) El 15% de 300
h) El 90% de 800

2. Calcular:

a) El 30% de 200
b) El 7% de 420
c) El 36% de 100
d) El 15% de 4000
e) El 90% de 1900
f) El 65% de 40
g) El 100% de 500
h) El 35% de 20

(Soluc: a) 60; b) 29,4; c) 36; d) 600; e) 1710; f) 26; g) 500; h) 7)

3. El 40% de los 355 alumnos de un instituto son chicos. ¿Cuántos chicos hay? *(Soluc: 142 chicos)*

4. Un equipo ha perdido el 25% de los 32 partidos que ha disputado esta temporada. ¿Cuántos partidos ha ganado? *(Soluc: 24 partidos)*

5. Un videojuego cuesta 57 €, pero nos ofrecen uno con un pequeño defecto en la carátula con un 40% de descuento. ¿Cuánto costará? *(Soluc: 34,20 €)*

6. Luisa compra un coche por 16.000 € y le hacen un descuento del 12%. ¿A qué cantidad equivale el descuento? *(Soluc: 1920 €)*

7. De las 4075 personas fallecidas durante un determinado año en accidentes de tráfico, el 52 % eran jóvenes. ¿Cuántos jóvenes fallecieron en accidentes de tráfico? *(Soluc: 2119)*

PROBLEMA INVERSO: Cálculo del total, conocido el porcentaje y la parte:

8. Hallar el valor de x, sabiendo que:

a) El 25% de x es 75
b) El 30% de x es 22,5
c) El 25% de x es 289
d) El 30% de x es 20
e) El 80% de x es 80
f) El 4,5% de x es 152
g) El 70% de x es 35
h) El 18% de x es 7,2
i) El 22% de x es 44

(Soluc: a) 75; b) 75; c) 1156; d) $66,\overset{\frown}{6}$; e) 100; f) $3377,\overset{\frown}{3}$; g) 50; h) 40; i) 200)

9. Compramos unos pantalones en las rebajas. Nos han hecho un descuento del 10 %, con lo que hemos pagado por ellos 90 €. ¿Cuánto costaban originariamente los pantalones? *(Soluc: 100 €)*

10. Carlos paga 450 euros mensuales por el alquiler del piso, lo que supone un 30% del sueldo. ¿Cuánto gana al mes? *(Soluc: 1500 €)*

11. Luisa compra un coche. Si le hacen un descuento del 12%, que equivale a 1920€, ¿cuál era el precio original del vehículo? *(Soluc: 16.000 €)*

3er caso: Cálculo del %, conocidos la parte y el total:

12. Hallar el valor de x, sabiendo que:

a) ¿Qué % es 7 de 15?

b) ¿Qué % es 3 de 18?

c) ¿Qué % es 90 de 125?

d) ¿Qué % es 3 de 4?

e) ¿Qué % es 1 de 2?

f) ¿Qué % es 50 de 100?

g) ¿Qué % es 7 de 7?

(Soluc: a) $46,\widehat{6}\%$; b) $16,\widehat{6}\%$; c) 72%; d) 75%; e) 50%; f) 50%; g) 100%)

13. En un paquete de 250 g de mezcla de café hay 60 g de café torrefacto. Calcular el % que hay de torrefacto en la mezcla. *(Soluc: 24 %)*

14. Luisa compra un coche por 16.000 € y le hacen un descuento de 1920 €. ¿Qué porcentaje le descuentan? *(Soluc: 12%)*

Problemas variados de porcentajes:

15. Pasada la Navidad, unos grandes almacenes hacen en todos los artículos un 20% de descuento. ¿Cuál será el precio rebajado de unas zapatillas de deporte que costaban 45 €? ¿Y de un chándal que costaba 60 €? *(Soluc: 36 €; 48 €)*

16. Una ciudad de 135000 habitantes ha perdido en los últimos años el 8 % de la población. Hallar los habitantes que tiene en la actualidad. *(Soluc: 124.200 habitantes)*

17. Juan cobra un 10 % menos que María. Si ésta cobra 1500 €, ¿cuánto cobrará el primero? *(Soluc: 1350 €)*

18. El IVA es un impuesto que en muchos productos supone un recargo del 16%. Si un fontanero hace una reparación de 240 €, ¿a cuánto ascenderá con el IVA? ¿Y si la reparación costara 50 €? *(Soluc: 278,40 €; 58 €)*

19. Carlos paga de impuestos un 22% de su salario. Si este año sus ingresos ascienden a 25.500 €, ¿cuánto tendrá que pagar de impuestos? ¿Qué cantidad neta ha cobrado? *(Soluc: 5610 €; 19.890 €)*

20. Una cámara de vídeo cuesta 650 €, pero el vendedor nos hace una rebaja del 20%. ¿Cuánto tendremos que pagar? *(Soluc: 520 €)*

21. Carlos paga 40 € por una camisa rebajada al 20%. ¿Cuál era el precio original? *(Soluc: 50 €)*

22. ¿Cuál era el precio original de un ordenador que está rebajado un 18% si me ha costado en las rebajas 900 €?
(Soluc: $1097,\overset{\frown}{5}$ €)

23. En la carta de un restaurante los precios no incluyen el 7% de IVA. Un cliente ha comido una ensalada que cuesta 3,16 €, un lenguado cuyo precio es 6,25 € y un postre de 4,78 €. ¿Cuánto pagará en total el cliente?
(Soluc: 15,18 €)

24. De 1500 alumnos, 1200 practican deporte. ¿Qué porcentaje de alumnos representan? *(Soluc: 80%)*

25. Carmen gasta el 26% de su sueldo en comida y el 35% en pagar el alquiler. Si gana 1500 € al mes, ¿cuánto se gasta en cada concepto? ¿Qué porcentaje le queda para otros gastos? *(Soluc: 390 € y 525 €; 39%)*

26. En una localidad hay 2350 habitantes. Si el 68% son niños, hallar el número de niños. *(Soluc: 390 € y 525 €; 39%)*

27. En una clase de 30 alumnos han faltado 6. ¿Cuál ha sido el porcentaje de ausencias? *(Soluc: 20%)*

28. De 475 personas, a 76 les gusta el fútbol. ¿Cuál es el porcentaje de los que no les gusta el fútbol? *(Soluc: 84%)*

29. El 18% de una cosecha de lechugas son 10.800 kg. ¿Cuántos kg tiene la cosecha? *(Soluc: 60.000 kg)*

30. Un traje cuesta 280 €. Si suben el precio un 12%, ¿cuánto costará? *(Soluc: 313,60 €)*

31. Las reservas de agua de una región eran de 350 hm^3. Si han subido un 12%, ¿cuáles serán las reservas actuales? *(Soluc: 392 hm^3)*

32. De los 1200 alumnos de un instituto el 25% practica atletismo, el 15% baloncesto y el 40% fútbol. Calcular el número de alumnos que practican cada deporte y el porcentaje de los que no lo practican.
(Soluc: 300, 180 y 480; 20%)

33. El precio de la gasolina ha subido un 2%. Si costaba 0,95 €/l, ¿cuánto costará ahora? *(Soluc: 0,97 €)*

34. Al comprar un CD de música nos han aplicado una rebaja del 20 %. Si hemos pagado 16€, ¿cuál era el precio original?

35. La paga mensual de Ana es de 50 €. Si sus padres le han subido un 10%, ¿cuánto percibe ahora? *(Soluc: 55 €)*

36. A Juan le han puesto una multa por exceso de velocidad de 90 €. Transcurrido el período voluntario de pago, ahora se le añade un 20% de recargo. ¿Cuánto tendrá que pagar? *(Soluc: 108 €)*

37. La Seguridad Social paga un 60% del precio de algunas medicinas. Si he comprado un medicamento cubierto por la S.S. cuyo precio de venta al público es de 19 €, ¿cuánto he tenido que pagar? *(Soluc: 7,60 €)*

Un poco más elaborados:

38. Ana trabaja desde hace 10 años en una empresa y ha cobrado 235 € por antigüedad, que es el 15% de su salario. ¿Cuál es el sueldo de Teo, si gana un 5% menos que Ana? *(Soluc: $1488,\overset{\frown}{3}$ €)*

39. Un fabricante de calzado vende sus zapatos al 120% del precio que le cuesta fabricarlos. Si el coste de fabricación de unos zapatos es de 14 €, ¿por cuánto los venderá? *(Soluc: 16,80 €)*

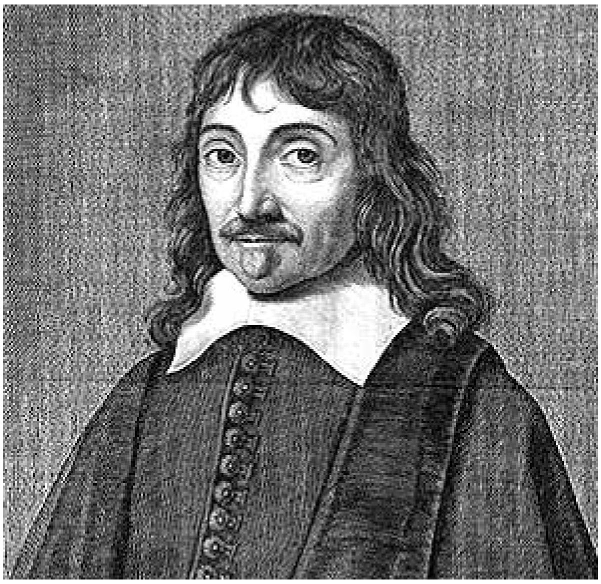
40. Tres montañeros se llevan alimento para su estancia en la montaña. Al llegar al refugio descubren que tienen un 15% más de provisiones. Si disponen de 402,5 kg de comida, hallar cuánta tenían al principio. *(Soluc: 350 kg)*

41. Un establecimiento vendía café a 5 €/kg. Si ahora lo vende a 4,75 €/kg, obtener el porcentaje de descuento aplicado. *(Soluc: 5%)*

42. Un vendedor nos da a elegir entre dos ofertas: o bien la 2ª unidad al 50%, o bien un 3x2 (pagar 2 y llevar 3). ¿Cuál nos conviene más? Razonar la respuesta. *(Soluc: El 3x2)*

REPASO de POTENCIAS

(2 semanas)



René Descartes *(1596-1650), filósofo, matemático y científico francés que "inventó" (o al menos popularizó) la notación actual para exponentes (v.g. 2^4 para indicar 2 x 2 x 2 x 2) así como el signo = para igualdades.*

MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO

Alfonso González

IES Fernando de Mena

Dpto. de Matemáticas

I) PROPIEDADES de las OPERACIONES con POTENCIAS (REPASO)

Def. : Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbf{a^n}$ es el producto de **n** factores de **a**:

Índice o exponente

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\text{n factores}} \qquad (1)$$

base

Cómo se leen las potencias?: $5^6 =$ 5 **elevado a** 6
o 5 **a la** 6
o 5 **a la** sexta (potencia)

$5^{-6} =$ 5 **elevado a** −6
o 5 **a la** −6

Casos particulares: $5^2 = 5$ **al cuadrado** $5^3 = 5$ **al cubo**

¿Cómo calcular potencias con la calculadora?: Por ejemplo, para hacer 5^6 introducimos 5 $\boxed{\wedge}$ 6 (o $\boxed{x^y}$, $\boxed{x^{\square}}$, etc.)

Propiedades de las potencias: Ver formulario

Ejercicios: 1 a 14

II) NOTACIÓN CIENTÍFICA

Nuestra calculadora automáticamente utilizará notación científica para mostrar resultados muy grandes o muy pequeños, es decir, que requieran más dígitos que los que caben en la pantalla:

$$\underbrace{4\,444\,444\,444}_{\text{10 dígitos}}{}^2 = \underbrace{1{,}975308642 \cdot 10^{19}}_{\text{notación científica}} = \underbrace{\boxed{19\,753\,086\,42}}_{\text{parte significativa}}0\,000\,000\,000$$

¡Intenta leerlo!

¿Cómo se lee?
"uno **coma** nueve siete ... dos **por** diez **elevado a** diecinueve"

$$\sqrt{0{,}\underbrace{00000000}_{\text{8 ceros}}1} = \underbrace{3{,}16227766 \cdot 10^{-5}}_{\text{notación científica}} = 0{,}0000\boxed{316227766}$$

¿Cómo se lee?
"tres **coma** uno seis ... seis **por** diez **elevado a menos** cinco"

Definición:

$$\boxed{a,\overbrace{\underbrace{b\,c\,d\,e\,\ldots}_{\text{parte significativa}}}^{\text{parte decimal}} \cdot 10^n} \qquad (2)$$

parte entera
(un solo dígito, $\neq 0$

$n \in \mathbb{Z}$, 2 dígitos
$n > 0 \Rightarrow$ el número es "grande"
$n < 0 \Rightarrow$ el número es "pequeño"

Ejercicio: 15

¿Para qué se utiliza notación científica?

1°) Es especialmente cómoda para expresar números muy “grandes” o muy “pequeños”.

2°) “ “ “ “ operar con “ “ “ “ “ “ .

Operaciones en notación científica:

a) Producto y cociente: Es muy sencillo. Multiplicamos o dividimos, separadamente, la parte numérica y las potencias de 10 (esto último utilizando las propiedades de las potencias).

¡Cuidado! Normalmente tendremos que “reescribir” el resultado de modo que, para cumplir con la definición de notación científica, la parte entera conste de un solo dígito.

Ejemplo 1: $\left(2,25\cdot 10^{6}\right)\cdot\left(5,5\cdot 10^{5}\right)=12,375\cdot 10^{11}=12,375\cdot 10^{-1}\cdot 10^{12}=\boxed{1,2375\cdot 10^{12}}$

$$\frac{8,42\cdot 10^{8}}{2\cdot 10^{-2}}=\boxed{4,21\cdot 10^{10}}$$

b) Sumas y restas: Normalmente en este caso previamente tenemos que “preparar” los sumandos, en el sentido de conseguir la misma base 10 como factor común. Entonces podremos sumar o restar las partes numéricas, dejando la misma potencia de 10.

¡Cuidado! De nuevo es habitual tener que transformar el resultado de modo que la parte entera conste de un solo dígito.

Ejemplo 2: $6,5\cdot 10^{20}+4,5\cdot 10^{20}=$

$4,2\cdot 10^{-17}-2,1\cdot 10^{-17}=$

$7,00055\cdot 10^{24}-4,5\cdot 10^{20}=$

REGLA GENERAL:
“Para expresar varias potencias con el mismo exponente, **seleccionar siempre el mayor exponente**”

(Sol: $7,0001\cdot 10^{24}$)

¿Cómo usar notación científica en una calculadora científica?:

1°) Comprueba que tu calculadora está en modo de notación científica (SCI Mode) – para ello hay que presionar repetidamente la tecla $\boxed{\text{MODE}}$–, y selecciona el número deseado de dígitos para la parte decimal (0 a 9):

2°) Encuentra la tecla para introducir el exponente – normalmente, $\boxed{\text{EXP}}$ –:

Ejemplo 3: Para introducir $6,24 \cdot 10^{7}$, tecleamos 6,24 $\boxed{\text{EXP}}$ 7

Para introducir $6,24 \cdot 10^{-7}$, tecleamos 6,24 $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{\pm}$ 7

Ejercicios: **16** ← operaciones en notación científica + uso calculadora

17 a 22 ← problemas en notación científica

22 EJERCICIOS de POTENCIAS 4º ESO Acad.

RECORDAR:

1º)	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2º)	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3º)	$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
4º)	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5º)	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

5 propiedades básicas

1º)	$a^0 = 1$	
2º)	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$\left(\text{Caso part.: } a^{-1} = \dfrac{1}{a}\right)$
3º)	$\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$	
4º)	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\text{Caso part.: } \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}\right)$

Propiedades que se deducen

También es importante saber que:

$1^{\text{algo}} = 1$	$(\text{base negativa})^{\text{par}} = +$
$(-1)^{\text{par}} = 1$	$(\text{base negativa})^{\text{impar}} = -$
$(-1)^{\text{impar}} = -1$	

(Añade estos tres cuadros al formulario que realizarás a lo largo del curso)

Potencias de exponente $\mathbb{N}$:

1. Calcular las siguientes potencias de exponente natural (**sin usar calculadora**):

$(-2)^5 =$ $(-1)^{21} =$ $13^0 =$ $(-2)^2 =$ $1^{21} =$ $(-3)^4 =$ $-3^4 =$

$(-2)^3 =$ $-2^3 =$ $9^2 =$ $(-9)^2 =$ $9^3 =$ $(-9)^3 =$ $1^9 =$

$1^{4569} =$ $(-1)^{10} =$ $(-1)^{523} =$ $1^0 =$ $235^0 =$ $(-1)^0 =$ $(0{,}75)^0 =$

Potencias de exponente $\mathbb{Z}$:

2. **TEORÍA:** Demostrar las siguientes fórmulas:

a) $a^0 = 1$

b) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

3. Calcular, indicando todos los pasos necesarios, las siguientes potencias de exponente entero (**sin usar calculadora**), dejando el **resultado en forma entera o fraccionaria**:

$2^{-1}=$ $\quad 2^{-2}=$ $\quad 2^{-3}=$ $\quad 3^{-1}=$ $\quad 3^{-2}=$ $\quad 3^{-3}=$

$1^{-4}=$ $\quad 1^{-7}=$ $\quad 1^{-10}=$ $\quad (-1)^{-4}=$ $\quad (-1)^{-7}=$ $\quad (-1)^{-10}=$

$(-3)^{-2}=$ $\quad (-2)^{-1}=$ $\quad (-3)^{-3}=$

4. Calcular, indicando todos los pasos necesarios, las siguientes potencias de base fraccionaria, dejando el **resultado en forma fraccionaria**:

$\left(\frac{5}{3}\right)^{3}=$ $\quad \left(\frac{9}{4}\right)^{2}=$ $\quad \left(-\frac{1}{5}\right)^{2}=$ $\quad \left(-\frac{3}{4}\right)^{3}=$ $\quad \left(\frac{9}{4}\right)^{-2}=$

$\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2}=$ $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}=$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2}=$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{2}=$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}=$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{3}=$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=$ $\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2}=$ $\quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}=$ $\quad \left(\frac{4}{7}\right)^{3}=$ $\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=$

$\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}=$ $\quad \left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}=$ $\quad \left(-\frac{7}{2}\right)^{3}=$ $\quad \left(-\frac{9}{2}\right)^{-3}=$ $\quad 0{,}1^{-1}=$

5. **Ejercicio inverso:** Pasar a forma de potencia **de base entera lo más simple posible**:

$8=$ $\quad 32=$ $\quad 81=$ $\quad 125=$ $\quad 343=$ $\quad \frac{1}{3}=$ $\quad \frac{1}{4}=$

$\frac{1}{5}=$ $\quad \frac{1}{10}=$ $\quad \frac{1}{14}=$ $\quad \frac{1}{64}=$ $\quad 100=$ $\quad 10\,000=$ $\quad 1\,000\,000=$

$\frac{1}{100}=$ $\quad \frac{1}{10\,000}=$ $\quad \frac{1}{1\,000\,000}=$ $\quad 0{,}1=$ $\quad 0{,}01=$ $\quad 0{,}001=$

1 millón= 1 billón= 1 trillón= 1 milésima=

1 millonésima= 1 cienmilésima= $\frac{1}{1024}=$ $\quad \frac{1}{125}=$

Operaciones con potencias:

6. Pasar a potencia única, **lo más simple posible**, de base racional y exponente positivo:

$7^2\cdot 6^2=$ $\quad 7^3\cdot 6^3=$ $\quad (-7)^2\cdot 6^2=$ $\quad (-7)^3\cdot 6^3=$ $\quad 7^2\cdot (-6)^2=$

$(-7)^3\cdot (-6)^3=$ $\quad \dfrac{7^2}{6^2}=$ $\quad \dfrac{7^3}{6^3}=$ $\quad \dfrac{(-7)^2}{6^2}=$ $\quad \dfrac{7^3}{(-6)^3}=$

$\dfrac{(-7)^2}{(-6)^2}=$ $\quad 7^{-2}\cdot 7^3=$ $\quad 6^{-2}\cdot 6^{-5}=$ $\quad 9^0\cdot 9^3=$ $\quad 10^{20}\cdot 10^4=$

$10^{-20}\cdot 10^4=$ $\quad 10^{-20}\cdot 10^{-4}=$ $\quad \dfrac{7^{-2}}{7^3}=$ $\quad \dfrac{6^{-2}}{6^{-5}}=$ $\quad \dfrac{9^0}{9^3}=$

$\dfrac{10^{20}}{10^4}=$ $\quad \dfrac{10^{-20}}{10^4}=$ $\quad \left(7^{-2}\right)^3=$ $\quad \left(6^{-2}\right)^{-5}=$ $\quad \left(9^0\right)^3=$

$\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3=$ $\quad \left(\dfrac{7}{4}\right)^2\cdot\left(\dfrac{7}{4}\right)^5\cdot\left(\dfrac{7}{4}\right)^6=$ $\quad \left(\dfrac{7}{10}\right)^{-6}\cdot\left(\dfrac{7}{10}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{7}{10}\right)^2\cdot\left(\dfrac{7}{10}\right)^{-3}=$ $\quad \left(\dfrac{20}{5}\right)^2=$

$\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^6}{\left(\frac{5}{2}\right)^4}=$ $\quad \dfrac{\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}=$ $\quad \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}=$ $\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}=$

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3}=$ $\quad \left(\dfrac{3}{5}\right)^7\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}=$ $\quad \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}:\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-5}=$ $\quad 3^3\cdot 3^3=$ $\quad \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}}=$

7. Calcular y simplificar, **aplicando en todo momento las propiedades de las potencias** (resultado entero o fraccionario):

a) $-5^4=$

b) $(-5)^4=$

c) $-3^3=$

d) $(-3)^3=$

e) $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=$

f) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^6=$

g) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3=$

h) $-\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=$

i) $2^2-3^2=$ *(Soluc: -5)*

j) $2^2\left(-3^2\right)=$ *(Soluc: -36)*

k) $(-3)^{-3}=$ *(Soluc: -1/27)*

l) $(-3)^{-4}=$ *(Soluc: 1/81)*

m) $2^{3^{2}} =$ *(Soluc: 512)*

n) $\left(2^{3}\right)^{2} =$ *(Soluc: 64)*

o) $-3^{-4} =$ *(Soluc: -1/81)*

p) $\left(2^{3}\right)^{-2} =$ *(Soluc: 1/64)*

q) $\left(2^{-3}\right)^{-2} =$ *(Soluc: 64)*

r) $\left(-2^{3}\right)^{-2} =$ *(Soluc: 1/64)*

s) $\left[(-2)^{3}\right]^{-2} =$ *(Soluc: 1/64)*

t) $\left(-3^{2}\right)^{-4} =$ *(Soluc: 1/6561)*

u) $\left[(-2)^{-3}\right]^{-2} =$ *(Soluc: 64)*

v) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right]^{3} =$ *(Soluc: 1/15625)*

w) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^{2} =$ *(Soluc: 256/81)*

x) $\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} =$ *(Soluc: 25/9)*

y) $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}\right]^{3} =$ *(Soluc: 117.649/4096)*

z) $\left[\left(\frac{2}{9}\right)^{2}\right]^{-1} =$ *(Soluc: 81/4)*

CONSEJOS: ① «Para dividir dos potencias con la misma **base entera** se recomienda siempre **restar el mayor exponente menos el menor exponente**». De esta forma, evitamos exponentes negativos.

Ejemplos:

$$\frac{2^6}{2^2}=2^{6-2}=2^4=16 \qquad \frac{3^3}{3^5}=\frac{1}{3^{5-3}}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9} \qquad \frac{5^2}{5^{-1}}=5^{2-(-1)}=5^3=125 \qquad \frac{2^{-1}}{2}=\frac{1}{2^{1-(-1)}}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4} \qquad \frac{7^{-2}}{7^{-5}}=$$

② « Para dividir dos potencias con la misma **base fraccionaria** se recomienda siempre **restar el exponente del numerador menos el exponente del denominador**, y si el exponente así resultante fuera negativo entonces le daremos la vuelta a la base».

Ejemplos:

$$\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^6}{\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\left(\frac{3}{7}\right)^4 \qquad \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^5}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

8. Simplificar, mediante las propiedades de las potencias, dejando el **resultado como potencia de exponente positivo** y base entera o fraccionaria lo más simple posible (no vale usar calculadora):

a) $\frac{2^5}{2^3}=$

b) $\frac{2^3}{2^5}=$

c) $\frac{2^4}{2^{-1}}=$

d) $\frac{2^{-2}}{2^3}=$

e) $\dfrac{5^0}{5^3}=$

f) $\dfrac{6^{-4}}{3^{-4}}=$

g) $\dfrac{4^0}{4^{-3}}=$ *(Sol: 2^6)*

h) $\dfrac{3^2}{3^{-2}}=$

i) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}:\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}=$

j) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-4}:\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2}=$ *(Sol: 2^{12})*

k) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}:\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}=$

l) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-2}:\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-4}=$ *(Sol: $1/5^2$)*

m) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4}}=$

n) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}=$

o) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}}=$ *(Sol: 2^5)*

p) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}}=$ *(Sol: 2/5)*

q) $\dfrac{5^3}{\left(5^{-2}\right)^{3}\cdot 5}=$ *(Sol: 5^8)*

r) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}=$ *(Sol: $(2/3)^5$)*

s) $\dfrac{3^{10}}{9^7}=$ *(Sol: $1/3^4$)*

t) $7^8:\left[\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2}\right]^{-3}=$ *(Sol: 7^2)*

u) $\dfrac{0{,}1\cdot 10^8}{2\cdot 10^6}=$ *(Sol: 5)*

9. Calcular, **aplicando las propiedades de las potencias, y simplificando en todo momento** (resultado entero o fraccionario, salvo que salgan números "elevados", en cuyo caso se puede dejar como potencia):

a) $\left(\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{2}\right)^{5}=$ *(Soluc: 1/1024)*

b) $\left[\left(-\dfrac{6}{5}\right)\cdot\dfrac{1}{8}\cdot(-2)\right]^{-4}=$ *(Soluc: 10000/81)*

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-5}=$

(Soluc: -900)

d) $\left[\frac{15}{7}\cdot\left(\frac{21}{5}\right)^2\cdot(-1)\cdot\frac{2}{3}\right]^3=$

$\left(\textit{Soluc}: -\frac{3^6\cdot 7^3\cdot 2^3}{5^3}\right)$

e) $\dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^5}{\left(\frac{2}{7}\right)^4}=$ *(Soluc:8/343)*

f) $a^2\cdot a^{-2}\cdot a^3=$ *(Soluc: a^3)*

g) $\dfrac{\left(2^{-5}\right)^0}{2^{-3}}=$ *(Soluc: 8)*

h) $\dfrac{2^3}{(5\cdot 2)^{-5}}=$ *(Soluc:800000)*

i) $\left[\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]^{-4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}=$ *(Soluc:$2^8/5^{10}$)*

j) $\dfrac{2^{-3}\cdot(-2)^4\cdot(-4)^{-1}}{-2}=$ *(Soluc: 1/4)*

k) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{2^{-1}}=$ *(Soluc: 1)*

l) $\dfrac{12^5}{18^4}=$ *(Soluc :64/27)*

m) $\left(8\cdot 4^{-2}\right)^3=$ *(Soluc: 1/8)*

n) $3^2\cdot 9^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot 27^{-2}=$ *(Soluc: 3^6)*

o) $\dfrac{\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3}{\left(\frac{25}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot 2^{-7}}=$

(Soluc: 3/10)

p) $\left(\frac{6}{5}\right)^6\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)^{-4}=$ *(Soluc: $3^{10}\cdot 2^2/5^{10}$)*

q) $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right]^{-3}}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-8}\right]^{-2}}=$ *(Soluc: $(2/3)^{15}$)*

r) $\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-5} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-9}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-10} : \frac{1}{5}} =$ *(Soluc: $1/5^{12}$)*

s) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3} =$ *(Soluc: -9)*

t) $\dfrac{(-4)^{-3}}{4^{-2}} =$ *(Soluc: -1/4)*

10. **EJERCICIO TEÓRICO-PRÁCTICO:** Para cada una de las siguientes expresiones, indicar si son V o F; en este último caso, señalar cómo sería la expresión correcta o por qué es falso:

a) $2^7 + 3^7 = 5^7$

b) $2^3 + 2^4 = 2^7$

c) $-3^2 = (-3)^2$

d) $(-3)^3 = -3^3$

e) $3 \cdot 2^4 = (3 \cdot 2)^4$

f) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = 4^3$

g) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

h) $(a+b)^n = a^n + b^n$

i) $2^{32} + 2^{33} = 2^{65}$

j) $2^9 \cdot 3^3 = 6^{12}$

k) $(-3)^3 \cdot 3^9 = (-3)^{12} = 3^{12}$

l) $3^3 \cdot 3^3 = 9^3$

m) $3^3 \cdot 3^3 = 3^6$

n) $(-2 \cdot 3)^3 = (-2)^3 \cdot (-3)^3$

*(Soluc: **a)** F; **b)** F; **c)** F; **d)** V; **e)** F; **f)** F; **g)** F; **h)** F; **i)** F; **j)** F; **k)** F; **l)** V; **m)** V; **n)** F)*

11. Calcular, **aplicando las propiedades de las potencias, y simplificando en todo momento** (resultado entero o fraccionario, salvo que salgan números "elevados", en cuyo caso se puede dejar como potencia):

a) $\dfrac{2^7 \cdot 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^0}{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^6} =$ *(Soluc: 1)*

b) $\dfrac{2^3 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot 5^{-1}}{2^{-1} \cdot 2^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^{-3}} =$ *(Soluc: $2^6 \cdot 5^7$)*

c) $\dfrac{3^{-2} \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 7^{-4} \cdot 3^5}{7^3 \cdot 3^{-1} \cdot 7^{-5} \cdot 3^4} =$ *(Soluc: 3)*

d) $\dfrac{3^8 \cdot 7^{-1} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 3^{-2}}{7^4 \cdot 5^{-1} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^{-2}} =$ *(Soluc: 3)*

e) $\dfrac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 2^6 \cdot 2 \cdot 8^{30}}{16 \cdot 2^3 \cdot 32 \cdot 2^4} =$ *(Soluc: 2^{94})*

f) $\dfrac{15^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 45^2}{25 \cdot 5^3 \cdot 125 \cdot 27} =$ *(Soluc: 243/5)*

g) $\dfrac{6 \cdot 12^3 \cdot 18^2 \cdot 3^2 \cdot 108^2}{27^2 \cdot 3^2 \cdot 16 \cdot 48 \cdot 36} =$

(Soluc: 1944)

h) $\dfrac{2^2 \cdot \left(2^3 : 2^4\right)^{-5} : 2^{-3}}{2^3 \cdot \left(2^{-2}\right)^{-3}} =$

(Soluc: 2)

i) $\dfrac{15^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 45^2}{\left(5^3\right)^2 \cdot 27 \cdot 3^{-2}} =$ *(Soluc: 243/5)*

j) $\dfrac{2^{-1} \cdot (2^3)^5 \cdot 4 \cdot 5^3}{100 \cdot 2^{-2} \cdot 8} =$ *(Soluc: $5 \cdot 2^{13}$)*

k) $\dfrac{3^2 : \left(2 : 3^3\right)^2}{2 : \left(3 \cdot 2^2\right)^{-2}} =$ *(Soluc: 729/128)*

l) $\dfrac{2^3 \cdot 8^{-3} \cdot 12^{-1} \cdot (-3)^2}{6^2 \cdot 16^{-2} \cdot 3^{-3}} =$ *(Soluc: 9/4)*

m) $\dfrac{6^4 \cdot 9^2 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-5} \cdot 2^{-1}}{18^3 \cdot 2^{-5} \cdot 3^6 \cdot \left(3^3\right)^{-3}} =$ *(Soluc: 2)*

n) $\dfrac{3^4 \left(2^3\right)^{-2} : \left(2^4 \cdot 3^5\right)}{2^3 \cdot 3^{-2}} =$ *(Soluc: $3/2^{13}$)*

o) $\dfrac{\left(3^2\right)^3 \cdot 3^{-2} \cdot \left(2^{-2}\right)^3 \cdot \left(2^2\right)^{-3}}{18 \cdot \left(3^{-1}\right)^{-2} \cdot 2^{-7} \cdot \left(2^2\right)^{-3}} =$ *(Soluc: 1)*

p) $\dfrac{\left(6a^{-3}b^2\right)^{-3}}{(2ab)^{-4}} =$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{2a^{13}}{27b^2}\right)$

q) $\dfrac{6^5 \cdot 2^3 : \left(2^4 : 3^{-2}\right)^{-2}}{2^2 : 3^5} =$ *(Soluc: $2^{14} \cdot 3^{14}$)*

r) $\dfrac{4^3 \cdot \left(3^{-2}\right)^{-3} \cdot 27^{-3} \cdot 32^2 \cdot \left(36^2\right)^{-2}}{8^2 \cdot \left(2^6\right)^2 \cdot \left(9^{-3}\right)^5 \cdot 24^{-3} \cdot \left[\left(3^{-2}\right)^2\right]^{-5}} =$

(Soluc: 9/2)

s) $\dfrac{(-x^2y)^5(-y^4)^{-3}}{(-y)^2(-x)^3(-y)^6}=$ *(Soluc: - x^7/y^{15})*

t) $\dfrac{2^3\cdot(3^{-2})^{-3}\cdot(-8)^{-2}\cdot(6^2)^{-4}}{[(-9)^{-2})]^3\cdot 16^{-1}\cdot 4^{-3}\cdot[(-3)^{-2}]^{-3}}=$

(Soluc: 81/2)

u) $\left[\dfrac{(10x^{-3}yz)^{-4}}{(5xy^{-2}z)^{-4}}\right]^{-2}=$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{256y^{24}}{x^{32}}\right)$

v) $\dfrac{(-3)^{-3}\cdot 15^{-1}\cdot(-25^{-2})^{-2}\cdot 5^{-3}}{[(-45)^{-2}]^2\cdot 9^2\cdot(-5)^4}=$

(Soluc: -625)

12. Calcular el valor de las siguientes expresiones, aplicando en todo momento las propiedades de las potencias (¡no vale calcular el valor de las potencias de exponente elevado!). En la mayor parte de los casos, bastará con <u>sacar como factor común la mayor potencia posible</u>. Véanse los ejemplos:

a) $6\cdot 3^2+5\cdot 3^2=11\cdot 3^2=11\cdot 9=\boxed{99}$

b) $2^{19}+2^{20}=2^{19}+2\cdot 2^{19}=2^{19}\cdot(1+2)=\boxed{3\cdot 2^{19}}$

c) $3^8+3^9=$ *(Soluc: $4\cdot 3^8$)*

d) $2^{10}+2^{11}+2^{12}=$ *(Soluc: $7\cdot 2^{10}$)*

e) $3^{15}-3^{12}=$ *(Soluc: $26\cdot 3^{12}$)*

f) $16^3+8^4=$ *(Soluc: 2^{13})*

g) $5\cdot 2^{10}+4^5-3\cdot 2^{10}=$ *(Soluc: $3\cdot 2^{10}$)*

h) $\dfrac{2\cdot 3^{18}}{3^{20}-3^{18}}=\dfrac{2\cdot 3^{18}}{3^{18}(3^2-1)}=\dfrac{2\cdot 3^{18}}{3^{18}(9-1)}=\dfrac{2\cdot\cancel{3^{18}}}{\cancel{3^{18}}\cdot 8}=\dfrac{2}{8}=\boxed{\dfrac{1}{4}}$

i) $\dfrac{2^{15}}{2^{16}-2^{15}}=$ *(Soluc: 1/2)*

j) $\dfrac{7\cdot 2^{30}}{2^{32}+2^{31}+2^{30}}=$ *(Soluc: 1)*

k) $\dfrac{2^9}{2^9+2^9}=$ *(Soluc: 1/2)*

l) $\dfrac{2^6-2^5}{3\cdot 2^5}=$ *(Soluc: 1/3)*

m) $\dfrac{2^{22}}{2^{20}+4^{10}}=$ *(Soluc: 2)*

n) $\dfrac{27^{10}}{3^{31}-9^{15}}=$ *(Soluc: 1/2)*

o) $64\cdot 8^{2}-\dfrac{1}{2}\cdot 8^{4}=$ *(Soluc: 2^{11}=2048)*

13. Calcular, **aplicando las propiedades de las potencias, y simplificando en todo momento** (resultado entero o fraccionario, salvo que salgan números "elevados", en cuyo caso se puede dejar como potencia):

a) $\dfrac{4^4\cdot 8^{-1}\cdot 16^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot 8^6}=$ *(Soluc: 1/4)*

b) $\dfrac{(-3)^2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2\cdot\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^0\right]^{-2}}{(-3)^5\cdot 3^{-2}\cdot(-3)^{-3}\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\right]^{-1}}=$

(Soluc: -27)

c) $\dfrac{\left(-\dfrac{5}{4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}\left[\left(\dfrac{2}{25}\right)^{-2}\right]^2}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{-1}\cdot(-25)^{-2}\cdot\left\{\left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-3}\right]^2\right\}^{-3}}=$

(Soluc: 125/2)

d) $\dfrac{\dfrac{3^3\cdot 5^2}{2^{-1}}}{\dfrac{3^2\cdot 5}{2^{-2}}}\cdot\dfrac{2^2}{3\cdot 5}=$ *(Soluc: 2)*

e) $\dfrac{3^3\cdot\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]^3\cdot(-2)^3}{3^{-1}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-4}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\cdot 12}=$

(Soluc: 36)

f) $$\frac{\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{2} : \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^{-6}}{\left(\frac{9}{5}\right)^{-2} \cdot \left[\left(3^{2}\right)^{-2}\right]^{-1} \cdot 15^{-3}} =$$

(Soluc: 243/5)

g) $$\frac{\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\right]^{-3} : \left(\frac{3}{2}\right)^{5}}{3^{-2} \cdot 12 \cdot (-3)^{2} \cdot 1^{-2} \cdot (-4)^{0}} =$$

(Soluc: 1/8)

h) $4 \cdot 10^{5} \cdot 6 \cdot 10^{5} - 10^{10} =$ *(Soluc: $23 \cdot 10^{10}$)*

i) $$\frac{2^{-3} \cdot (-2)^{3} \cdot (-2)^{-3} \cdot (2 \cdot 9)^{3} \cdot 2^{0}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{-4} \cdot 1^{-7}} =$$

(Soluc: 6561/4)

j) $$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{3} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right)^{-2} \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{-3} \cdot \left[\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}\right]^{0}}{\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\right]^{2} \cdot \left(-\frac{16}{27}\right)^{-1} \cdot 18^{2} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}\right]^{-2}} =$$

(Soluc: 3)

k) $$\frac{\left\{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{3}\right\}^{-2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{3} \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^{4}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^{-5} \cdot (-5)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{0}} =$$

(Soluc: 16/25)

l) $$\frac{\dfrac{\left(5^{2}\cdot 5^{3}\cdot 5^{-4}\right)^{2}}{\left(5^{-2}\cdot 5^{-3}\cdot 5^{4}\right)^{3}}}{\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2}:\left(\dfrac{1}{5}\right)^{4}\right]^{4}}=$$

(Soluc: 1/125)

m) $$\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}\cdot 8\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\cdot 3^{-2}}=$$

(Soluc: 2/15)

n) $$\left(\frac{4^{2}}{3^{5}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{2}}{3^{-3}\cdot 2^{2}}\right)^{6}\cdot\left(\frac{5^{3}}{4^{3}}\right)^{4}\cdot\left(\frac{4^{2}}{5^{4}\cdot 3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2^{10}}{5^{2}}\right)^{2}=$$

$\left(\text{Soluc: }\dfrac{3^{13}}{2^{8}}\right)$

o) $10^{10}+10^{10}+10^{10}=$ *(Soluc: $3\cdot10^{10}$)*

p) $$\frac{\left[\left(\dfrac{5}{7}\right)^{3}\right]^{-2}\cdot 5^{3}}{\left(\dfrac{25}{49}\right)^{-3}\cdot 7^{-2}\cdot 35\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}}=$$

(Soluc: 35)

q) $$\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{3}\cdot 3^{-2}\cdot(-3)^{4}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-2)^{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-1}}=$$

(Soluc: -9/128)

r) $$\frac{2^{2}\cdot(-2)^{3}\cdot 4^{-2}\cdot(-2)^{-5}\cdot 8^{0}}{9^{-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-5}}=$$

(Soluc: 1)

s) $\dfrac{6^2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}\cdot 12}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^{3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}\cdot 27\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}}=$

(Soluc: 6/5)

t) $\dfrac{\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2}\right]^{-2}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{0}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-3}}{\left[16\cdot(-4)\right]^{4}\cdot 4^{-4}\cdot(-4)^{-4}\cdot(-4)^{4}\cdot 1^{-4}}=$

(Soluc: 1/4)

u) $\dfrac{2^3\cdot(-3)^{-5}\cdot 18^2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}}{(-2)^2\cdot 2^{-3}\cdot(-3)^3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-3}}=$

(Soluc: 4)

v) $3\cdot 10^{20}+2\cdot 10^{20}-4\cdot 10^{20}=$ *(Sol: $1\cdot 10^{20}$)*

w) $\dfrac{3^{-3}\cdot(-3)^{-3}\cdot(-3)^{3}\cdot 1^{-3}\cdot 27^{3}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{4}\cdot\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{787}\right)^{0}}=$

(Soluc: 3^2)

x) $\left[\left(\dfrac{4^2\cdot 3^{-5}}{3^2}\right)^{3}\cdot\left(\dfrac{2^{-2}\cdot 3^2}{3^{-3}\cdot 2^2}\right)^{6}\cdot\left(\dfrac{4^{-3}}{5^{-3}}\right)^{6}\cdot\left(\dfrac{4}{3\cdot 4}\right)^{3}\cdot\left(\dfrac{7\cdot 5^{-2}}{5\cdot 7^{-3}}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{2^5}{5^2\cdot 2^{-5}}\right)^{2}\right]^{3}=$

$\left(Soluc:\ \dfrac{3^{18}\cdot 5^{24}\cdot 7^{24}}{2^{84}}\right)$

y) $\dfrac{5^{-3}\cdot(-5)^{-3}\cdot(-5)^{3}\cdot 1^{-5}\cdot\left[25\cdot(-5)\right]^{3}}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-4}\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-4}\cdot\left(-\dfrac{1}{3125}\right)^{0}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}\right]^{2}}=$

(Soluc: –1/25)

z) $\dfrac{\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{3}\cdot(-1)^{-16}\cdot(-1)^{0}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}}{-3^{2}\cdot 2^{-4}\cdot(-2)^{4}\cdot(-2)^{-4}\cdot 12^{-5}}=$

(Soluc: -6^9)

14. **OPERACIONES MIXTAS**: Calcular, **aplicando, siempre que sea posible, las propiedades de las potencias,** y simplificando en todo momento. **Cuando no sea ya posible aplicar las propiedades de las potencias debido a la existencia de una suma o resta, pasar la potencia a número y operar**:

a) $\dfrac{\left(2^{0}\cdot 2^{-1}\cdot 2^{3}\right)^{3}}{\left[\dfrac{(1/3)^{-2}}{3}+1\right]^{3}}=$

(Soluc: 1)

CONSECUENCIA: Hay que aplicar las propiedades de las potencias siempre que se pueda; cuando ello no sea posible (normalmente porque hay sumas y/o restas) se pasa la potencia a número y se opera convenientemente.

b) $\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}}{\left[(-2)^{3}\right]^{2}+(-3)^{3}\cdot(-3)^{2}}=$

(Soluc: -4/179)

c) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}}{\left[(-2)^{3}+2^{-3}\right]\cdot 63^{-1}}=$

(Soluc: -12)

d) $\dfrac{\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}\left(\dfrac{5}{2^{3}}\right)^{-1}}{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-1}}+(-4)^{-3}}{1+\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}}{4^{-3}}}=$

(Soluc: -1/64)

e) $$\frac{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{3}\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}}{\left[(-2)^{3}\right]^{2}+(-5)^{3}\cdot 2^{3}}=$$

(Soluc: 17/936)

f) $$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^{2}-\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{4}{9}\right)^{2}\right]^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}\frac{1}{3^{4}}\;2^{-1}}=$$

(Soluc: -608/81)

g) $$\frac{\left[\frac{3}{(1/3)^{-2}}\right]^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}+3^{-1}}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\cdot 25-\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]:\frac{5}{3}}=$$

(Soluc: 1)

h) $$\frac{\left[\frac{(2/3)^{-2}}{(1/3)^{-1}}+4^{-1}\right]^{-2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\frac{7}{16}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}+3^{-3}\right]^{2}+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}=$$

(Soluc: 1)

i) $$\left\{\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot(-3)^{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{2}}{2\cdot 3^{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}\right\}^{10}=$$

(Soluc: 1)

j) $\dfrac{(-3)^{-2}\cdot 2^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{72}\right)^{-1}}{(-3)^{3}-\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{2}}=$

(Soluc: -1/43)

Notación científica:

CURIOSIDAD MATEMÁTICA: ¿Por qué en notación científica basta con 2 dígitos para el exponente?

Considerar la siguiente tabla, que expresa algunas de las magnitudes más grandes o más pequeñas del universo:

magnitud	valor
Velocidad de la luz	$300\,000$ km/s $=3\cdot10^{8}$ m/s
Radio del e^{-}	$2{,}817939\cdot10^{-15}$ m
Radio medio de la Tierra	$6\,370$ km $=6{,}37\cdot10^{6}$ m
Peso del átomo de H	$1{,}66\cdot10^{-24}$ g
Radio estimado del universo	$1{,}42\cdot10^{26}$ m
Peso estimado del universo	$7{,}8\cdot10^{55}$ kg
Edad estimada del universo	$6{,}32\cdot10^{17}$ s

15. Escribir en notación científica los siguientes números:

a) 300 000 000
b) 456
c) 0,5
d) 0,0000000065
e) 18 400 000 000
f) 0,000001
g) –78 986,34
h) 0,0000093
i) 93 mil moléculas
j) 1 230 000 000 000
k) 14 millones €
l) 150 millardos $
m) 7,3
n) 73 billones kg
o) –0,00010001
p) 10
q) 1
r) 0,011001
s) 16 730 000
t) –345,45

(NOTA: Un millardo son mil millones, un billón son mil millardos, es decir, un millón de millones, etc...)

16. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas (y comprobar que se obtiene el mismo resultado):

- Sin calculadora, aplicando solo las propiedades de las potencias.
- Utilizando la calculadora científica, para comprobar el resultado anterior.

a) $2{,}5\cdot10^{7}+3{,}6\cdot10^{7}=$
b) $4{,}6\cdot10^{-8}+5{,}4\cdot10^{-8}=$
c) $1{,}5\cdot10^{6}+2{,}4\cdot10^{5}=$
d) $2{,}3\cdot10^{9}+3{,}25\cdot10^{12}=$
e) $3{,}2\cdot10^{8}-1{,}1\cdot10^{8}=$
f) $4{,}25\cdot10^{7}-2{,}14\cdot10^{5}=$
g) $7{,}28\cdot10^{-3}-5{,}12\cdot10^{-3}=$

h) $(2\cdot 10^9)\cdot(3,5\cdot 10^7)=$

i) $\dfrac{8,4\cdot 10^9}{2\cdot 10^7}=$

j) $\dfrac{(3,2\cdot 10^{-3})(4\cdot 10^5)}{2\cdot 10^{-8}}=$

k) $(2\cdot 10^5)^2=$

l) $(1,4\cdot 10^{15}+2,13\cdot 10^{18})\cdot 2\cdot 10^{-5}=$

m) $2,23\cdot 10^{-3}+3\cdot 10^{-4}-5\cdot 10^{-5}=$

n) $(0,55\cdot 10^{23}-5\cdot 10^{21})\cdot 2\cdot 10^{-13}=$

o) $5,75\cdot 10^{-2}-3,2\cdot 10^2+5\cdot 10^{-3}=$

p) $\dfrac{(5,28\cdot 10^{-2})(7,3\cdot 10^{-6})}{2\cdot 10^{12}}=$

q) $(7\cdot 10^{-3})^3=$

r) $5\cdot 10^2-5\cdot 10^{-2}=$

s) $\dfrac{(2,2\cdot 10^5)(7\cdot 10^{-3})}{1,1\cdot 10^{-4}}=$

t) $4,55\cdot 10^{-7}-5\cdot 10^{-9}=$

u) $\dfrac{6,6\cdot 10^{10}}{2\cdot 10^{-3}\cdot 1,1\cdot 10^{-3}}=$

v) $2,2\cdot 10^{10}+2,2\cdot 10^{16}\cdot 5\cdot 10^{-7}=$

w) $6\cdot 10^{14}-3\cdot 10^{14}\cdot 5\cdot 10^{-2}=$

x) $(4,2\cdot 10^5)\cdot(6\cdot 10^5)-10^{11}=$

RECORDAR: En las calculadoras científicas la tecla $\boxed{\text{EXP}}$ sirve para expresar en cualquier momento un número en notación científica. Pero es más recomendable, mediante la tecla $\boxed{\text{MODE}}$, poner la calculadora en modo SCI (scientific), con lo cual trabajará siempre en notación científica. Además, la calculadora suele pedir el número de cifras significativas con las que queremos trabajar.

17. La estrella más cercana a nuestro sistema solar es α-Centauri, que está a una distancia de tan sólo 4,3 años luz. Expresar, en km, esta distancia en notación científica. (Dato: velocidad de la luz: 300 000 km/s) ¿Cuánto años tardaría en llegar una nave espacial viajando a 10 km/s? *(Soluc: $4,071\cdot 10^{13}$ km; 129 000 años)*

18. Calcular el volumen aproximado (en m^3) de la Tierra, tomando como valor medio de su radio 6 378 km, dando el resultado en notación científica con dos cifras decimales. $\left(\text{Volumen de la esfera}: \dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$ *(Sol: $1,15\cdot 10^{21}$ m^3)*

19. Un glóbulo rojo tiene forma de cilindro, con un diámetro de unas 7 millonésimas de m y unas 2 millonésimas de altura. Hallar su volumen en notación científica. *(Soluc: $7,697\cdot 10^{-17}$ m^3)*

20. En una balanza de precisión pesamos cien granos de arroz, obteniendo un valor de 0,0000277 kg. ¿Cuántos granos hay en 1 000 ton de arroz? ¿Cuánto pesa un grano? Utilícese notación científica. *(Sol: $3,61\cdot 10^{12}$ granos)*

21. La luz del sol tarda 8 minutos y 20 segundos en llegar a la Tierra. Calcular, en km, la distancia Tierra-Sol. *(Soluc: $1,5\cdot 10^8$ km)*

22. Rellenar la siguiente tabla para una calculadora de 10 dígitos en notación entera y 10+2 dígitos en notación científica:

	SIN NOTACIÓN CIENTÍFICA	CON NOTACIÓN CIENTÍFICA
Nº MÁXIMO que puede representar		
Nº MÍNIMO (positivo) que puede representar		

RADICALES

(4 semanas)

*El matemático alemán **Christoph Rudolff** (1499-1545) introdujo el símbolo radicall √ para la raíz cuadrada. Se piensa que procede de la "r" minúscula, por el latín "radix". Más aún, fue el primero en plantear que $x^0 = 1$.*

MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO

Alfonso González

IES Fernando de Mena

Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) DEFINICIÓN de RAÍZ ENÉSIMA

Raíz cuadrada: $\sqrt{4}=\pm 2$ porque $(\pm 2)^2=4$ ← ¡Nótese el $\pm$!

$\sqrt{-4}=\nexists$ porque el cuadrado de cualquier número real no puede ser <0.

⋮ (en general)

$$\boxed{\sqrt{a}=x \Leftrightarrow x^2=a}$$

sí y solo sí

Raíz cúbica: $\sqrt[3]{8}=2$ porque $2^3=8$ ← Nótese que aquí no procede el $\pm$

Nos tenemos que preguntar qué número elevado al cubo es 8. En general, la idea es: ¿qué número elevado al cubo es igual al número dentro del símbolo $\sqrt{\ }$?

$\sqrt[3]{-8}=-2$ porque $(-2)^3=-8$

⋮ (en general)

$$\boxed{\sqrt[3]{a}=x \Leftrightarrow x^3=a}$$

ÍNDICE

SIGNO RADICAL

RAÍZ

RADICANDO

¿Qué número elevado a 4 es igual a 81?

Raíz cuarta: $\sqrt[4]{81}=\pm 3$ porque $(\pm 3)^4=81$ ← ¡Nótese de nuevo el $\pm$!

$\sqrt[4]{-16}=\nexists$ porque ______________________________

⋮ (en general)

$$\boxed{\sqrt[4]{a}=x \Leftrightarrow x^4=a}$$

Raíz quinta: $\sqrt[5]{1}=1$ porque $1^5=1$

$\sqrt[5]{-3125}=-5$ porque $(-5)^5=-3125$

⋮ (en general)

$$\boxed{\sqrt[5]{a}=x \Leftrightarrow x^5=a}$$

⋮ (en general)

Raíz n-ésima: $$\boxed{\sqrt[n]{a}=x \Leftrightarrow x^n=a} \qquad (1)$$

Notas:

1°) Por ejemplo, $\sqrt[4]{16}=\pm 2$, pero por comodidad se suele convenir en escribir $\sqrt[4]{16}=2$.

2°) Las raíces también se llaman "radicales". ¡Por favor, "raíz" o "raíces" llevan tilde!

3°) ¡Las raíces que no son exactas (v.g. $\sqrt{2}$) existen! De hecho, son números irracionales.

4°) Nótese que las raíces son el recíproco de las potencias. En otras palabras, la radicación es la operación inversa de la potenciación.

5°) **Tabla resumen:**

	RADICANDO > 0	**RADICANDO < 0**
ÍNDICE PAR	dos raíces de signo opuesto $\left(\sqrt{4}=\pm 2\right)$	$\nexists$ raíces $\left(\sqrt{-4}=\nexists\right)$
ÍNDICE IMPAR	una única raíz, positiva $\left(\sqrt[3]{8}=2\right)$	una única raíz, negativa $\left(\sqrt[3]{-8}=-2\right)$

6°) $\cancel{\sqrt{5^2}}=5$ ¡Lógico! En general: **2 propiedades de simplificación simple:**

$\cancel{\sqrt[3]{2^3}}=2$

$$\boxed{\cancel{\sqrt[n]{x^n}}=x} \quad \text{y} \quad \boxed{\cancel{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n}=x} \qquad (2)$$

Ejercicios: 1 a 4

II) POTENCIAS de EXPONENTE FRACCIONARIO

Ejercicio 1: Comprobar con calculadora que: $\sqrt{2}=2^{1/2}$

$\sqrt[3]{2}=2^{1/3}$

$\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{3/4}$

⋮ (en general)

$$\boxed{\sqrt[n]{x^m}=x^{m/n}} \qquad (3)$$

expresión radical

potencia de exponente fraccionario

Dem.: $\sqrt[n]{x^m}=x^{m/n}$ porque verifica (1), i.e. la definición de raíz: $\left(x^{m/\cancel{n}}\right)^{\cancel{n}}=x^m$ (C.Q.D.)

propiedades de las potencias

Aplicaciones de (3), i.e. la potencia de exponente fraccionario:

1°) Podemos simplificar expresiones radicales convirtiéndolas en potencias (de exponente fraccionario, claro está), y aplicándoles a continuación las sencillas leyes de las potencias (ver ejercicio 18).

2°) Esta fórmula (3) nos va a permitir demostrar cómodamente el resto de fórmulas de esta unidad.

¿Cómo hacer $\sqrt[n]{\ }$ con calculadora?: Por ejemplo, para hacer $\sqrt[3]{8}$ tecleamos 3 SHIFT $x^{\square}$ o $\sqrt[\square]{\square}$ 8 = $\xrightarrow{\text{devuelve}}$ 2

Ejercicios: 5, 6 y 7

III) RADICALES EQUIVALENTES. SIMPLIFICACIÓN de RADICALES

Ejercicio 2: Comprobar con calculadora que $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}=\sqrt[6]{8}$

Simplificación de $\sqrt{\ }$: "**Para simplificar una raíz podemos dividir su índice y el exponente del radicando por un mismo número** (cuando ello sea posible)":

$$\boxed{\sqrt[n\cdot \cancel{p}]{x^{m\cdot \cancel{p}}}=\sqrt[n]{x^m}} \qquad (4)$$

Dem.: $\sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}} \underset{(3)}{=} x^{m\cdot \cancel{p}/n\cdot \cancel{p}} = x^{m/n} \underset{(3)}{=} \sqrt[n]{x^m}$ (C.Q.D.)

Ejercicio 3: Comprobar el ejercicio 2 de esta misma página por medio de esta fórmula.

Ejercicio 4: Simplificar las siguientes expresiones mediante (4) y comprobar con calculadora:

$\sqrt[6]{16}=$ $\qquad$ $\sqrt[4]{81}=$ $\qquad$ $\sqrt[10]{32}=$

Nota: Cuando, como resultado de aplicar (4) para simplificar, obtengamos $\sqrt[1]{\ }$, significa que **lógicamente** podemos suprimir el signo radical:

Ejemplo 1: $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=\sqrt[3/3]{2^{6/3}}=\sqrt[1]{2^2}=2^2=\boxed{4}$ (porque $4^3=64$)

Ejercicios: 8 y 9

Amplificación/Compararación de $\sqrt{}$: Esta es la operación inversa de la simplificación. Se utiliza para expresar raíces con índice común, para por ejemplo poder compararlas a continuación:

$$\boxed{\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}}} \qquad (5)$$

Ejercicio 5: Ordenar (de menor a amyor) los siguientes radicales:

$\sqrt{5} =$

$\sqrt[4]{7^3} =$

$\sqrt[6]{243} =$

Ejercicio: 10

IV) PROPIEDADES de los RADICALES

1°) Producto de raíces del mismo índice:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}} \qquad (6)$$

"**Para multiplicar raíces del mismo índice, se multiplican sus radicandos** (y se deja el índice)"

Ejemplo 2: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$

$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} =$

Notas:

1°) Esta propiedad puede generalizarse a tres o más raíces:

Ejemplo 3: $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a} =$

2°) Raíces con distinto índice no pueden ser multiplicadas directamente, a menos que simplifiquemos o amplifiquemos alguna de ellas convenientemente:

Ejemplo 4: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[15]{a^{10}} =$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} =$

3°) Esta propiedad suele utilizarse también al revés, para simplificar:

Ejemplo 5: $\sqrt{1600}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{100}=4\cdot 10=\boxed{40}$

$\sqrt{2^2\cdot 5}=\sqrt{\cancel{2^2}}\cdot\sqrt{5}=\boxed{2\cdot\sqrt{5}}$

4°) **Dem.:** $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\underset{(3)}{=}a^{1/n}\cdot b^{1/n}\underset{\text{propiedades de las potencias}}{=}(a\cdot b)^{1/n}\underset{(3)}{=}\sqrt[n]{a\cdot b}$ (C.Q.D.)

Ejercicios: **11** (mismo índice) **y 12** (distinto índice)

2°) División de raíces con el mismo índice:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} \qquad (7)$$

"**Para dividir raíces del mismo índice, se dividen sus radicandos** (y se deja el índice)"

Ejemplo 6: $\dfrac{\sqrt[5]{2^6}}{\sqrt[5]{2}}=$

Notas:

1°) Esta propiedad también suele utilizarse al revés, para simplificar:

Ejemplo 7: $\sqrt[3]{0.027}=\sqrt[3]{\dfrac{27}{1\,000}}=\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1\,000}}=\dfrac{3}{10}=\boxed{0.3}$

2°) Tampoco las raíces con distinto índice pueden ser divididas a priori, a menos que simplifiquemos o amplifiquemos alguna de ellas convenientemente:

Ejemplo 8: $\dfrac{\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[3]{2}}=$

3°) **Dem.:** (Se deja como ejercicio)

Ejercicios: **13** (mismo índice), **14 y 15** (distinto índice)

3°) Potencia de una raíz: $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$ (8)

"Para elevar una raíz a un exponente, se eleva el radicando a dicho exponente"

Ejemplo 9: $\left(\sqrt{2}\right)^4 = \sqrt{2^4} = 2^2 = \boxed{4}$

Dem.: (Se deja como ejercicio)

Ejercicios: 16 a ... h

4°) Raíz de una raíz: $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}}$ (9)

"Para hacer la raíz de una raíz, se multiplican sus índices"

Ejemplo 10: $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}} =$

Notas:

1°) Esta propiedad puede generalizarse a tres o más radicales:

Ejemplo 11: $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}} =$

2°) Esta fórmula nos permite hacer cómodamente con calculadora raíces de ciertos índices utilizando únicamente las teclas de $\boxed{\sqrt{\ }}$ y $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$. Veamos varios casos (completar los que faltan):

$\sqrt[4]{\ } = \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}$ $\sqrt[6]{\ } = \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}$ or $\boxed{\sqrt[3]{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}$ $\sqrt[8]{\ } =$

$\sqrt[9]{\ } =$ $\sqrt[12]{\ } =$ etc.

3°) **Dem.:** (Se deja como ejercicio)

Ejercicios: 16 i ...

5°) Introducing/Extracting factors:

INTRODUCIR

$$\boxed{x\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{x^n\cdot a}} \qquad (10)$$

EXTRAER

"Para introducir un factor <u>multiplicativo</u> en una raíz, hay que elevarlo al índice de la raíz"

Y, al revés:

"Para extraer un factor <u>multiplicativo</u> de una raíz, tiene que estar previamente elevado al índice de la raíz (o a un múltiplo de este)"

Dem.: $$x\cdot\sqrt[n]{a}\underset{(3)}{=}\left(x^n\right)^{1/n}\cdot a^{1/n}\underset{\text{propiedades de las raíces}}{=}\left(x^n\cdot a\right)^{1/n}\underset{(3)}{=}\sqrt[n]{x^n\cdot a}$$ (C.Q.D.)

Ejercicios: 17 (introducir)**, 18 y 19** (extraer)

V) CONSEJOS para OPERAR CORRECTAMENTE con RAÍCES

1°) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$, o $\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

En general: $\boxed{\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}\neq\sqrt[n]{A+B}}$, y viceversa

2°) $2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=6\left(\sqrt{2}\right)^2=6\cdot2=\boxed{12}$

Del mismo modo, $2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}=\boxed{6\sqrt{6}}$

3°) ¡Recordar los productos notables!:

Por ejemplo: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=$

¡Cuidado!: $(A\cdot B)^2=A^2\cdot B^2$ ¡es siempre cierto!

Ejemplo 12: $\left(2\sqrt{5}\right)^2=$

4º) Radicales semejantes: son radicales con el mismo índice y mismo radicando:

Por ejemplo: $2\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$ son radicales semejantes

$-3\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{3}$ y $-\sqrt[3]{3}$ son radicales semejantes

$2\sqrt{5}$ y $-\frac{3}{2}\sqrt{5}$ son radicales semejantes

$2\sqrt{6}$ y $2\sqrt[3]{6}$ no son radicales semejantes

Los "**radicales semejantes**" pueden ser sumados (o restados) del mismo modo que los "términos semejantes" en Álgebra:

Considerar $5\sqrt{5}-2\sqrt{5}$, que tiene la misma forma que $5x-2x$.

Si interpretamos esto como 5 "lotes" de $\sqrt{5}$ menos 2 "lotes" de $\sqrt{5}$, tendremos 3 "lotes" de $\sqrt{5}$.

Así, $5\sqrt{5}-2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$, del mismo modo que haríamos $5x-2x=3x$.

Por tanto, «**Para sumar o restar radicales, tienen que ser "radicales semejantes"**».

Ejemplo 13: **a)** $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=$

b) $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=$

c) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=$ *(Sol : $3\sqrt{2}$)*

d) $2+\sqrt{3}-\left(1-2\sqrt{3}\right)=$

e) $\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(1+3\sqrt{2}\right)=$

(Sol : $13+5\sqrt{2}$)

Ejercicios: 20 (teórico-práctico), **21** (radicales semejantes) **y 22** (operaciones con raíces)

VI) RACIONALIZACIÓN de DENOMINADORES de EXPRESIONES RADICALES

«Racionalizar el denominador de una expresión radical consiste en obtener una expresión equivalente a la dada pero cuyo denominador no contenga raíces».

¿Por qué interesa eliminar las raíces del denominador? Por ejemplo, para poder sumar expresiones radicales. Pero hay más aplicaciones que veremos en próximos cursos.

Hay tres casos de racionalización:

1er caso: El denominador contiene **solo una raíz cuadrada**.

Se racionaliza «multiplicando numerador y denominador por la raíz del denominador (¡sin añadir factores multiplicativos!)».

Nótese que esto se puede hacer porque está permitido multiplicar ambos términos de una fracción por una misma expresión. Además, este método lógicamente funciona porque si multiplicamos una raíz cuadrada por sí misma, la raíz desaparece, es decir, obtenemos un número racional. Veámoslo con ejemplos:

Ejemplo 14: **a)** $\frac{1}{\sqrt{2}} =$ *(Sol : $\sqrt{2}/2$)*

b) $\frac{2}{\sqrt{5}} =$ *(Sol : $2\sqrt{5}/5$)*

c) $\frac{3}{5\sqrt{3}} =$ *(Sol : $\sqrt{3}/5$)*

d) $\sqrt{\frac{2}{5}} =$ *(Sol : $\sqrt{10}/5$)*

Ejercicio: 23

2º caso: El denominador contiene **solo $\sqrt[3]{\ }$, o $\sqrt[4]{\ }$, etc.** (Método de "**completar el índice**")

Se racionaliza «multiplicando numerador y denominador por una raíz del mismo índice que la del denominador pero cuyo radicando complete dicho índice».

Este método también funciona porque si multiplicamos una raíz por otra del mismo índice pero cuyo radicando "complete" el índice, entonces al sumar los exponentes la raíz desaparecerá… Veamos con un ejemplo qué significa "completar el índice":

Ejemplo 15: $\frac{14}{\sqrt[3]{7}} =$ *(Sol : $2\sqrt[3]{49}$)*

Ejercicio: 24

3er caso: El denominador contiene **una expresión radical con dos términos.** (Método del "**conjugado**")

Se racionaliza «multiplicando numerador y denominador por el conjugado (esto es, la expresión que resulta de cambiar el signo entre los dos términos) del denominador».

Nótese que el método funciona porque a continuación habrá que aplicar en el denominador suma por diferencia, con lo que la raíz cuadrada desaparecerá.

Ejemplo 16: **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=$ $\qquad$ $(Sol:\ \sqrt{5}+2)$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=$ $\qquad$ $(Sol:\ \sqrt{2}-1)$

c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=$ $\qquad$ $(Sol:\ 3+2\sqrt{2})$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$ $\qquad$ $(Sol:\ \sqrt{6}+2)$

Ejercicio: 25

25 EJERCICIOS de RADICALES — 4º ESO Acad.

RECORDAR:

- Definición de raíz n-ésima: $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$

  Consecuencia: $\sqrt[\cancel{n}]{x^{\cancel{n}}} = x$, y también $\cancel{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n} = x$ ← simplificacion sencilla
- Equivalencia con una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$
- Simplificación de radicales/índice común: $\sqrt[n\cancel{p}]{x^{m\cancel{p}}} = \sqrt[n]{x^m}$

- 5 Propiedades de las raíces:
  ① $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

  ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

  ③ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

  ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

  ⑤ $x \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x^n \cdot a}$ ← Introducir/extraer factores

(Copiar este cuadro en el formulario)

Definición de raíz:

1. Calcular mentalmente, **sin usar calculadora**:

$\sqrt{9} =$ $\quad \sqrt{25} =$ $\quad \sqrt{49} =$ $\quad \sqrt{100} =$ $\quad \sqrt{1} =$

$\sqrt{0} =$ $\quad \sqrt{\dfrac{1}{4}} =$ $\quad \sqrt{\dfrac{1}{9}} =$ $\quad \sqrt{\dfrac{4}{25}} =$ $\quad \sqrt{\dfrac{16}{100}} =$

$\sqrt{0{,}25} =$ $\quad \sqrt{0{,}09} =$ $\quad \sqrt{0{,}0081} =$ $\quad \sqrt{0{,}49} =$ $\quad \sqrt{7^6} =$

$\sqrt{5^{24}} =$ $\quad \sqrt{2^{10}} =$ $\quad \sqrt{9^{-10}} =$

2. Calcular mentalmente, **sin usar calculadora**:

$\sqrt[3]{8} =$ $\quad \sqrt[3]{27} =$ $\quad \sqrt[3]{64} =$ $\quad \sqrt[3]{1000} =$ $\quad \sqrt[3]{1331} =$

$\sqrt[3]{-1} =$ $\quad \sqrt[3]{-8}$ $\quad \sqrt[3]{-27} =$ $\quad \sqrt[3]{-1000} =$

$\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} =$ $\quad \sqrt[3]{\dfrac{1}{125}} =$ $\quad \sqrt[3]{-\dfrac{64}{125}} =$ $\quad \sqrt[3]{\dfrac{64}{1000}} =$

$\sqrt[3]{0{,}125} =$ $\quad \sqrt[3]{0{,}027} =$ $\quad \sqrt[3]{0{,}001} =$ $\quad \sqrt[3]{-0{,}216} =$

$\sqrt[3]{2^9} =$ $\quad \sqrt[3]{3^6} =$ $\quad \sqrt[3]{5^{30}} =$

3. Calcular, aplicando la definición de raíz (**no vale con calculadora**), indicando el porqué (véase el ejemplo):

a) $\sqrt[3]{-8}=\boxed{-2}$ pq $(-2)^3=-8$ **b)** $\sqrt{-8}=$ **c)** $\sqrt[6]{-1}=$

d) $\sqrt[5]{-32}=$ **e)** $\sqrt[4]{81}=$ **f)** $\sqrt{5^2}=$

g) $\sqrt[6]{2^6}=$ **h)** $\sqrt{\dfrac{625}{81}}=$ **i)** $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}=$

j) $\sqrt[4]{-\dfrac{81}{16}}=$ **k)** $\sqrt[5]{3^{15}}=$ **l)** $\sqrt[3]{0{,}064}=$

m) $\sqrt{0{,}\widehat{1}}=$ **n)** $\sqrt{2{,}25}=$ **o)** $\sqrt{2{,}\widehat{7}}=$

p) $\sqrt{0{,}00\widehat{1}}=$ *(Sol: $0{,}0\widehat{3}$)*

q) $\sqrt{0{,}13\widehat{4}}=$ *(Sol: $0{,}3\widehat{6}$)*

r) $\sqrt{2{,}66\widehat{7}}=$ *(Sol: $1{,}6\widehat{3}$)*

s) $\sqrt[3]{0{,}\widehat{296}}=$ *(Sol: $0{,}\widehat{6}$)*

4. Hallar el valor de **k** en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k}=2$ *(Soluc: k=8)*

b) $\sqrt[k]{-243}=-3$ *(Soluc: k=5)*

c) $\sqrt[5]{k}=\dfrac{2}{3}$ *(Soluc: k=32/243)*

d) $\sqrt[k]{1{,}331}=1{,}1$ *(Soluc: k=3)*

Potencias de exponente fraccionario:

5. Utilizar la calculadora para hallar, con tres cifras decimales bien aproximadas (véase el 1er ejemplo):

a) $\sqrt[4]{8}\cong\boxed{1{,}682}$ **b)** $\sqrt[5]{9}$ **c)** $\sqrt[6]{25}$ **d)** $\sqrt[3]{10}$

e) $\sqrt[5]{-15}$ **f)** $\sqrt[6]{-40}$ **g)** $\sqrt[4]{2^3}$ **h)** $\sqrt[5]{3^2}$

i) $\sqrt[6]{5^2}$ **j)** $\sqrt[8]{256}$ **k)** $\sqrt[3]{64}$

6. Hallar $\sqrt[3]{3}$ con cuatro cifras decimales bien aproximadas, razonando el error cometido.

7. Calcular las siguientes potencias de dos formas distintas, y comprobar que se obtiene idéntico resultado (en ambos casos **no vale utilizar la calculadora**):

- Pasando a forma de raíz.
- Reemplazando la base por su descomposición en factores primos. (Véase el 1^er^ ejemplo)

a) $4^{1/2}=\sqrt{4}=\boxed{2}$, o bien $4^{1/2}=\left(2^{\cancel{2}}\right)^{\cancel{1/2}}=\boxed{2}$ **b)** $125^{1/3}=$

c) $625^{1/4}=$ **d)** $8^{2/3}=$

e) $64^{5/6}=$ **f)** $81^{3/4}=$

g) $8^{-2/3}=$ **h)** $27^{-1/3}=$

Radicales equivalentes. Simplificación y comparación de radicales:

8. Simplificar los siguientes radicales, y comprobar el resultado con la calculadora cuando proceda (véase el 1^er^ ejemplo):

a) $\sqrt[4]{3^2}=\sqrt[4/2]{3^{2/2}}=\boxed{\sqrt{3}}$ **b)** $\sqrt[8]{5^4}=$ **c)** $\sqrt[9]{27}=$ **d)** $\sqrt[5]{1024}=$

e) $\sqrt[6]{8}=$ **f)** $\sqrt[9]{64}=$ **g)** $\sqrt[8]{81}=$ **h)** $\sqrt[12]{x^9}=$

i) $\sqrt[12]{x^8}=$ **j)** $\sqrt[5]{x^{10}}=$ **k)** $\sqrt[4]{x^9}=$ **l)** $\sqrt[6]{a^2b^4}=$

m) $\sqrt[10]{a^4b^6}=$ **n)** $\sqrt[6]{5^3}=$ **o)** $\sqrt[15]{2^{12}}=$ **p)** $\sqrt[10]{a^8}=$

q) $\sqrt[12]{x^4y^8z^4}=$ **r)** $\sqrt[8]{\left(x^2y^2\right)^2}=$ **s)** $\sqrt[5]{a^{10}b^{15}c^{12}}=$

t) $\sqrt[4]{a^6b^3}=$ **u)** $\sqrt[6]{0{,}000512}=$ *$\left(Sol:\sqrt{0{,}08}\right)$*

v) $\sqrt[4]{0{,}\widehat{4}}=$ *$\left(Sol:\sqrt{0{,}\widehat{6}}\right)$*

9. Decir si los siguientes radicales son equivalentes (y comprobar después con la calculadora):

a) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[8]{625}$ *(Soluc: Sí)*

b) $\sqrt{9}\,,\ \sqrt[3]{27}\,,\ \sqrt[4]{49}\,,\ \sqrt[5]{243}$ *(Soluc: NO)*

c) $\sqrt{2}\,,\ \sqrt[4]{4}\,,\ \sqrt[6]{8}\,,\ \sqrt[8]{16}$ *(Soluc: SÍ)*

10. Reducir los siguientes radicales a índice común y ordenarlos de menor a mayor (y comprobar el resultado con la calculadora):

a) $\sqrt{5}\,,\ \sqrt[5]{2^3}\,,\ \sqrt[15]{7^2}$

$\left(Sol: \sqrt[15]{7^2} < \sqrt[5]{2^3} < \sqrt{5}\right)$

b) $\sqrt[3]{5}\,,\ \sqrt[5]{7^3}\,,\ \sqrt[15]{3^2}$

$\left(Sol: \sqrt[15]{3^2} < \sqrt[3]{5} < \sqrt[5]{7^3}\right)$

c) $\sqrt[4]{3}\,,\ \sqrt[6]{16}\,,\ \sqrt[15]{9}$

$\left(Sol: \sqrt[15]{9} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[6]{16}\right)$

d) $\sqrt{2}\,,\ \sqrt[3]{32}\,,\ \sqrt[5]{27}$

$\left(Sol: \sqrt{2} < \sqrt[5]{27} < \sqrt[3]{32}\right)$

e) $\sqrt{2}\,,\ \sqrt[3]{3}\,,\ \sqrt[4]{4}\,,\ \sqrt[5]{5}\,,\ \sqrt[6]{6}$

$\left(Sol: \sqrt[6]{6} < \sqrt[5]{5} < \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}\right)$

f) $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[4]{125}$, $\sqrt[6]{243}$

$\left(Sol: \sqrt[6]{243} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[4]{125}\right)$

g) $\sqrt[4]{31}$ y $\sqrt[3]{13}$

$\left(Sol: \sqrt[3]{13} < \sqrt[4]{31}\right)$

h) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132650}$

$\left(Sol: \sqrt[9]{132650} < \sqrt[3]{51}\right)$

i) $\sqrt[3]{-10}$ y $\sqrt[4]{8}$

$\left(Sol: \sqrt[3]{-10} < \sqrt[4]{8}\right)$

Operaciones con radicales:

11. Multiplicar los siguientes radicales de igual índice, y simplificar cuando sea posible (véase el 1^er ejemplo):

a) $\sqrt{2}\,\sqrt{32} = \sqrt{64} = \boxed{8}$

b) $\sqrt{2}\,\sqrt{15} =$

c) $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{9} =$

d) $\sqrt{2}\,\sqrt{8} =$

e) $\sqrt{3}\,\sqrt{4} =$

f) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{5} =$

g) $\sqrt{12}\,\sqrt{6}\,\sqrt{50} =$

$(Sol: 60)$

h) $\sqrt{21}\,\sqrt{7} =$ $\left(Sol: 7\sqrt{3}\right)$

i) $4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{27} =$

$(Sol: 72)$

j) $\sqrt{125}\cdot 5\sqrt{5} =$

$(Sol: 125)$

k) $\sqrt{2}\,\sqrt[4]{4} =$ $(Sol: 2)$

l) $-3\sqrt[3]{a^2}\cdot a\sqrt[3]{a} =$

$\left(Sol: -3a^2\right)$

m) $4\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{32} =$

$\left(Sol: 128\sqrt{2}\right)$

n) $\sqrt{7}\,\sqrt{7} =$

o) $\sqrt{137}\,\sqrt{137} =$

p) $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right) =$

$(Sol: x-1)$

q) $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right) =$

$(Sol: x-a)$

12. Multiplicar los siguientes radicales de distinto índice, reduciendo previamente a índice común, y simplificar (véase el 1<u>er</u> ejemplo):

a) $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{32}=\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2^5}=\sqrt[6]{2^3}\,\sqrt[6]{2^{10}}=\boxed{\sqrt[6]{2^{13}}}$

b) $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[4]{8}=$ $\qquad(Sol: \sqrt[12]{2^{13}})$

c) $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[5]{2}=$ $\qquad(Sol: \sqrt[15]{2^{8}})$

d) $\sqrt[3]{9}\ \sqrt[6]{3}=$ $\qquad(Sol: \sqrt[6]{243})$

e) $\sqrt[3]{2^2}\ \sqrt[4]{2}=$ $\qquad(Sol: \sqrt[12]{2^{11}})$

f) $\sqrt[4]{a^3}\ \sqrt[6]{a^5}=$ $\qquad(Sol: \sqrt[12]{a^{19}})$

g) $\sqrt[3]{2}\ \sqrt{3}\ \sqrt[4]{8}=$ $\qquad(Sol: \sqrt[12]{2^{13}3^{6}})$

h) $\sqrt[4]{8}\ \sqrt[3]{4}\ \sqrt{a^3}=$ $\qquad(Sol: \sqrt[12]{2^{17}a^{18}})$

i) $\sqrt[10]{7}\ \sqrt[5]{49}=$ $\qquad(Sol: \sqrt{7})$

13. Simplificar, aplicando convenientemente las propiedades de las raíces (véase el 1<u>er</u> ejemplo):

a) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{32}{2}}=\sqrt{16}=\boxed{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{9}}=$

d) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=$

g) $\sqrt{\dfrac{256}{729}}=$ $\qquad(Sol: 16/27)$

h) $\dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{3}}=$ $\qquad(Sol: \sqrt{11})$

i) $\dfrac{\sqrt{21}}{2\sqrt{7}}=$ $\qquad(Sol: \sqrt{3}/2)$

j) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{512}}=$

k) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}}=$

l) $\dfrac{\sqrt{2}\ \sqrt{8}}{\sqrt{32}}=$

$(Sol: 1/\sqrt{2})$

m) $\sqrt{\dfrac{154}{9}+23} - \sqrt{4\dfrac{144}{9}} =$

$(Sol: -5/3)$

n) $\sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$(Sol: 3)$

o) $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{-4\dfrac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{25-\dfrac{25}{2}}}{25-\dfrac{25}{2}} =$

$(Sol: -2)$

p) $2\sqrt{\dfrac{144}{25}+1} - 3\sqrt{\dfrac{144}{25}} =$

$(Sol: -2)$

q) $\dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}} =$ $(Sol: \sqrt{6})$

14. ¿Cómo podríamos comprobar rápidamente que $\dfrac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$? (no vale calculadora) *(Sol: multiplicando en cruz)*

15. Operar los siguientes radicales de distinto índice, reduciendo previamente a índice común (véase el 1er ejemplo):

a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}}=\dfrac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[4]{2}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^6}}{\sqrt[4]{2}}=\boxed{\sqrt[4]{2^5}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}} =$ $(Sol: \sqrt{3})$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{32}} =$ $\left(Sol: \dfrac{1}{\sqrt[6]{2^7}}\right)$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}} =$ $(Sol: 1)$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt{7}} =$ $(Sol: \sqrt[6]{7})$

f) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} =$ $(Sol: \sqrt[3]{9})$

g) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}=$ $\left(Sol:\sqrt[10]{8}\right)$

h) $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{ab}}=$ $\left(Sol:\sqrt[6]{ab}\right)$

i) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}}=$ $\left(Sol:\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}}\right)$

j) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}=$ $\left(Sol:1/\sqrt[6]{a}\right)$

k) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\ \sqrt{3}}{\sqrt[6]{12}}=$ $\left(Sol:\sqrt[3]{6}\right)$

l) $\dfrac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{4}\ \sqrt{2}}=$ $\left(Sol:\dfrac{\sqrt[8]{8}}{2}\right)$

m) $\dfrac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{125}}{\sqrt[4]{25}}=$ $\left(Sol:\sqrt[3]{625}\right)$

n) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[12]{2}}{\sqrt[12]{18}}=$ $\left(Sol:\sqrt[3]{6}\right)$

o) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[12]{2}}{\sqrt[4]{2}}=$ $\left(Sol:\sqrt{6}\right)$

p) $\dfrac{\sqrt[6]{54}\cdot\sqrt[12]{27}}{\sqrt[12]{4}\cdot\sqrt[4]{12}}=$ $\left(Sol:\sqrt{3/2}\right)$

q) $\dfrac{\sqrt[4]{abc^2}\cdot\sqrt[12]{a^3b^5c^2}}{\sqrt[6]{a^2b^2c}}=$ $\left(Sol:\sqrt[6]{ab^2c^3}\right)$

16. Simplificar (véanse los dos ejemplos):

a) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6=\sqrt[3]{a^{12}}=a^{12/3}=\boxed{a^4}$

b) $\left(\sqrt[6]{ab^2}\right)^2=$ $\left(Sol:\sqrt[3]{ab^2}\right)$

c) $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{x} =$ $\left(Sol: \sqrt[6]{x^{11}}\right)$

d) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2} =$ $\left(Sol: \sqrt[6]{32}\right)$

e) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^3} =$ $\left(Sol: \sqrt[12]{2^{13}}\right)$

f) $\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 =$ $\left(Sol: \sqrt[12]{2^{23}}\right)$

g) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^5}{\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt[3]{3}\right)^4} =$ $\left(Sol: \dfrac{1}{\sqrt[12]{3^{13}}}\right)$

h) $\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{2}\ \sqrt[3]{4}\right)^3 =$ $\left(Sol: \sqrt[4]{2^{13}}\right)$

i) $\sqrt{\sqrt{2^6}} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

j) $\sqrt{\sqrt{12}} =$ $\left(Sol: \sqrt[4]{12}\right)$

k) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 =$ $(Sol: 2)$

l) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5x^7}} =$ $(Sol: x)$

m) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{15}}} =$ $\left(Sol: \sqrt[4]{x^5}\right)$

n) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{\sqrt{8x^3}}}\right)^7 =$ $\left(Sol: \sqrt{2x}\right)$

TIPO EXAMEN **o)** $\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}}\right)^5\left(\sqrt[4]{5}\right)^3 =$ $\left(Sol: \sqrt[12]{5^{19}}\right)$

p) $\left(\sqrt{2}\right)^8 - 8\left(\sqrt{2}\right)^6 + 24\left(\sqrt{2}\right)^4 - 32\left(\sqrt{2}\right)^2 + 16 =$ $(Sol: 0)$

q) $\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}\right)^6} =$ $(Sol: x)$

r) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[4]{8}\right)^3}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}} =$ $\left(Sol: \sqrt[12]{2^{35}}\right)$

s) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\left(\sqrt{a^3}\right)^3}{\left(\sqrt{a}\right)^3\cdot\sqrt[3]{a^4}}=$ $\left(Sol: a^2\right)$

t) $\dfrac{\left(\sqrt{27}\right)^3\cdot\sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{81}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3}=$ $\left(Sol: 9\right)$

u) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{\sqrt[5]{27}}}=$ $\left(Sol: \sqrt[15]{9}\right)$

17. Introducir convenientemente factores y simplificar (véase el 1er ejemplo):

1) $2\sqrt{2}=\sqrt{2^2\cdot 2}=\sqrt{2^3}=\boxed{\sqrt{8}}$

2) $2\sqrt{3}=$

3) $2\sqrt{\dfrac{3}{2}}=$ $\left(Sol: \sqrt{6}\right)$

4) $3\sqrt{2}=$

5) $3\sqrt{\dfrac{2}{27}}=$ $\left(Sol: \sqrt{2/3}\right)$

6) $3\sqrt[3]{3}=$

7) $6\sqrt{\dfrac{5}{12}}=$ $\left(Sol: \sqrt{15}\right)$

8) $3\sqrt[4]{5}=$

9) $ab\sqrt{\dfrac{c}{ab^3}}=$ $\left(Sol: \sqrt{\dfrac{ac}{b}}\right)$

10) $3\sqrt{7}=$

11) $2a\sqrt{\dfrac{3c}{2a}}=$ $\left(Sol: \sqrt{6ac}\right)$

12) $\sqrt{x\sqrt{x}}=$ $\left(Sol: \sqrt[4]{x^3}\right)$

13) $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}=$ $\left(Sol: \sqrt[3]{4}\right)$

14) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} =$ $\left(Sol: \sqrt[8]{2^7}\right)$

15) $\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt{3}}} =$ $\left(Sol: \sqrt[4]{27}\right)$

TIPO EXAMEN

16) $\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{2} =$ $(Sol: 2)$

17) $\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}} =$

$\left(Sol: \sqrt{2}\right)$

18) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}\,\sqrt{2}}\right)^3 =$

$(Sol: 4)$

19) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\;\sqrt[3]{3}} =$

$(Sol: 3)$

20) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3\sqrt{3}}\;\sqrt[3]{3}}\right)^2 =$

$\left(Sol: \sqrt[18]{3^{13}}\right)$

21) $\dfrac{\sqrt[3]{81}\,\left(\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\;\sqrt{\sqrt[3]{9}}} =$

$(Sol: 9)$

22) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}\;\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\;\sqrt[4]{8}} =$

$\left(Sol: \sqrt{2}\right)$

23) $\dfrac{\left(\sqrt{2\;\sqrt[3]{2}}\right)^3}{\sqrt{2\sqrt{2}}\;\sqrt[4]{2}} =$

$(Sol: 2)$

24) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}} =$

$\left(Sol: \sqrt[6]{x/y}\right)$

25) $\dfrac{\sqrt[3]{-2000}}{3\sqrt{2}} =$

$\left(Sol: -\dfrac{10}{3\sqrt[6]{2}}\right)$

26) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2 b}\right)^2}{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}} =$

$\left(Sol: \sqrt[12]{a^8 b^7}\right)$

27) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{3}\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}} =$

$\left(Sol: \sqrt[6]{3^{11}}\right)$

28) $\dfrac{\sqrt{125}\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{\sqrt{5\sqrt[3]{25}}} =$

$\left(Sol: \sqrt[3]{5^4}\right)$

29) $\sqrt{ab\sqrt{8ab\sqrt{4a^2b^2}}} =$

$\left(Sol: 2ab\right)$

30) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\left(\sqrt{a^3}\right)^3}{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^3}}} =$

$\left(Sol: \sqrt[3]{a^{13}}\right)$

31) $\dfrac{\left(\sqrt{125}\right)^3}{\sqrt{5\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{25}}} =$

$\left(Sol: \sqrt[12]{5^{41}}\right)$

32) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}\sqrt{4\sqrt{2}}}}{\left(\sqrt[8]{2}\right)^2} =$ $\left(Sol: \sqrt[24]{2^{25}}\right)$

33) $\dfrac{\sqrt[3]{\left(a\cdot\sqrt[3]{a}\right)^2}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}}=$

$\left(Sol: a\sqrt[9]{a^2}\right)$

34) $\dfrac{\sqrt[3]{\left(5\cdot\sqrt[3]{5}\right)^2}\cdot\sqrt{5}}{5\sqrt[9]{25}}=$

$\left(Sol: \sqrt[6]{5}\right)$

35) $\dfrac{\sqrt[3]{81}\,\left(\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\,\sqrt{\sqrt[3]{9}}}=$

$\left(Sol: 9\right)$

18. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas, y comprobar que se obtiene el mismo resultado:

- Operando, teniendo en cuenta las propiedades de las raíces (Resultado como un único radical).
- Pasando a potencia de exponente fraccionario, y aplicando a continuación las propiedades de las potencias.

a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}=$

$\left(Sol: \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}}=$

$\left(Sol: \dfrac{1}{\sqrt[6]{a^5}}\right)$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}\,\dfrac{a^3}{\sqrt{a}}=$

$\left(Sol: \sqrt[6]{a^7}\right)$

d) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} =$

$\left(Sol: \sqrt[4]{8}\right)$

19. Extraer factores, y simplificar cuando proceda (véase el 1^er^ ejemplo):

1) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2\,2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

2) $\sqrt{18} =$

3) $\sqrt{98} =$

4) $\sqrt{32} =$

5) $\sqrt{60} =$

6) $\sqrt{72} =$

7) $\sqrt{128} =$

8) $\sqrt{162} =$

9) $\sqrt{200} =$

10) $\sqrt{12} =$

11) $\sqrt{27} =$

12) $\sqrt{48} =$

13) $\sqrt{75} =$

14) $\sqrt{108} =$

15) $\sqrt[3]{3^4 5^5} =$

$\left(Sol: 15\ \sqrt[3]{75}\right)$

16) $\sqrt[4]{80} =$

$\left(Sol: 2\sqrt[4]{5}\right)$

TIPO EXAMEN

17) $\sqrt[3]{2592} =$

$\left(Sol: 6\sqrt[3]{12}\right)$

18) $\sqrt[5]{279936} =$

$\left(Sol: 6\sqrt[5]{36}\right)$

19) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10} =$ $\left(Sol: 4\sqrt{2}\right)$

20) $\sqrt[3]{500} =$ $\left(Sol: 5\sqrt[3]{4}\right)$

21) $\sqrt[3]{32x^4} =$ $\left(Sol: 2x\sqrt[3]{4x}\right)$

22) $\sqrt{1936} =$ $\left(Sol: 44\right)$

23) $\sqrt{3{,}24} =$

$\left(Sol: 1{,}8\right)$

24) $\sqrt{529} =$

25) $\sqrt{676} =$ $\left(Sol: 26\right)$

26) $\sqrt[3]{128a^2b^7} =$

$\left(Sol: 4b^2\sqrt[3]{2a^2b}\right)$

27) $\sqrt[3]{81a^3b^5c} =$

$\left(Sol: 3ab\ \sqrt[3]{3b^2c}\right)$

28) $\sqrt[3]{2^{11}a^2b^{19}} =$

$\left(Sol: 8b^6\sqrt[3]{4a^2b}\right)$

29) $\sqrt[5]{64} =$ $\left(Sol: 2\ \sqrt[5]{2}\right)$

30) $\sqrt[3]{16x^6} =$

31) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}} =$

$\left(Sol: \dfrac{2x^2}{5y}\sqrt{\dfrac{7x}{3y}}\right)$

32) $\dfrac{11\sqrt{132}}{132} =$

$\left(Sol: \sqrt{33}/6\right)$

33) $\dfrac{\sqrt{396}}{66} =$

$\left(Sol: \sqrt{11}/11\right)$

34) $\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} =$ $\left(Sol: \dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)$

35) $\dfrac{\sqrt{11}\sqrt{132}}{132} =$

$\left(Sol: \sqrt{3}/6\right)$

36) $\sqrt{25 + \dfrac{25}{4}} =$

$\left(Sol: 5\sqrt{5}/2\right)$

37) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{50} =$

$\left(Sol: 30\sqrt{2}\right)$

38) $5\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\sqrt[3]{\dfrac{4}{81}} =$

$\left(Sol: \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{2}\right)$

39) $\sqrt{36^2 + 27^2} =$

$\left(Sol: 45\right)$

20. ¿V o F? Razonar **algebraicamente** la respuesta:

a) $\dfrac{\cancel{5}+\sqrt{3}}{\cancel{5}} = 1+\sqrt{3}$ *(Soluc: F)*

b) $\dfrac{\cancel{5}+\sqrt{3}}{\cancel{5}} = \sqrt{3}$ *(Soluc: F)*

c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2} = 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *(Soluc: V)*

d) $\dfrac{\cancel{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\cancel{5}} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *(Soluc: F)*

e) $\dfrac{3+6\sqrt{2}}{3} = 1+2\sqrt{2}$ *(Soluc: V)*

f) $\dfrac{4+14\sqrt{5}}{6} = \dfrac{2+7\sqrt{5}}{3}$ *(Soluc: V)*

g) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 2+3 = 5$ *(Soluc: F)*

h) $\sqrt{16+9} = 4+3 = 7$ *(Soluc: F)*

i) $4+2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ *(Soluc: F)*

21. Sumar los siguientes radicales, reduciéndolos previamente a radicales semejantes (véase el 1er ejemplo):

1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}=\sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{3^2 2}-\sqrt{2^5}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2^2\sqrt{2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{2}}$

1º) FACTORIZAMOS RADICANDOS — 2º) EXTRAEMOS FACTORES — 3º) SUMAMOS RADICALES SEMEJANTES

2) $\sqrt{3}+\sqrt{12}=$ *(Soluc: $3\sqrt{3}$)*

3) $\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}=$

(Soluc: $6\sqrt{5}$)

4) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}=$

(Soluc: $6\sqrt{6}$)

5) $\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}=$ *(Soluc: $-\sqrt[3]{2}$)*

6) $27\sqrt{3}-5\sqrt{27}-9\sqrt{12}=$

(Soluc: $-6\sqrt{3}$)

7) $\sqrt{75}-\sqrt{20}-\sqrt{12}+\sqrt{45}=$

(Soluc: $3\sqrt{3}+\sqrt{5}$)

8) $\sqrt{2\sqrt{2}}+\left(\sqrt[4]{2}\right)^3+\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}=$

(Soluc: $2\sqrt[4]{8}$)

9) $2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}=$

(Soluc: $8\sqrt{2}$)

10) $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\sqrt{6}=$ *(Soluc: $2\sqrt{2}$)*

11) $5\sqrt[6]{256}-2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{128}=$

(Soluc: $2\sqrt[3]{2}$)

12) $\sqrt{32}+2\sqrt{3}-\sqrt{8}+\sqrt{2}-2\sqrt{12}=$

(Soluc: $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$)

13) $\sqrt{8}+\sqrt{18}=$ *(Soluc: $5\sqrt{2}$)*

14) $3\sqrt{24}-\frac{1}{3}\sqrt{54}+\sqrt{150}=$

(Soluc: $10\sqrt{6}$)

15) $5\sqrt{2}+4\sqrt{8}+3\sqrt{18}+2\sqrt{32}+\sqrt{50}=$

(Soluc: $35\sqrt{2}$)

16) $\sqrt[3]{5^5}+\sqrt[3]{5^5}=$ *(Soluc: $10\sqrt[3]{25}$)*

17) $\sqrt{20}-\frac{1}{5}\sqrt{5}+\sqrt{45}=$ *(Soluc: $\frac{24}{5}\sqrt{5}$)*

18) $2\sqrt{108}-\sqrt{75}-\sqrt{27}-\sqrt{12}-\sqrt{3}=$

(Soluc: $\sqrt{3}$)

19) $\sqrt{128}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}-3\sqrt{27}-\sqrt{2}=$

(Soluc: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$)

20) $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}=$

TIPO EXAMEN **21)** $2\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{24}-\frac{1}{2}\sqrt{54}=$

(Soluc: $\sqrt{6}$)

22) $\sqrt{5}+\sqrt{\frac{45}{4}}=$ *(Soluc: $\frac{5}{2}\sqrt{5}$)*

23) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{18}{75}}=$ *(Soluc: $\frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$)*

24) $\sqrt{\frac{1}{2}}+3\sqrt{\frac{1}{8}}=$ *(Soluc: $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$)*

25) $\sqrt{\frac{3}{16}}-4\sqrt{12}=$ *(Soluc: $-\frac{31}{4}\sqrt{3}$)*

26) $\sqrt{\frac{5}{12}}-\sqrt{\frac{10}{6}}=$ *(Soluc: $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$)*

27) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}=$ *(Soluc: $2\sqrt{2a}$)*

28) $5\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}-\sqrt{300}=$

(Soluc: $-\frac{17}{2}\sqrt{3}$)

29) $\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{27}}{3}+\frac{5\sqrt{243}}{9}=$

(Soluc: $4\sqrt{3}$)

30) $6\sqrt[6]{4}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{16}-3\sqrt[9]{8}+5\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=$

(Soluc: $4\sqrt[3]{2}$)

31) $2\sqrt[4]{\frac{2}{81}}-\sqrt[8]{4}+2\sqrt[4]{32}=$

(Soluc: $\frac{11}{3}\sqrt[4]{2}$)

32) $\sqrt[3]{\frac{3}{64}}+2\sqrt[3]{81}-\sqrt[6]{9}-\frac{5}{4}\sqrt[3]{3}=$

(Soluc: $4\sqrt[3]{3}$)

33) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=$

(Soluc: $\sqrt[3]{2}$)

34) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{40}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{5}+\frac{5}{2}\sqrt[3]{320}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{1080}+\sqrt[3]{\frac{135}{8}}=$

(Soluc: $4\sqrt[3]{5}$)

35) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{\frac{3}{8}}=$

(Soluc: $2\sqrt[3]{3}$)

36) $\sqrt{9x+9}-\sqrt{4x+4}=$ *(Soluc: $\sqrt{x+1}$)*

37) $a\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{a^3}}{3}=$ *(Soluc: $\dfrac{2a\sqrt{a}}{3}$)*

38) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^3+\sqrt{\dfrac{2}{9}}+\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}-\dfrac{1}{3}\sqrt{2}=$

(Soluc: $2\sqrt{2}$)

39) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{36}}-\sqrt[3]{\dfrac{3}{8}}-\sqrt[3]{3}+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{3}\right)^4=$

(Soluc: $2\sqrt[3]{3}$)

40) $\sqrt{\sqrt[3]{128}}-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt[3]{54}}+\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{4}=$

(Soluc: $5\sqrt[6]{2}$)

RECORDAR LAS IGUALDADES NOTABLES:

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$
$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$$
$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

22. Calcular, dando el resultado lo más simplificado posible (véanse los ejemplos):

1) $\left(2\sqrt{2}\right)^2=$ *(Soluc: 8)*

2) $\left(3\sqrt{5}\right)^2=$ *(Soluc: 45)*

3) $\left(5+\sqrt{3}\right)^2=5^2+2\cdot5\cdot\sqrt{3}+\left(\cancel{\sqrt{3}}\right)^{\cancel{2}}=25+10\sqrt{3}+3=\boxed{28+10\sqrt{3}}$

4) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2=$ *(Soluc: $3+2\sqrt{2}$)*

5) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=$ *(Soluc: $5+2\sqrt{6}$)*

6) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=$ *(Soluc: $5-2\sqrt{6}$)*

7) $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=$ *(Soluc: 1)*

8) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$ *(Soluc: 1)*

9) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)=2\cdot3-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{3}=6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3=\boxed{3+\sqrt{3}}$

10) $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{8}\right)=$ *(Soluc: $-3-\sqrt{2}$)*

11) $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{12}\right)=$

(Soluc: $-4+3\sqrt{3}$)

12) $2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}=$ *(Soluc: $6\sqrt{6}$)*

13) $2\sqrt{8}\cdot8\sqrt{2}=$ *(Soluc: 64)*

14) $3\sqrt{6}\cdot2\sqrt{3}=$ *(Soluc: $18\sqrt{2}$)*

15) $2\sqrt{15}\cdot3\sqrt{15}=$ *(Soluc: 90)*

16) $\left(5\sqrt{3}\right)^2=$ *(Soluc: 75)*

17) $\left(5+\sqrt{3}\right)^2=$ *(Soluc: $28+10\sqrt{3}$)*

18) $\left(5-\sqrt{3}\right)^2=$ *(Soluc: $28-10\sqrt{3}$)*

19) $\left(5+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)=$ *(Soluc: 22)*

20) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=$ *(Soluc: $8+2\sqrt{15}$)*

21) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2=$ *(Soluc: $8-2\sqrt{15}$)*

22) $\left(2\sqrt{3}+5\right)^2=$ *(Soluc: $37+20\sqrt{3}$)*

23) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2=$ *(Soluc: $30+12\sqrt{6}$)*

24) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)=$ *(Soluc: -6)*

25) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-4\right)=$ *(Soluc: $2-4\sqrt{2}$)*

26) $\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}=$ *(Soluc: $2\sqrt{3}-3$)*

27) $\left(3\sqrt{2}+2\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=$

(Soluc: $4\sqrt{6}-2\sqrt{3}$)

28) $\left(-\sqrt{5}+2\right)^2=$ *(Soluc: $9-4\sqrt{5}$)*

29) $\left(2\sqrt{5}-5\right)\sqrt{5}=$ *(Soluc: $10-5\sqrt{5}$)*

30) $\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)=$

(Soluc: $-43+2\sqrt{6}$)

31) $\left(3\sqrt{2}-4\right)^2=$ *(Soluc: $34-24\sqrt{2}$)*

32) $2\sqrt{35}\sqrt{35}=$ *(Soluc: 70)*

33) $\left(2\sqrt{8}+3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right)=$

(Soluc: 56)

34) $\left(2\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)=$ *(Soluc: -30)*

35) $\left(2\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}+2\right)=$

(Soluc: $-30+6\sqrt{10}+4\sqrt{5}-10\sqrt{2}$)

36) $\left(2\sqrt{27}-3\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=$

(Soluc: $15+3\sqrt{3}$)

37) $\left(3\sqrt{8}-4\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-5\sqrt{8}\right)=$

(Soluc: -32)

38) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2=$

(Soluc: 22)

39) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2=$

(Soluc: 1)

40) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2\left(5-\sqrt{21}\right)=$

41) $\left(3\sqrt{8}+2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{8}-3\sqrt{2}\right)=$

(Soluc: 16)

42) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2=$ *(Soluc: $30-12\sqrt{6}$)*

43) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$

44) $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=$

Racionalización:

23. Racionalizar denominadores, y simplificar (véase el 1$^{\underline{er}}$ ejemplo):

1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=$ *(Soluc: $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$)*

3) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}=$ *(Soluc: $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$)*

4) $\dfrac{5}{3\sqrt{5}}=$ *(Soluc: $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$)*

5) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=$ *(Soluc: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$)*

6) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=$ *(Soluc: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$)*

7) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7}$ *)*

8) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$ *(Soluc:* $\sqrt{2}+1$ *)*

9) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ *)*

10) $\dfrac{1}{\sqrt{27}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ *)*

11) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *)*

12) $\dfrac{12}{\sqrt{8}}=$ *(Soluc:* $3\sqrt{2}$ *)*

13) $\dfrac{\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ *)*

14) $\dfrac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ *)*

15) $\dfrac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ *)*

16) $\dfrac{-2\sqrt{7}}{7\sqrt{2}}=$ *(Soluc:* $-\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ *)*

17) $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt{33}}{6}$ *)*

18) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ *)*

19) $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1}{\sqrt{2}}=$ *(Soluc:* $2+2\sqrt{2}$ *)*

20) $\dfrac{1-\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}}=$

(Soluc: $2-\sqrt{2}$)

21) $\dfrac{\sqrt{81+\dfrac{81}{4}}}{\sqrt{5}}=$

(Soluc: $\dfrac{9}{2}$)

22) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{125}}=$

(Soluc: $\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$)

23) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=$ (Soluc: $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$)

24) $\dfrac{\dfrac{15}{2}}{\left(\sqrt{\dfrac{15}{2}}\right)^3}=$

(Soluc: $\dfrac{\sqrt{30}}{15}$)

25) $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}=$

(Soluc: $\dfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}$)

26) $\dfrac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}=$ (Soluc: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$)

27) $\dfrac{3\sqrt{10}}{5\sqrt{6}}=$ *(Soluc: $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$)*

28) $\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}=$ *(Soluc: $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$)*

29) $2\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{50}=$

(Soluc: $\dfrac{13}{2}\sqrt{2}$)

24. Racionalizar denominadores, y simplificar (veáse el 1^er^ ejemplo):

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\cancel{\sqrt[3]{2^3}}}=\boxed{\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{9}}=$ *(Soluc: $\sqrt[5]{27}$)*

3) $\dfrac{8}{\sqrt[6]{8}}=$ *(Soluc: $4\sqrt{2}$)*

4) $\dfrac{10}{3\sqrt[4]{125}}=$ *(Soluc: $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{5}$)*

5) $\dfrac{\sqrt[5]{25}}{5\sqrt[3]{5}}=$ *(Soluc: $\dfrac{\sqrt[15]{5}}{5}$)*

6) $\dfrac{10}{\sqrt[5]{128}}=$ *(Soluc: $\dfrac{5}{2}\sqrt[5]{8}$)*

7) $\dfrac{\sqrt{3}}{5\sqrt[5]{27}}=$ *(Soluc: $\dfrac{\sqrt[10]{3^9}}{15}$)*

8) $\dfrac{3\sqrt[5]{9}}{2\sqrt[3]{243}}=$ *(Soluc: $\dfrac{\sqrt[15]{3^{11}}}{6}$)*

9) $\dfrac{5\sqrt{15}}{\sqrt[3]{15}}=$ *(Soluc:* $5\sqrt[6]{15}$ *)*

10) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}=$ *(Soluc:* $\sqrt[10]{3}$ *)*

11) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}}=$ *(Soluc:* $\sqrt[10]{8}$ *)*

12) $\dfrac{3}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}=$ *(Soluc:* $\sqrt[6]{243}$ *)*

13) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{64}}=$ *(Soluc:* $\sqrt{2}$ *)*

14) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}+\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}=$

(Soluc: $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ *)*

15) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt[6]{2a}}{\sqrt[3]{2a^2}}=$

(Soluc: $\dfrac{2\sqrt[6]{a^5}}{a}$ *)*

16) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1296}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{36}$ *)*

17) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[5]{49}}=$ *(Soluc:* $\sqrt[10]{7}$ *)*

18) $\dfrac{a^2}{\sqrt[7]{a^2}}=$ *(Soluc:* $a\sqrt[7]{a^5}$ *)*

19) $\dfrac{2a}{\sqrt[5]{2a^3}}=$ (*Soluc:* $\sqrt[5]{16a^2}$)

20) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{25}}=$ (*Soluc:* $\sqrt[5]{125}$)

21) $\dfrac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[3]{25}}+\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}}=$ (*Soluc:* $\sqrt[6]{3125}$)

22) $\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=$ $\left(\textit{Soluc: } \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$

23) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{6}}=$ $\left(\textit{Soluc: } \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$

25. Racionalizar denominadores, y simplificar (véase el ejemplo). Comprobar en el caso de los sombreados.

1) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{1-\cancel{\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1-3}=\boxed{-\dfrac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$

2) $\dfrac{9}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=$ (*Soluc:* $\dfrac{9}{4}\sqrt{7}+\dfrac{9}{4}\sqrt{3}$)

3) $\dfrac{4(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}-1}=$ (*Soluc:* $7+3\sqrt{5}$)

4) $\dfrac{3(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}+2}=$ (*Soluc:* $5-\sqrt{7}$)

5) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=$ (*Soluc:* $2+\sqrt{3}$)

6) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=$ *(Soluc:* $2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ *)*

7) $\dfrac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=$ *(Soluc:* $-13+6\sqrt{3}$ *)*

8) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=$ *(Soluc:* $\sqrt{2}$ *)*

9) $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6+\sqrt{6}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{4}{5}\sqrt{2}-\dfrac{3}{5}\sqrt{3}$*)*

10) $\dfrac{7}{7-\sqrt{7}}=$ *(Soluc:* $\dfrac{7}{6}+\dfrac{\sqrt{7}}{6}$*)*

11) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$ *(Soluc:* $4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ *)*

12) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}-2}=$ *(Soluc:* $\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{14}\sqrt{2}$*)*

13) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$ *(Soluc:* $3-\sqrt{6}$ *)*

14) $\dfrac{7}{\sqrt{8}-2}=$ *(Soluc:* $\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$*)*

15) $\dfrac{2\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}-2}=$ *(Soluc:* $4+\sqrt{3}$ *)*

16) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=$ *(Soluc:* $-2-\sqrt{3}$ *)*

17) $\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$ *(Soluc: $\frac{16}{17}+\frac{5}{17}\sqrt{15}$)*

18) $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}+4}=$ *(Soluc: $17-12\sqrt{2}$)*

19) $\dfrac{2\sqrt{8}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{8}+3\sqrt{2}}=$ *(Soluc: 1/7)*

20) $\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}=$ *(Soluc: $\sqrt{2}$)*

21) $\dfrac{12-5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}=$ *(Soluc: $2+3\sqrt{3}$)*

22) $\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^2}{2-\sqrt{2}}=$ *(Soluc: $4+3\sqrt{2}$)*

23) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$ *(Soluc: $4+\sqrt{15}$)*

24) $\dfrac{3\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}-2}=$ *(Soluc: $7+2\sqrt{5}$)*

25) $\dfrac{24-13\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}=$ *(Soluc: $-2+3\sqrt{3}$)*

26) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$ *(Soluc: $2\sqrt{6}+4$)*

27) $\dfrac{4-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2}=$ *(Soluc: $1+\sqrt{6}$)*

28) $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2+\sqrt{2}}=$ *(Soluc: $4-3\sqrt{2}$)*

29) $\dfrac{-\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}}=$ *(Soluc: $2+\sqrt{3}$)*

30) $\dfrac{9+4\sqrt{3}}{3\left(4-\sqrt{3}\right)}=$ *(Soluc: $\dfrac{48+25\sqrt{3}}{39}$)*

31) $\dfrac{\sqrt{2}+4}{2-\sqrt{2}}=$ *(Soluc: $3\sqrt{2}+5$)*

32) $\dfrac{2\sqrt{8}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{8}+3\sqrt{2}}=$ *(Soluc: 1/7)*

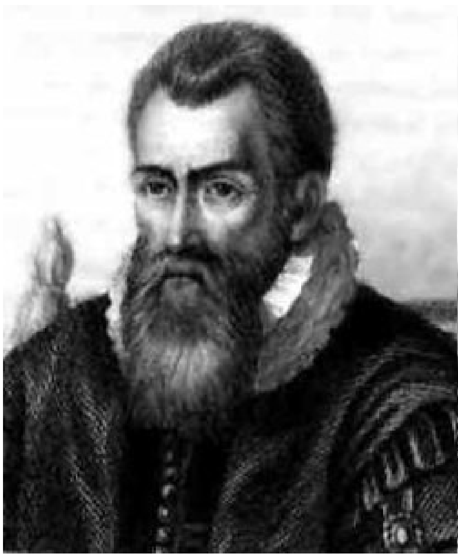
33) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}+\dfrac{12}{\sqrt{3}}=$ *(Soluc: 7)*

34) $\dfrac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}-\dfrac{9}{\sqrt{3}}=$ *(Soluc: 2)*

35) $\dfrac{3\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}+2}+\dfrac{6\sqrt{12}}{7\sqrt{6}}=$ *(Soluc: 11/7)*

36) $\dfrac{2}{3+\sqrt[4]{3}}=$

LOGARITMOS



John Neper (1550-1617)

Henry Briggs (1561-1630)

MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO

Alfonso González

IES Fernando de Mena

Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) DEFINICIÓN de LOGARITMO en BASE a ($\log_a n$)

La enorme complejidad de los cálculos que se presentaron durante el siglo XVI en los estudios astronómicos dio lugar a numerosos intentos de simplificación, entre ellos la sustitución de multiplicaciones por sumas. Se debe al escocés *John Napier* (en latín, Neper) la invención en aquella época de los logaritmos, lo cual trajo consigo la función logarítmica. En cambio, el reciente desarrollo de la electrónica ha originado que en la actualidad prácticamente haya desaparecido la importancia de su utilización como técnica de cálculo, aunque no como concepto matemático.

Definición: «*El logaritmo en base **a** de un número **N** es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número*»

argumento o antilogaritmo

$$\boxed{\underbrace{\log_a}_{\text{base}} N = \underbrace{x}_{\text{logaritmo}} \Leftrightarrow a^x = N} \quad , \text{ con } a>0,\ a\neq 1 \qquad (1)$$

(Nótese que hay cierta analogía con la conocida definición de $\sqrt[n]{a} = x$ como inversa de x^n)

Ejemplos:

$\log_2 4=2$	pq $2^2=4$	$\log_2 64=$	pq
$\log_2 8=3$	pq $2^3=8$	$\log_2 1/2=$	pq
$\log_2 16=4$	pq $2^4=16$	$\log_9 3=$	pq
$\log_3 81=$	pq	$\log_3(-9)=$	pq
$\log_{10} 100=$	pq		

Observaciones:

1º) «**No existe el logaritmo de un número negativo**». ¿Por qué?

2º) Pero podemos añadir: «**...pero un logaritmo puede ser negativo**». ¿Cuándo?

3º) $\boxed{\log_a a = 1}$ (porque $a^1=a$) «**El logaritmo de la base siempre es 1**»

$\boxed{\log_a 1 = 0}$ (porque $a^0=1$) «**El logaritmo de 1, sea cual sea la base, siempre es 0**»

4º) Los logaritmos decimales (los más utilizados) **son aquellos cuya base es 10**. En este caso, por convenio, no se escribe la base:

Ejemplos:

$\log 10\,000=$	pq	$\log 0{,}0001=$	pq
$\log 1\,000=$	pq	$\log 1=$	pq
$\log 0{,}1=$	pq	$\log 10=$	pq
$\log 0{,}01=$	pq	$\log(-100)=$	pq

5º) Caso particular: LOGARITMOS NEPERIANOS[1]: Son los que utilizan como base el número irracional $e \simeq 2{,}718281828459\ldots$, llamado constante de Euler[2]. Tienen una notación especial:

$$\log_e x = \ln x, \text{ o también } \log_e x = \text{Ln}\, x$$

Por tanto, $\boxed{\text{Ln}\, N = x \iff e^x = N}$ (2)

Ejemplos: $\boxed{\text{Lne}=1}$ pq $e^1=e$

$\boxed{\text{Ln}1=0}$ pq $e^0=1$

$\text{Lne}^2=2$ pq

etc.…

6º) Las calculadoras normalmente disponen de sendas teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$ para calcular logaritmos decimales o neperianos ¿Cómo obtener logaritmos en cualquier base?:

	log x	**ln x**	**log$_a$x**
DERIVE	LOG(x,10)	LN(x) o LOG(x)	LOG(x,a)
GRAPH	log(x)	ln(x)	logb(x,a)
CALCULADORA	$\boxed{\log}$ x	$\boxed{\ln}$ x	$\boxed{\log}$ x $\boxed{:}$ $\boxed{\log}$ a

NOTA: La última fórmula, llamada del cambio de base, se explicará el próximo curso.

Ejercicio final tema: 1 a 3

Reseña histórica:

Como ya hemos indicado, el matemático escocés John **Neper** (1550-1617) fue el inventor hacia 1594 de los logaritmos –fue él quien acuñó esa palabra− para simplificar los tediosos cálculos de productos en Trigonometría esférica aplicada a la Astronomía, pero empleaba una base incómoda, en concreto 10^7. Neper también popularizó su curiosa máquina de multiplicar, llamada «Rodillos de Neper». Su contemporáneo Henry **Briggs** (1561-1630), catedrático de Oxford, le sugirió en 1615 el empleo

[1] Se llaman así en honor a *John Neper* (1550-1617), matemático escocés que, como ya se ha dicho, ideó los logaritmos para simplificar cálculos.

[2] El número e, llamado constante de Euler −en honor al matemático suizo *Leonhard Euler* (1707-1783)−, surge como límite de la siguiente sucesión:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad , \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo, $n=1 \Rightarrow a_1=2$ | $n=100 \Rightarrow a_{100} \cong$

$n=2 \Rightarrow a_2=1{,}5^2=2{,}25$ | $n=1\,000 \Rightarrow a_{1\,000} \cong$

$n=3 \Rightarrow a_3=1{,}33^3 \cong 2{,}3704$ | $n=10\,000 \Rightarrow a_{10\,000} \cong$

(completar) $n=4 \Rightarrow a_4=1{,}25^4 \cong$ | $n=100\,000 \Rightarrow a_{100\,000} \cong$

$n=5 \Rightarrow a_5 \cong$ | $n \to \infty \Rightarrow \boxed{e \simeq 2{,}718281828459\ldots}$

Como ya se ha dicho, es un número irracional, es decir, consta de ∞ cifras decimales no periódicas.

de la base 10 y, a su muerte, perfeccionó sus ideas, decantándose por el empleo de dicha base decimal. En 1617 publicó las primeras tablas de logaritmos, similares a las actuales, y definió el logaritmo de un número tal y como hoy se conoce.

El italiano Evangelista **Torricelli** (1608-1647) estudió la curva exponencial en 1644 y la relacionó con los logaritmos. Posteriormente, el inglés William **Jones** (1675-1749) sistematizó lo que ya antes se intuía: que la función logarítmica era la inversa de la exponencial.

El sacerdote jesuita belga Grégoire de **Saint-Vicent** (1584-1667) en 1647 encontró la conexión entre el área encerrada bajo la hipérbola y=1/x y los logaritmos, al igual que **Newton** en 1665.

Los logaritmos neperianos –que utilizan la base e, siendo e ≅ 2,7182818… un número irracional- reciben tal nombre en honor de Neper, si bien él no llegó a utilizar dicha base. Fueron en realidad introducidos por John **Speidell** en 1619 y definitivamente asentados por el matemático suizo Leonhard **Euler** (1707-1783) en 1728.

II) CÁLCULO LOGARÍTMICO

III.1) Logaritmo de un producto:

$$\boxed{\log(p\cdot q)=\log p+\log q}$$

Es decir, **«El logaritmo de un producto es la suma de logaritmos»** (3)

Dem:

conocemos p y q

$$\left.\begin{array}{l}\log_a p = x \Rightarrow a^x = p\\ \log_a q = y \Rightarrow a^y = q\end{array}\right\}\ p\cdot q = a^x\cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow \boxed{\underline{\log_a(p\cdot q)} = x+y = \overline{\log_a p+\log_a q}}\ \text{(C.Q.D.)}$$

Observaciones:

1) Esta fórmula es válida en cualquier base.

2) Esta fórmula se puede generalizar a 3 o más argumentos:

$$\log(p\cdot q\cdot r)=\log p+\log q+\log r \qquad \text{etc.}$$

3) Esta fórmula –y las siguientes que veremos a continuación– nos puede servir para comprender cómo surgieron los logaritmos en el siglo XVI como instrumento para facilitar los cálculos astronómicos con cantidades elevadísimas para la época (como ya indicamos al comienzo del tema). Vamos a explicarlo con un ejemplo:

Supongamos que queremos hallar el valor de $N=1\,638\,457\cdot 1\,968\,334$

(Recordar que, antes de la aparición de las calculadoras, operaciones de este tipo eran muy laboriosas) Tomamos logaritmos en ambos miembros:

$$\log 1\,638\,457+\log 1\,968\,334=\log N$$

Se disponía de tablas de logaritmos muy completas, con las que se podía reemplazar cada logaritmo por su valor (evidentemente, era más fácil sumar a mano decimales que multiplicar números de muchas cifras):

$$6{,}2144\ldots+6{,}2940\ldots=\log N$$

Es decir: $$12{,}5085\ldots=\log N$$

A continuación, se buscaba en las tablas el caso inverso, es decir, cuál es el número cuyo logaritmo es 12,5085… (lo que se conoce como **antilogaritmo**[3]):

$$\log N=12{,}5085\ldots\Rightarrow N=\boxed{3\,225\,030\,620\,638}$$

[3] En la calculadora, para hallar un antilogaritmo, normalmente se utiliza la combinación $\boxed{\text{SHIFT}}-\boxed{\log}$:

$$\log N=12{,}5085\ldots\Rightarrow N=\boxed{\text{SHIFT}}-\boxed{\log}\ 12{,}5085\ldots=3\,225\,030\,620\,638$$

Hoy en día todo esto se nos puede antojar algo laborioso, pero situémonos en aquellos tiempos –no muy remotos[4]–, sin ordenadores ni calculadoras…

III.2) Logaritmo de un cociente: $\boxed{\log \frac{p}{q} = \log p - \log q}$

Es decir, **«El logaritmo de un cociente es la resta de logaritmos»** (4)

Dem:

III.3) Logaritmo de una potencia: $\boxed{\log p^n = n \cdot \log p}$

válido $\forall n \in \mathbb{R}$ (5)

Es decir, **«El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base»**

Dem: Vamos a probarlo para $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\log p^n} = \log(\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{\text{n términos}}) \overset{(3)}{=} \log p + \log p + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{n términos}} + \log p = \boxed{n \cdot \log p} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

Observaciones: **1)** En realidad esta fórmula es válida $\forall n \in \mathbb{R}$

2) Caso particular: LOGARITMO DE UNA RAÍZ:

$$\boxed{\log \sqrt[n]{p}} = \log p^{1/n} \overset{(5)}{=} \boxed{\frac{1}{n} \cdot \log p} \quad \text{(C.Q.D.)} \qquad (6)$$

Es decir: **«El logaritmo de una raíz es el inverso del índice multiplicado por el logaritmo del radicando»**

Ejercicios final tema: 4 y ss.

[4] Por ejemplo, el uso generalizado de las calculadoras se produjo en la década de los 70 del siglo pasado…

20 EJERCICIOS de LOGARITMOS   4º ESO Acad.

Definición de logaritmo: $\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$ (donde $a>0$, $a\neq 1$)

Sistemas de logaritmos más utilizados:

NOMBRE	BASE	NOTACIÓN	DEFINICIÓN
Logaritmo decimal	a=10	log	$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$
Logaritmo neperiano[1]	a=e	Ln, ln	$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$

donde $e \cong 2{,}718281828459\ldots$ se llama número de Euler; es un número irracional.

1. Utilizando la definición, hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$
b) $\log_3 81$
c) $\log_3 1/9$
d) $\log_3(-9)$
e) $\log_2 \sqrt{2}$
f) $\log_2 \sqrt{8}$
g) $\log 1000$
h) $\log_4 2$
i) $\log_4 64$
j) $\log 0{,}01$
k) $\log_4 1/16$
l) $\log_5 0{,}2$
m) $\log_4 256$
n) $\log_4 1/64$
o) $\log_2 0{,}125$
p) $\log_4 1$
q) $\log_2 1024$
r) $\log_2 1/64$
s) $\log_3 \sqrt{27}$
t) $\log_2 \log_2 4$

*(Soluc: **a)** 2; **b)** 4; **c)** -2; **d)** ∄; **e)** 1/2; **f)** 3/2; **g)** 3; **h)** 1/2; **i)** 3; **j)** -2; **k)** -2; **l)** -1; **m)** 4; **n)** -3; **o)** -3; **p)** 0; **q)** 10; **r)** -6; **s)** 3/2; **t)** 1)*

2. Calcular los logaritmos decimales de los siguientes números (sin calculadora) y comprobar el resultado:

a) 10 000 **b)** 1 000 000 **c)** 0,001 **d)** 1/1 000 000 **e)** 10^8 **f)** 10^{-7}
g) 10 **h)** 1

*(Soluc: **a)** 4; **b)** 6; **c)** -3; **d)** -6; **e)** 8; **f)** -7; **g)** 1; **h)** 0)*

3. Utilizando la definición de logaritmo, hallar el valor de x en cada una de las igualdades siguientes:

a) $\log_2 8 = x$
b) $\log_2 1/8 = x$
c) $\log 100 = x$
d) $\log_3 x = 3$
e) $\ln x = 2$
f) $\log_3 x = -2$
g) $\log_x 49 = 2$
h) $\log_x 8 = 3$
i) $\ln e^3 = x$
j) $\log_x 64 = 1$
k) $\log_x 25 = -1$
l) $\log_{1/100} 100 = x$
m) $\log_x 0{,}01 = 2$
n) $\ln x = -1/2$
o) $\log_{1/36} x = 2$
p) $\log_x 2 = 0$
q) $\log_{0,25} x = 2$
r) $\log_2 (-16) = x$
s) $\log_x 125 = -3$
t) $\log_3 \log_3 3 = x$
u) $\log_x 1 = 0$

*(Soluc: **a)** 3; **b)** −3; **c)** 2; **d)** 27; **e)** e^2; **f)** 1/9; **g)** 7; **h)** 2; **i)** 3; **j)** 64; **k)** 1/25; **l)** −1; **m)** 0,1; **n)** $\sqrt{e}/e$; **o)** 1/1296; **p)** ∄; **q)** 0,0625; **r)** ∄; **s)** 1/5; **t)** 0 **u)** $\forall x \in (0,\infty)-\{1\}$)*

[1] En honor a *John Napier* (Neper, en latín), matemático inglés (1550-1617) inventor de los logaritmos.

Cálculo logarítmico:

■ **Fórmulas del cálculo logarítmico:** $\boxed{\log(p\cdot q)=\log p+\log q}$

$\boxed{\log\frac{p}{q}=\log p-\log q}$

$\boxed{\log p^n=n\cdot\log p}$ $\boxed{\log\sqrt[n]{p}=\frac{1}{n}\log p}$ (todas son válidas en cualquier base)

Casos particulares: $\boxed{\log_a a^x=x}$ $\boxed{a^{\log_a x}=x}$ $\boxed{\ln e^x=x}$ $\boxed{e^{\ln x}=x}$

$\boxed{\log_a a=1}$ $\boxed{\log_a 1=0}$ $\boxed{\ln e=1}$ $\boxed{\ln 1=0}$

4. Aplicando las fórmulas anteriores, calcular (y hacer doble comprobación, algebraica y con calculadora, de los últimos de cada columna):

1. $\log_6\frac{1}{36}$

2. $\log_3\sqrt[4]{27}$

3. $\log_3\frac{\sqrt{243}}{3}$

4. $\log_a\frac{1}{\sqrt{a}}$

5. $\ln e^2$

6. $\log_4\frac{1}{\sqrt[5]{64}}$

7. $\log_3\sqrt[3]{9}$

8. $\ln\frac{1}{e}$

9. $\log_4 2$

10. $\log_8 2$

11. $\log_8\sqrt{32}$

12. $\ln\sqrt[3]{e}$

13. $\log_2 64$

14. $\log_4\frac{1}{64}$

15. $\log_3\frac{3}{\sqrt[5]{81}}$

16. $\log_3\frac{\sqrt{3}}{9}$

17. $\ln\frac{\sqrt{e}}{e}$

18. $\log_4(-4)$

19. $\log_2\sqrt[3]{32}$

20. $\log_3\sqrt{27}$

21. $\log_2\frac{\sqrt[5]{64}}{8}$

22. $\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

23. $\log_3\frac{1}{\sqrt{243}}$

(✱) **24.** $\log\sqrt{20}+\log\sqrt{5}$

25. $\log\frac{\sqrt[3]{100}}{10}$

26. $\log_3\frac{1}{27\sqrt[3]{9}}$

27. $\ln\frac{e}{\sqrt[4]{e}}$

28. $\log\frac{\sqrt{10}}{0{,}1}$

29. $\ln\frac{e}{\sqrt[3]{e^2}}$

30. $\log_3\frac{1}{3\sqrt[4]{27}}$

31. $\log_{1/5}125$

32. $\log_5\frac{1}{5\sqrt[3]{25}}$

33. $\ln\frac{1}{e^2\sqrt{e}}$

(✱) **34.** $2\log 2+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\log\frac{5}{4}$

35. $\operatorname{Ln}\frac{\sqrt[3]{e^2}}{e}+\log\frac{10}{\sqrt{10}}=$

36. $\log\frac{\sqrt[3]{100}}{10}+\operatorname{Ln}\frac{e}{\sqrt{e}}=$

37. $\log_2\frac{\sqrt[5]{8}}{2}-\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{e}}{e}=$

38. $\log_2\frac{2}{\sqrt[3]{4}}\cdot\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{e}}{e^2}=$

(*Soluc:* ***1)*** *−2;* ***2)*** *3/4;* ***3)*** *3/2;* ***4)*** *−1/2;* ***5)*** *2;* ***6)*** *−3/5;* ***7)*** *2/3;* ***8)*** *−1;* ***9)*** *1/2;* ***10)*** *1/3;* ***11)*** *5/6;* ***12)*** *1/3;* ***13)*** *6;* ***14)*** *−3;* ***15)*** *1/5;* ***16)*** *−3/2;* ***17)*** *−1/2;* ***18)*** *∄;* ***19)*** *5/3;* ***20)*** *3/2;* ***21)*** *−9/5;* ***22)*** *−2/3;* ***23)*** *−5/2;* ***24)*** *1;* ***25)*** *−1/3;* ***26)*** *−11/3;* ***27)*** *3/4;* ***28)*** *3/2;* ***29)*** *1/3;* ***30)*** *−7/4;* ***31)*** *−3;* ***32)*** *−5/3;* ***33)*** *−5/2;* ***34)*** *1;* ***35)*** *1/6;* ***36)*** *1/6;* ***37)*** *−9/10;* ***38)*** *−1/2*)

5. Volver a hacer el ejercicio 1, pero esta vez aplicando las fórmulas del cálculo logarítmico.

6. Expresar en función de log 2 los logaritmos decimales siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) log 16	**c)** log 32/5	**e)** log 0,625	**g)** log 1/40
b) log 5	**d)** log 0,25	**f)** log 250	**h)** $\log\sqrt[3]{16}$

i) log 16/5	**k)** log 0,08	**m)** $\log \sqrt[3]{0{,}08}$
j) log 0,32	**l)** $\log \sqrt[5]{80}$	**n)** $\log 2+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\log\frac{5}{4}$

*(Soluc: **a)** 4log 2; **b)** 1-log 2; **c)** -1+6log 2; **d)** -2log 2; **e)** 1-4log 2; **f)** 3-2log 2; **g)** -1-2log 2; **h)** $\frac{4}{3}\log 2$; **i)** -1+5log 2; **j)** -2+5log 2; **k)** -2+3log 2; **l)** $\frac{1}{5}(1+3\log 2)$; **m)** $-\frac{2}{3}+\log 2$; **n)** 1-log 2)*

7. Expresar en función de log 2 y log 3 los logaritmos siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) log 25	**d)** log 9/4	**g)** log 162	**j)** log 90	**m)** $\log\sqrt{3{,}6}$
b) log 24	**e)** $\log\sqrt[3]{6}$	**h)** log 3,6	**k)** log 0,27	
c) log 4/3	**f)** log 30	**i)** log 1,2	**l)** log 0,72	

*(Sol: **a)** 2–2 log 2; **b)** 3 log 2+log 3; **c)** 2 log 2–log 3; **d)** 2 log 3–2log 2; **e)** $\frac{\log 2+\log 3}{3}$; **f)** 1+log 3; **g)** log 2+4 log 3; **h)** –1+2 log 2+2 log 3; **i)** –1+2 log 2+ log 3; **j)** 1+2 log 3; **k)** –2+3 log 3; **l)** –2+3 log 2+2 log 3; **m)** –1/2+ log 2+ log 3)*

8. Expresar en función de ln 2 o ln 3:

a) $\ln 8$ **b)** $\ln\frac{e}{2}$ **c)** $\ln\frac{e^3}{4}$ **d)** $\ln\frac{4}{\sqrt{e}}$ **e)** $\ln\sqrt{2e}$ **f)** $\ln\frac{9e}{\sqrt[3]{3e}}$ **g)** $\ln\frac{9e^3}{\sqrt[3]{3e}}$

*(Soluc: **a)** 3 ln 2; **b)** 1–ln 2; **c)** 3–2 ln 2; **d)** $-\frac{1}{2}+2\ln 2$; **e)** $\frac{1+\ln 2}{2}$; **f)** $\frac{5}{3}\ln 3+\frac{2}{3}$; **g)** $\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\ln 3$)*

9. Expresar en función de log 2, log 3 y log 7 los logaritmos siguientes:

a) log 84 **b)** log 0,128 **c)** log 0,125 **d)** log 14,4 **e)** $\log\sqrt[3]{12}$

10. Sabiendo que log 7,354 = 0,866524..., hallar (sin calculadora):

a) log 735,4 **b)** log 0,007354 **c)** log 7354

11. Calcular log 7 sabiendo que log 0,7 ≅ – 0,1549…

12. Expresar como un único logaritmo, y después calcular:

a) $\log_2 24-\log_2 6=$ *(Soluc: 2)*

b) $\log 25+\log 4=$ *(Soluc: 2)*

13. Sabiendo que x=7 e y=3, utilizar la calculadora para hallar:

a) log x^2 **b)** log (2x) **c)** $\log^2 x$ **d)** log (x+y) **e)** log x + y **f)** $\log\frac{x+y}{2}$ **g)** $\frac{\log(x+y)}{2}$

14. ¿V o F? Razonar la respuesta:

a) log (A+B)=log A + log B	**c)** $\frac{\ln 2x}{2}=\ln x$
b) log (A^2+B^2)=2log A+ 2log B	

ALFONSO GONZÁLEZ
I.E.S. FERNANDO DE MENA. DPTO. DE MATEMÁTICAS

d) $\ln\frac{2x}{2}=\ln x$

e) $\log\frac{AB}{C}=\frac{\log(AB)}{\log C}$

f) El logaritmo de un número siempre da como resultado un número irracional.

g) Los logaritmos decimales de números <1 son negativos; en caso contrario, son positivos.

15. ¿Cuáles son los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre 0 y 2? ¿Y entre 0 y –2?
(Soluc: 1 y 100; 0,01 y 1)

16. a) Razonar entre qué dos números enteros está $\log_2 1000$. Comprobar el resultado con la calculadora.

b) Ídem con $\log 650$.

c) Sin usar la calculadora, razonar que $\log 7$ y $\log\frac{1}{7}$ son opuestos. (Una vez resuelto, compruébese)

Problemas de aplicación:

17. Se deja a temperatura ambiente una muestra de café, y se observa que su temperatura en ºC disminuye con el tiempo de acuerdo con la siguiente función:

$$T(t)=24+51e^{-0{,}106t}$$

donde **t** viene dado en minutos.

a) ¿Cuál es la temperatura inicial del café?

b) Si la temperatura óptima para tomar el café es de 56º, ¿entre qué minutos se deberá tomar el café?
(Soluc: entre 4' y 5')

c) Dibujar la gráfica de dicha función.

d) ¿En qué temperatura se estabilizará el café?

18. a) Demostrar que la función que permite calcular en cuánto se convierte un capital **C₀** acumulado al cabo de **t** años con un interés **i** es:

$$C(t)=C_0\cdot\left(1+\frac{i}{100}\right)^t \quad \text{, en €}$$

donde: **C_0** es el capital inicial, en €
i es el interés anual, en %

b) ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 6 años si colocamos a plazo fijo 20 000 € al 2%? *(Soluc: 22 523 €)*

c) ¿Cuántos años debemos mantener 100 000 € en una entidad bancaria a una tasa del 2,5% si queremos duplicar el capital? ¿Es relevante el dato del capital inicial? *(Soluc: 28 años; NO)*

d) Una persona que tiene depositada en una caja de ahorros 30 000 € a una tasa del 3% quiere llegar a tener 40 000 € ¿Cuánto tiempo deberá mantener intacto el capital? *(Soluc: 9 años y 9 meses)*

19. a) Demostrar que la función que expresa el volumen de madera que tiene un bosque al cabo de **t** años es:

$$M(t)=M_0\cdot(1+I)^t \quad \text{, en } m^3$$

donde: **M_0** es el volumen inicial de madera, en m^3
I es el crecimiento anual, en %

b) Se calcula que un bosque tiene 12 000 m3 de madera y que aumenta el 5% cada año ¿Cuánta madera tendrá al cabo de 10 años si sigue creciendo en estas condiciones? *(Soluc: ≅19 546,7 m³)*

c) ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse el bosque? *(Soluc: 14,21 años)*

20. Algunos tipos de bacterias tienen un crecimiento de sus poblaciones muy rápido. La *escherichia coli* puede duplicar su población cada hora. **a)** Supongamos que hacemos un cultivo en el que inicialmente hay 5000 bacterias de este tipo. Construir una tabla para razonar que la función que nos da el número de bacterias al cabo de **t** horas es:

$$f(t)=5000\cdot 2^t$$

b) ¿Cuántas habrá al cabo de 16 horas? **c)** Dibujar una gráfica que represente el crecimiento en las 8 primeras horas. **d)** Si tenemos un cultivo de 100 bacterias y queremos conseguir un millón, ¿cuánto tiempo ha de transcurrir? *(Soluc: **b)** 327 680 000 bacterias; **d)** ≅13 horas y cuarto)*

ECUACIONES

y SISTEMAS

(5 semanas)

*El matemático francés **François Viète** (1540-1603)- latinizado Vieta- expresó los coeficientes de un polinomio en función de sumas y productos de sus raíces, lo que se conoce como "Fórmulas de Vieta". Él fue el primero en introducir una notación y un lenguaje algebraico muy eficientes, en el cual las operaciones actúan sobre letras -no números- y los resultados pueden ser obtenidos al final mediante una sencilla sustitución. Este proceder es la génesis de los métodos algebraicos modernos.*

MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO

Alfonso González

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

IES Fernando de Mena

Dpto. de Matemáticas

I) REPASO de ECUACIONES y SISTEMAS de 1^er GRADO

Las ecuaciones y sistemas de 1^er grado también se llaman lineales.

Recordar: De acuerdo al número de soluciones, hay **tres tipos de ecuaciones lineales**:

1^er caso: «Una **ecuación con una sola solución**, o sea, solo es verdadera para un único valor de la incógnita»:

Ejemplo 1: $1+2x=5 \leftarrow$ es solo válido para $x=2$

2º caso: «Una **identidad** es una igualdad algebraica que **es siempre verdadera** para cualesquiera valores de la incógnita $\Rightarrow$ hay ∞ **soluciones**»:

Ejemplo 2: $2(x-3)=2x-6 \leftarrow$ es obviamente verdadero $\forall\, x\in\mathbb{R}$

Cualquier valor que escojamos para **x** verificará la ecuación. Es decir, ambos miembros de la ecuación representan la misma expresión algebraica, aunque con distinto aspecto. Por tanto, si resolvemos por los procedimientos algebraicos habituales, obtendremos $0\cdot x=0$. Compruébese.

3^er caso: «Existen **ecuaciones que carecen de solución**»:

Ejemplo 3: $2x+1=2x+7 \leftarrow \nexists$ solución

Si resolvemos por los métodos habituales, obtendremos $0\cdot x=n$, where $n\neq 0$. Compruébese.

Ejercicios: 1 y 2 $\leftarrow$ ecuaciones de 1^er grado

Recordar: «Un **sistema de ecuaciones** son dos o más ecuaciones ligadas por las mismas incógnitas»:

Ejemplo 4: $\left.\begin{array}{r} x+y= \\ 2x-y= \end{array}\right\}$ $\leftarrow$ es un sistema $2x2$, cuya solución es el par $x=\quad$, $y=$

Nótese que $x=\quad$, $y=\quad$ significa una única solución, ¡no dos!

Ejemplo 5: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ 2x+y=7 \end{array}\right\}$ $\leftarrow$ Sistema INCOMPATIBLE, i.e. obviamente carece de solución

(Si lo intentamos resolver, obtendremos algo del estilo de $0=-6$, ¡lo cual es absurdo!)

Ejemplo 6: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ \cancel{4x+2y=2} \end{array}\right\} \leftarrow$ Ambas ecuaciones son dependientes, pues $E_2=2E_1$

$\Downarrow$

Podemos quitar una de ellas (por ejemplo, E_2)

$\Downarrow$

El sistema original es equivalente a $2x+y=1$. Es obvio que habrá ∞ pares (x,y) que verifican $2x+y=1$.

$\Downarrow$

Sol: $\boxed{\infty \text{ soluciones}}$

Por ejemplo, compruébense las siguientes soluciones:

$x=0;\ y=1 \rightarrow$ E_1: E_2:	$x=2;\ y=-3 \rightarrow$ E_1: E_2:
$x=1;\ y=-1 \rightarrow$ E_1: E_2:	$x=-1;\ y=3 \rightarrow$ E_1: E_2:

¿Puedes generar más soluciones?

En general, hay **3 tipos de sistemas** en función del número de soluciones:

TIPOS de SISTEMAS (desde el punto de vista del número de soluciones)
- COMPATIBLE: al menos 1 solución
  - DETERMINADO: 1 solución (ejemplo 4)
  - INDETERMINADO: ∞ soluciones (ejemplo 6)
- INCOMPATIBLE: no tiene solución (ejemplo 5)

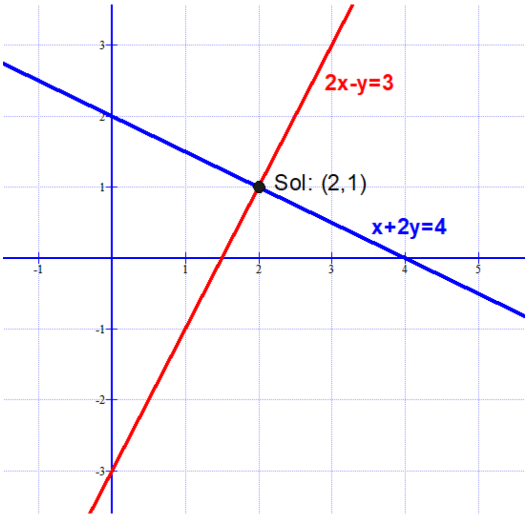
■ Aparte de los ya conocidos tres métodos (esto es, SUSTITUCIÓN, IGUALACIÓN y REDUCCIÓN), también está el método GRÁFICO: **representamos cada recta definida por cada ecuación, y el punto donde se cortan será la solución del sistema.** Veamos un ejemplo:

Ejemplo 7: $\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 2x-y=3 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2y=-x+4;\ y=\dfrac{-x+4}{2}=-\dfrac{x}{2}+2 \Longrightarrow$

x	0	4
$y=-\dfrac{x}{2}+2$	2	0

$\Rightarrow 2x-3=y \Longrightarrow$

x	0	3
$y=2x-3$	-3	3



El método gráfico consiste en representar la recta asociada a cada una de las dos ecuaciones del sistema:

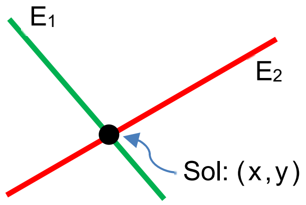
1º) Construimos una tabla de valores para cada ecuación.

2º) Dibujamos las dos rectas.

3º) La solución es el punto de corte de ambas rectas.

Desventaja obvia de este método: si las soluciones no son enteros este procedimiento no es preciso...

Por tanto, ahora entendemos por qué hay tres tipos de sistemas:



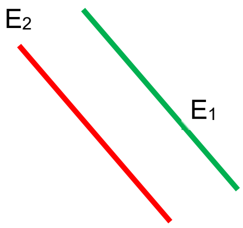
rectas secantes

$\Downarrow$

1 solución

$\Downarrow$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO



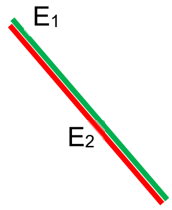
rectas paralelas

$\Downarrow$

no hay solución

$\Downarrow$

SISTEMA INCOMPATIBLE



rectas coincidentes

$\Downarrow$

∞ soluciones

$\Downarrow$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Utilizaremos este método gráfico en el tema 10 (Funciones).

Ejercicios: 3 a 6

II) ECUACIONES de 2º GRADO

La fórmula cuadrática: La forma general de la ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$, puede tener 2 soluciones o raíces que pueden ser obtenidas por medio de la siguiente fórmula, llamada **fórmula cuadrática**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

Recordar que, si $a \neq \pm 1$, puede haber al menos una raíz fraccionaria.

Dem.: 1) $-c$: $ax^2+bx=-c$

2) $\cdot 4a$: $4a^2x^2+4abx=-4ac$

3) $+b^2$: $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

4) Completamos el cuadrado: $(2ax+b)^2=b^2-4ac \Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

5) Despejamos **x**: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (C.Q.D.)

■ **Fórmulas de Cardano-Vieta:** **x_1** y **x_2**, las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, verifican las siguientes relaciones:

$$\boxed{x_1+x_2=\frac{-b}{a}} \quad ; \quad \boxed{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}} \qquad (2)\quad (3)$$

(Ver demostración en Internet)

Utilidad: En el caso de ecuaciones cuadráticas sencillas, y siempre y cuando $a=1$, estas fórmulas pueden ser una forma rápida de obtener las soluciones enteras.

Ejercicio: 7 $\Rightarrow$ **Consecuencia: CUADRO RESUMEN**

$ax^2+bx+c=0$			
discriminante $\Delta=b^2-4ac$	**número de soluciones:**	**Soluciones:**	**Factorización:**
$\Delta>0$	2 soluciones	$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta=0$	1 solución (doble)	$x=\dfrac{-b}{2a}$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_1)=a(x-x_1)^2$
$\Delta<0$	$\nexists$ solución		(polinomio irreducible) ax^2+bx+c

Ejercicios: **8 a 21 y 23**

22 $\leftarrow$ ecuaciones de 2º grado incompletas

■ **Ecuaciones factorizadas:** «son ecuaciones consistentes en un producto de dos o más factores igualado a cero»:

Ejemplo 8: $(x-3)(x^2-4)=0$

Tenemos que igualar ambos factores a cero, debido a la **PROPIEDAD del PRODUCTO CERO**: «**Si $a\cdot b=0$, entonces $a=0$ o $b=0$**»

$$(x-3)(x^2-4)=0 \begin{cases} \nearrow\ x-3=0;\ \boxed{x=3} \\ \searrow\ x^2-4=0;\ x^2=4;\ \boxed{x=\pm 2} \end{cases}$$

Ecuaciones factorizables: «son ecuaciones que pueden ser fácilmente factorizadas»:

Ejemplo 9: $x^3+x=0$

Nótese que las ecuaciones factorizadas y las factorizables son dos caras de la misma moneda:

$$x^3+x=0 \iff x(x^2+1)=0$$

FACTORIZABLE ↔ FACTORIZADA

Para resolverla tenemos que igualar ambos factores a 0, debido a la **PROPIEDAD del PRODUCTO CERO**: «**$a\cdot b=0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$**»

$$x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \begin{cases} \nearrow\ \boxed{x=0} \\ \searrow\ x^2+1=0;\ x^2=-1;\ \nexists \text{ sol.} \end{cases}$$

Ejercicios: 24 (teórico-práctico) y **25** (ecs. factorizadas y factorizables)

■ Ecuaciones con la incógnita en el denominador:

Ejemplo 10: $$\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{2}{x-1}+x$$

Lo primero que hay que hacer es multiplicar ambos miembros por el MCM de los denominadores, es decir, $x-1$:

$$x+1-(x-1)=2+x(x-1)$$
$$\cancel{2}=\cancel{2}+x(x-1)$$
$$0=x(x-1)$$

$\boxed{x=0}$

$x-1=0;\ x=1 \leftarrow$ descartada puesto que conduce a un denominador cero

¡Nótese que **este tipo de ecuaciones requieren comprobar obligatoriamente que las posibles soluciones obtenidas no anulan ningún denominador! Si ello ocurriera** (lo cual no es muy frecuente)**, se trataría de una solución "ficticia", es decir, debería ser rechazada.**

Ejercicios: 26 $\leftarrow$ ecuaciones con la x en el denominador

III) ECUACIONES BICUADRADAS

– «Una ecuación bicuadrada es una ecuación de la forma $ax^4+bx^2+c=0$».

– De los ejercicios deduciremos que este tipo de ecuaciones solo pueden tener 4 soluciones, 2 soluciones, o no tener solución.

– Las ecuaciones bicuadradas se resuelven haciendo el cambio de variable $x^2=z$, que las convierte lógicamente en una ecuación cuadrática, $az^2+bz+c=0$.

Ejercicio 27

IV) ECUACIONES IRRACIONALES

– «Una ecuación irracional es una ecuación en la que la incógnita aparece dentro de una raíz».

– Este tipo de ecuaciones se pueden resolver siguiendo los siguientes cuatro pasos:

1°) Aislar la raíz en uno de los miembros (si hay dos raíces, lógicamente aislar primero la más compleja).

2°) Elevar al cuadrado ambos miembros para así eliminar la raíz.

3°) Resolver la ecuación obtenida.

4°) **SIEMPRE HAY QUE COMPROBAR LAS POSIBLES SOLUCIONES OBTENIDAS, DADO QUE ALGUNA DE ELLAS PUEDE SER "FICTICIA", en cuyo caso debería ser descartada**. Y esto último es muy frecuente.

NOTA: En el caso de que la ecuación original tenga dos o más radicales, hay que repetir los pasos 1 y 2 hasta eliminar todas las raíces.

Ejercicios: 28 a 30

V) SISTEMAS de ECUACIONES de 2º GRADO

Este tipo de sistemas no lineales pueden ser en principio resueltos por los métodos ya conocidos: SUSTITUCIÓN, IGUALACIÓN y REDUCCIÓN. Sin embargo, en muchos casos los métodos de igualación y/o reducción no pueden aplicarse. Por tanto, habitualmente utilizaremos SUSTITUCIÓN.

Ejercicios: **31 y 32** ← sistemas de 2º grado
33 a 104 ← 72 problemas de planteamiento

Una reseña histórica: La disputa Cardano-Tartaglia

El matemático Fra Luca **Pacioli** (1445-1514) señaló que aún no había una solución para la ecuación cúbica general. En concreto, Pacioli opinaba que encontrar una solución a la cúbica general era tan probable como la cuadratura del círculo. Sin embargo, muchos matemáticos trabajaron en este problema durante los siglos XV y XVI.

Alrededor de 1510, Scipione **del Ferro** (1465-1526) encontró una solución general para $x^3+ax=b$, pero murió antes de poder publicar su descubrimiento. Su alumno, Antonio Maria **Fiore**, conocía la solución e intentó ganarse una reputación explotando el descubrimiento de su maestro. Desafió a Niccoló Fontana, "**Tartaglia**" (1499-1557) con treinta preguntas, todas ellas reducidas a la solución de $x^3+ax=b$. Tartaglia tenía la solución general de $x^3+ax^2=b$, por lo que respondió con treinta preguntas de carácter teórico más general, aunque algunas resolvieron esta ecuación. Justo antes de que transcurriera el tiempo límite, Tartaglia encontró soluciones generales tanto para $x^3+ax=b$ como para $x^3=ax+b$. Con estos, Tartaglia resolvió todos los problemas de Fiore, pero Fiore no pudo resolver ninguna de las cuestiones propuestas por Tartaglia y fue vencido.

En aquel momento Gerolamo **Cardano** (1501-1576) estaba escribiendo su *Practica arithmeticae generalis*, que abarcaría la aritmética, la geometría y el álgebra. Al escuchar que Tartaglia tenía una solución para $x^3+ax=b$, trató de encontrar una. Incapaz de ello, le pidió a Tartaglia la solución para poder publicarla en una sección especial de su libro bajo el nombre de Tartaglia. Tartaglia le ofreció a Cardano su solución, siempre que Cardano hiciera un juramento de que nunca la revelaría.

Utilizando la solución de $x^3+ax=b$, Cardano y su brillante secretario Lodovico **Ferrari** (1522-1565) encontraron soluciones para $x^3+ax^2=b$, $x^3=ax^2+b$ y $x^3+b=ax^2$ empleando sustituciones que las reducían al caso conocido. En 1545, Cardano publicó su *Ars magna*, que contenía la solución de la cúbica de Tartaglia con una afirmación de que del Ferro y Tartaglia habían encontrado soluciones mediante investigaciones independientes. Cardano también incluyó algunos de sus propios descubrimientos, incluida la idea de que cada cubo debe tener tres raíces. Cardano también publicó aquí la solución de Ferrari a la ecuación bicuadrática, con la debida mención a Ferrari.

Cuando Tartaglia leyó el *Ars magna*, denunció públicamente a Cardano por romper un juramento hecho sobre los Evangelios, y ridiculizó la habilidad matemática de Cardano. Cardano desdeñó refutar el insulto, pero Ferrari atacó a Tartaglia, acusándolo de que Tartaglia había construido su reputación difamando a otros, había robado una prueba en su nuevo libro sin mencionar al verdadero autor, y además tenía al menos mil errores en el texto. Ferrari finalizó su respuesta publicada desafiando a Tartaglia a un debate público sobre matemáticas y todos los temas relacionados. Tartaglia respondió con más insultos y rechazó el debate alegando que Cardano conocía a los hombres que serían los jueces. Quizás realmente temía un debate público porque tartamudeaba. Después de un nuevo intercambio de insultos, cada uno propuso treinta y una preguntas que fueron intercambiadas, respondidas y devueltas. Sin embargo, no se llegó a ninguna decisión, porque cada uno hizo trizas las respuestas del otro. Luego, sin motivo aparente, Tartaglia aceptó un debate que se realizaría en Milán, el bastión de Cardano. El 10 de agosto de 1548, Tartaglia y Ferrari se enfrentaron en combate, habiendo abandonado Cardano la ciudad. Se sabe muy poco sobre el debate real, pero parece ser que degeneró en una pelea de invectivas, con Tartaglia profiriendo gritos. Tartaglia se fue después del primer día, alegando haber ganado, aunque parece que Ferrari ganó por poco. Una indicación del triunfo de Ferrari es que Tartaglia perdió su puesto de profesor en Brescia y Ferrari fue invitado a dar conferencias en Venecia, el bastión de Tartaglia.

Tartaglia murió en 1557 sin publicar su solución a la cúbica, y cuando se intentó publicar sus artículos inéditos, no se pudo encontrar ninguno que siquiera mencionara las soluciones a la cúbica. Con la muerte de Cardano en 1576, terminó uno de los episodios más interesantes y coloridos de la historia de las matemáticas.

Fuente: *The European Mathematical Awakening: A Journey Through the History of Mathematics from 1000 to 1800. Frank J. Swetz. Dover Publications.*

Repaso ecuaciones y sistemas de 1^er grado:

1. Resolver las siguientes **ecuaciones de 1^er grado** y comprobar la solución de las sombreadas:

a) $5[2x-4(3x+1)]=-10x+20$ *(Soluc: x= –1)*

b) $x-13=4[3x-4(x-2)]$ *(Soluc: x=9)*

c) $3[6x-5(x-3)]=15-3(x-5)$ *(Soluc: x= –5/2)*

d) $2x+3(x-3)=6[2x-3(x-5)]$ *(Soluc: x=9)*

e) $0=100-0{,}001x$ *(Soluc: x=100 000)*

f) $5(x-3)\ -2(x-1)=3x-13$ *(Soluc: Se verifica $\forall x \in$ IR, pues es una identidad)*

g) $x+4[3-2(x-1)]=5[x-3(2x-4)]+1$ *(Soluc: x=41/18)*

h) $3-2x+4[3+5(x+1)]=10x-7$ *(Soluc: x=–21/4)*

i) $8x-6=2[x+3(x-1)]$ *(Soluc: Se trata de una identidad)*

2. Resolver las siguientes **ecuaciones de 1^er grado con denominadores** y comprobar las sombreadas:

a) $3-\dfrac{5x-1}{10}=\dfrac{x-1}{5}-\dfrac{x-3}{2}$ *(Soluc: x=9)*

b) $\dfrac{5-x}{15}-\dfrac{9}{5}=-x-\dfrac{1-x}{3}$ *(Soluc: x=17/9)*

c) $\dfrac{x+8}{6-x}=13$ *(Soluc: x=5)*

d) $\dfrac{3(x-2)}{4}-\dfrac{2(x-3)}{3}=\dfrac{x}{6}-\dfrac{3x-6}{4}$ *(Soluc: x=3/2)*

e) $\dfrac{x-2}{3-x}=-\dfrac{5}{4}$ *(Soluc: x=7)*

TIPO EXAMEN **f)** $x=\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{3}+3\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{5}\right)+1$ *(Soluc: x=15)*

TIPO EXAMEN **g)** $\dfrac{1}{3}=\dfrac{\dfrac{3}{5}-x}{1+\dfrac{3}{5}x}$ *(Soluc: x=2/9)*

h) $4-\dfrac{7-x}{12}=\dfrac{5x}{3}-\dfrac{5-3x}{4}$ *(Soluc: x=2)*

i) $x-\frac{12x+1}{3}=2x+1-\frac{15x+4}{3}$ *(Soluc: Se trata de una identidad)*

j) $\frac{2x+1}{3x-6}=\frac{3}{2}$ *(Soluc: x=4)*

k) $\frac{x}{2}-\frac{6-x}{4}=x+1$ *(Soluc: x=–10)*

l) $\frac{1+5x}{4}-\frac{3-x}{6}=1-2x-\frac{8x-2}{9}$ *(Soluc: x=53/155)*

m) $\frac{6x+1}{11}=\frac{2x-3}{7}$ *(Soluc: x=–2)*

n) $x+\frac{3(x-5)}{2}=3+\frac{5x-21}{2}$ *(Soluc: Se trata de una identidad)*

o) $\frac{3(x-3)}{2}+\frac{2x}{3}-2x=\frac{3(2x-1)}{9}-\frac{1}{6}$ *(Soluc: x=–8)*

p) $\frac{1+96\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600}$ *(Soluc: x=20)*

q) $1-\frac{2}{3}(x-3)=2-\frac{1}{4}(3x-4)$ *(Soluc: x=0)*

TIPO EXAMEN

r) $2-4\left(\frac{2x}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{2}-x$ *(Soluc: x=–1/2)*

s) $5x-3\left(3-\frac{x}{4}\right)=\frac{7x}{2}-3$ *(Soluc: x=8/3)*

t) $5\left(\frac{2x}{3}-\frac{3x}{5}\right)+1=2x-2(x-1)$ *(Soluc: x=3)*

u) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)$ *(Soluc: x=5/3)*

v) $\frac{2x}{3}-5\left(\frac{x}{12}+\frac{1}{4}\right)=3-2\left(1-\frac{x}{6}\right)$ *(Soluc: x=–27)*

w) $3\left(\frac{11x}{6}-x\right)-4=2x-3\left(1-\frac{x}{6}\right)$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

x) $-2\left(2-\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{6x}{4}-\frac{1}{2}\right)=2x-3(x-1)$ *(Soluc: x=3)*

y) $\frac{x}{abc}+abc=x+1$ *(Soluc: x=abc)*

3. Resolver los siguientes **SS.EE.LL** (del **a** al **i** alternando los tres métodos habituales, y el resto **por reducción**; en el caso de los indeterminados, obtener al menos 4 soluciones), clasificarlos y **comprobar la solución de los sombreados**:

a) $\left.\begin{aligned} x+y&=3 \\ 4x-y&=7 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=1)*

b) $\left.\begin{aligned} 2x-3y&=12 \\ 3x+y&=7 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=3, y=-2)*

c) $\left.\begin{aligned} 3x-2y&=15 \\ x-3y&=5 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=5, y=0)*

d) $\left.\begin{aligned} 3x-2y&=9 \\ 2x+5y&=-13 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=-3)*

e) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{2}+2y&=10 \\ x-3y&=6 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=12 y=2)*

f) $\left.\begin{aligned} \frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}&=1 \\ x+y&=4 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=42/13,y=10/13)*

g) $\left.\begin{aligned} \frac{2(x-4)}{3}+4y&=2 \\ \frac{3(y-1)}{2}+3x&=6 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=23/11, y=9/11)*

h) $\left.\begin{aligned} \frac{2y-3}{5}-\frac{x}{2}&=x \\ \frac{4(x+1)}{3}+y&=13 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=9)*

i) $\left.\begin{aligned} \frac{2(x-3)}{5}+\frac{y}{4}&=\frac{1}{2} \\ \frac{3(y-2)}{5}+\frac{x}{9}&=\frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=3, y=2)*

j) $\left.\begin{aligned} \frac{3(x-2)}{4}+\frac{2(y-3)}{5}&=\frac{2}{5} \\ \frac{2(y-4)}{3}+\frac{3(x-1)}{2}&=\frac{3}{2} \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=4)*

TIPO EXAMEN

k) $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ -4x-6y&=-6 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: $\nexists$ soluc ; incompatible)*

l) $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=5 \\ 6x+9y&=15 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: ∞ soluc.; comp .indtdo.)*

m) $\left.\begin{aligned} 3x-2y&=9 \\ -6x+4y&=-18 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: ∞ soluc.; comp. indtdo.)*

n) $\left.\begin{aligned} 3x-2y&=9 \\ 6x-4y&=4 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: $\nexists$ soluc ; incompatible)*

o) $\left.\begin{aligned} \frac{2(x-5)}{7}+\frac{y-3}{2}&=-\frac{1}{3} \\ \frac{3(y-1)}{5}-\frac{x-3}{3}&=-1 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=474/71,y=293/213)*

p) $\left.\begin{aligned} \frac{20x+7}{9}-\frac{4x+y}{2}&=2 \\ \frac{7x+1}{4}-\frac{2x-2y}{6}&=x \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=-2)*

q) $\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{3}&=\frac{1}{3} \\ \frac{x}{3}+\frac{y+1}{2}&=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=-15/13,y=10/13)*

r) $\left.\begin{aligned} \frac{3(x-1)}{2}+\frac{2(y-2)}{3}&=\frac{13}{6} \\ \frac{3(x+1)}{2}-\frac{2(y+2)}{5}&=\frac{5}{2} \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=3)*

s) $\left.\begin{aligned} \frac{x-3}{3}-\frac{3(y+1)}{4}&=-4 \\ \frac{3(x+1)}{5}-\frac{2(y+2)}{7}&=-\frac{29}{35} \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=0, y=3)*

t) $\left.\begin{aligned} \frac{2x-y}{4}-\frac{y}{2}&=x \\ \frac{2(y-1)}{3}+2(x-1)&=-y \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=3, y=-2)*

u) $\left.\begin{aligned} x-y+z&=6 \\ 2x+y-3z&=-9 \\ -x+2y+z&=-2 \end{aligned}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=-2; z=3)*

v) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ x-2y+3z=13 \\ -x+y+4z=9 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=-1; z=3)*

w) $\left.\begin{array}{r} -2x+y+z=6 \\ 3x-z=-7 \\ x-5y+2z=7 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=-1, y=0; z=4)*

x) $\left.\begin{array}{r} 4x-4y-4z=20 \\ 6y-2x-2z=20 \\ 7z-x-y=20 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=32,5, y=17,5; z=10)*

4. Inventar, razonadamente, un SS.EE.LL. 2x2 lo más sencillo posible con solución x=2, y=−3

5. Inventar, razonadamente, un SS.EE.LL. 2x2 sencillo sin solución.

6. **TEORÍA**: Considerar los siguientes sistemas, y responder a las preguntas a continuación:

① $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ ② $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$ ③ $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ x+y=7 \end{array}\right\}$

a) ¿Qué es un sistema compatible determinado? Razonar cuál de los tres lo es.

b) ¿Qué es un sistema compatible indeterminado? Razonar cuál de los tres lo es.

c) ¿Qué es un sistema incompatible? Razonar cuál de los tres lo es.

Repaso ecuaciones 2º grado:

RECORDAR: Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, dichas raíces verifican las siguientes dos relaciones:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \qquad \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Fórmulas de Cardano-Vieta[1]

7. Dadas las siguientes **ecuaciones de 2º grado**, se pide:

i) Resolverlas mediante la fórmula general de la ecuación de 2º grado.

ii) Comprobar las soluciones obtenidas.

iii) Factorizar cada ecuación y comprobar dicha factorización.

iv) Comprobar las relaciones de Cardano-Vieta.

a) $x^2-4x+3=0$

b) $x^2-5x+6=0$

c) $x^2-x-6=0$

d) $x^2-9x+20=0$

e) $x^2+2x+5=0$

f) $2x^2-5x+2=0$

g) $x^2-6x+9=0$

h) $x^2-2x-1=0$

i) $6x^2-13x+6=0$

j) $x^2+x-1=0$

[1] En honor al matemático italiano *Girolamo Cardano* (1501-1576) y el francés *François Viète* (1540-1603).

8. Escribir <u>una</u> ecuación de 2º grado que tenga por soluciones:

a) $x_1=4$, $x_2=-6$ *(Soluc: $x^2+2x-24=0$)*

c) $x_1=2$, $x_2=-7$ *(Soluc: $x^2+5x-14=0$)*

d) $x_1=-2/7$, $x_2=7$ *(Soluc: $7x^2-47x-14=0$)*

e) $x_1=-16$, $x_2=9$ *(Soluc: $x^2+7x-144=0$)*

f) $x_1=3/4$, $x_2=-2/5$ *(Soluc: $20x^2-7x-6=0$)*

g) $x=3$ doble *(Soluc: $x^2-6x+9=0$)*

h) $x_1=-4$, $x_2=-1/8$ *(Soluc: $8x^2+33x+4=0$)*

b) $x_1=-3$, $x_2=-5$ *(Soluc: $x^2+8x+15=0$)*

i) $x=\pm 2$ *(Soluc: $x^2-4=0$)*

j) $x=\pm\sqrt{2}$ *(Soluc: $x^2-2=0$)*

k) $x=2/5$ doble *(Soluc: $25x^2-20x+4=0$)*

l) $x=2\pm\sqrt{3}$ *(Soluc: $x^2-4x+1=0$)*

m) $x_1=5$, $x_2=-12$ *(Soluc: $x^2+7x-60=0$)*

n) $x_1=3/10$, $x_2=-4$ *(Soluc: $10x^2+37x-12=0$*

9. Escribir en cada caso <u>la</u> ecuación de 2º grado que tenga por soluciones 5 y –2 y tal que:

a) el coeficiente de x^2 sea 4 *(Soluc: $4x^2-12x-40=0$)*

b) el coeficiente de x sea 9 *(Soluc: $-3x^2+9x+30=0$)*

c) el término independiente sea –4 *(Soluc: $2/5x^2-6/5x-4=0$)*

d) el coeficiente de x^2 sea 5 *(Soluc: $5x^2-15x-50=0$)*

10. TEORÍA: **a)** Un alumno indica en un examen que las soluciones de $x^2+4x+3=0$ son 2 y 5. Utilizar las relaciones de Cardano-Vieta para razonar que ello es imposible.

b) Razonar, sin necesidad de resolver la ecuación, que $x^2-2x-528=0$ tiene solución, y que además sus raíces han de tener distinto signo.

c) Razonar, sin necesidad de resolver la ecuación, que $x^2+20x+96=0$ tiene solución, y que además sus raíces tiene que ser ambas negativas.

d) ¿V o F? Si el discriminante de una ecuación de 2º grado es >0, entonces va a haber 2 soluciones, una positiva y otra negativa.

11. Inventar, razonadamente, una ecuación de 2º grado: **a)** Que tenga dos soluciones. **b)** Que tenga una solución. **c)** Que no tenga solución.

12. Hallar el valor de los coeficientes **b** y **c** en la ecuación $7x^2+bx+c=0$ sabiendo que sus soluciones son $x_1=5$ y $x_2=-6$ *(Soluc: b=7, c=-210)*

13. Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $5x^2+bx+6=0$ sabiendo que una de sus soluciones es 1 ¿Cuál es la otra solución? *(Soluc: b=–11; x=6/5)*

14. Calcular el valor de **a** y **b** para que la ecuación $ax^2+bx-1=0$ tenga por soluciones $x_1=3$ y $x_2=-2$ *(Soluc: a=1/6, b=–1/6)*

15. ¿Para qué valores de **a** la ecuación $x^2-6x+3+a=0$ tiene solución única? *(Soluc: a=–6)*

16. TEORÍA: Justificar la validez de la siguiente fórmula, utilizada por los matemáticos árabes medievales para resolver la ecuación de 2º grado $x^2+c=bx$:

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

17. Hallar el discriminante de cada ecuación y, sin resolverlas, indicar su número de soluciones:

a) $5x^2-3x+1=0$ *(Soluc: ∄ soluc)*

b) $x^2-4x+4=0$ *(Soluc: 1 soluc)*

c) $3x^2-6x-1=0$ *(Soluc: 2 soluc)*

d) $5x^2+3x+1=0$ *(Soluc: ∄ soluc)*

18. Determinar para qué valores de **m** la ecuación $2x^2-5x+m=0$:

a) Tiene dos soluciones distintas. *(Soluc: m<25/8)*

b) Tiene una solución. *(Soluc: m=25/8)*

c) No tiene solución. *(Soluc: m>25/8)*

19. Determinar para qué valores de **b** la ecuación $x^2-bx+25=0$:

a) Tiene dos soluciones distintas. *(Soluc: b<−10 o b>10)*

b) Tiene una solución. *(Soluc: b=±10)*

c) No tiene solución. *(Soluc: −10< b<10)*

20. TEORÍA: a) ¿Qué es el discriminante de una ecuación de 2º grado? ¿Qué indica? Sin llegar a resolverla, ¿cómo podemos saber de antemano que la ecuación x^2+x+1 carece de soluciones?

b) Inventar una ecuación de 2º grado con raíces $x_1=2/3$ y $x_2=2$, y cuyo coeficiente cuadrático sea 3

c) Sin resolver y sin sustituir, ¿cómo podemos asegurar que las soluciones de $x^2+5x-300=0$ son $x_1=15$ y $x_2=-20$?

d) Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $x^2+bx+6=0$ sabiendo que una de las soluciones es 1. Sin necesidad de resolver, ¿cuál es la otra solución?

e) Definir polinomio cuadrático irreducible y razonar un ejemplo.

21. Resolver las siguientes **ecuaciones de 2º grado completas**, y comprobar las sombreadas:

1. $x^2-2x-8=0$ *(Soluc: $x_1=4$, $x_2=-2$)*
2. $x^2+2x+3=0$ *(Soluc: ∄ soluc)*
3. $2x^2-7x-4=0$ *(Soluc: $x_1=4$, $x_2=-1/2$)*
4. $x^2+6x-8=0$ *(Soluc: $x=-3\pm\sqrt{17}$)*
5. $4x^2+11x-3=0$ *(Soluc: $x_1=1/4$, $x_2=-3$)*
6. $x^2+2x+1=0$ *(Soluc: $x=-1$)*
7. $x^2-13x+42=0$ *(Soluc: $x_1=7$, $x_2=6$)*
8. $x^2+13x+42=0$ *(Soluc: $x_1=-7$, $x_2=-6$)*
9. $x^2+5x+25=0$ *(Soluc: ∄ soluc)*
10. $3x^2-6x-6=0$ *(Soluc: $x=1\pm\sqrt{3}$)*
11. $2x^2-7x-15=0$ *(Soluc: $x_1=5$, $x_2=-3/2$)*
12. $x^2-4x+4=0$ *(Soluc: $x=2$)*
13. $2x^2+ax-3a^2=0$ *(Soluc: $x_1=a$, $x_2=-3a/2$)*
14. $6x^2-x-1=0$ *(Soluc: $x_1=1/2$, $x_2=-1/3$)*
15. $3x^2-6x-4=0$ *(Soluc: $x=1\pm\sqrt{21}/3$)*
16. $x^2-19x+18=0$ *(Soluc: $x_1=18$, $x_2=1$)*
17. $12x^2-17x-5=0$ *(Soluc: $x_1=5/3$, $x_2=-1/4$)*
18. $3x^2-ax-2a^2=0$ *(Soluc: $x_1=a$, $x_2=-2a/3$)*
19. $2x^2-5x-3=0$ *(Soluc: $x_1=3$, $x_2=-1/2$)*
20. $\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+2=0$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=3$)*
21. $\sqrt{3}\,x^2+2x-\sqrt{3}=0$ *(Soluc: $x_1=\sqrt{3}/3; x_2=-\sqrt{3}$)*
22. $5x^2+16x+3=0$ *(Soluc: $x_1=-1/5$, $x_2=-3$)*
23. $12x^2+6x-45/4=0$ *(Soluc: $x_1=3/4$, $x_2=-5/4$)*
24. $x^2-6x+3-a=0$ *(Soluc: $x=3\pm\sqrt{6+a}$)*
25. $2x^2-\sqrt{2}\,x-2=0$ *(Soluc: $x_1=\sqrt{2}; x_2=-\sqrt{2}/2$)*
26. $x^2+9x-22=0$ *(Soluc: $x_1=2$, $x_2=-11$)*
27. $x^2+2x-3=0$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=-3$)*

28. $48x^2-38{,}4x-268{,}8=0$ *(Soluc: $x_1=2{,}8$, $x_2=-2$)*

29. $\frac{ax^2}{3}-\frac{abx}{6}-\frac{ab^2}{6}=0$ *(Soluc: $x_1=-b/2$, $x_2=b$)*

30. $4x^2+8x+3=0$ *(Soluc: $x_1=-3/2$, $x_2=-1/2$)*

31. $3x^2+4x+1=0$ *(Soluc: $x_1=-1/3$, $x_2=-1$)*

32. $x^2+4x+3=0$ *(Soluc: $x_1=-1$, $x_2=-3$)*

33. $x^2+2x-35=0$ *(Soluc: $x_1=5$, $x_2=-7$)*

34. $x^2+13x+40=0$ *(Soluc: $x_1=-5$, $x_2=-8$)*

35. $x^2-4x-60=0$ *(Soluc: $x_1=10$, $x_2=-6$)*

36. $x^2+7x-78=0$ *(Soluc: $x_1=6$, $x_2=-13$)*

37. $2x^2-5x+2=0$ *(Soluc: $x_1=2$, $x_2=1/2$)*

38. $x^2-10x+25=1$ *(Soluc: $x_1=4$, $x_2=6$)*

39. $2x^2-11x+5=0$ *(Soluc: $x_1=5$, $x_2=1/2$)*

40. $x^2+10x-24=0$ *(Soluc: $x_1=2$, $x_2=-12$)*

41. $2x^2-3x+1=0$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=1/2$)*

42. $3x^2-19x+20=0$ *(Soluc: $x_1=5$, $x_2=4/3$)*

43. $\frac{1}{2}x^2-x-4=0$ *(Soluc: $x_1=4$, $x_2=-2$)*

44. $0{,}1x^2-0{,}4x-48=0$ *(Soluc: $x_1=24$, $x_2=-20$)*

22. Resolver las siguientes **ecuaciones de 2º grado incompletas**, y comprobar las sombreadas:

a) $x^2-5x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=5$)*

b) $2x^2-6x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=3$)*

c) $2x^2-18=0$ *(Soluc: $x=\pm3$)*

d) $5x^2+x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=-1/5$)*

e) $x^2=x$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=1$)*

f) $x^2+x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=-1$)*

g) $4x^2-1=0$ *(Soluc: $x=\pm1/2$)*

h) $-x^2+12x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=12$)*

i) $x^2-10x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=10$)*

j) $9x^2-4=0$ *(Soluc: $x=\pm2/3$)*

k) $k^2-6=1/4$ *(Soluc: $k=\pm5/2$)*

l) $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ *(Soluc: $x=1$)*

m) $3x^2-11x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=11/3$)*

n) $x(x+2)=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=-2$)*

o) $x^2+16=0$ *(Soluc: $\nexists$ soluc)*

p) $25x^2-9=0$ *(Soluc: $x=\pm3/5$)*

q) $4-25x^2=0$ *(Soluc: $x=\pm2/5$)*

r) $2x^2-8=0$ *(Soluc: $x=\pm2$)*

s) $-x^2-x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=-1$)*

t) $(x-3)^2=16$ *(¡Sin desarrollar!)* *(Soluc: $x_1=7$, $x_2=-1$)*

23. Resolver las siguientes **ecuaciones de todo tipo**, operando convenientemente en cada caso -para así pasarlas a la forma general de 2º grado-, y comprobar las sombreadas:

1. $2x^2+5x=5+3x-x^2$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=-5/3$)*

2. $4x(x+1)=15$ *(Soluc: $x_1=3/2$, $x_2=-5/2$)*

3. $(5x-1)^2=16$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=-3/5$)*

4. $(4-3x)^2-64=0$ *(Soluc: $x_1=4$, $x_2=-4/3$)*

5. $2(x+1)^2=8-3x$ *(Soluc: $x=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{4}$)*

6. $(2x-4)^2-2x(x-2)=48$ *(Soluc: $x_1=8$, $x_2=-2$)*

7. $(2x-3)^2+x^2+6=(3x+1)(3x-1)$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=-4$)*

8. $(3x-2)^2=(2x+3)(2x-3)+3(x+1)$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=2$)*

9. $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$ *(Soluc: $x=\pm9$)*

10. $1064=\frac{4+6(x-1)}{2}\cdot x$ *(Soluc : $x_1=19$, x_2 $-56/3$)*

11. $\sqrt{3}=\frac{2x}{1-x^2}$ *(Soluc: $x_1=\sqrt{3}/3$, $x_2=-\sqrt{3}$)*

12. $(x-1)(x-2)=0$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=2$)*

13. $(2x-3)(1-x)=0$ *(Soluc: $x_1=3/2$, $x_2=1$)*

14. $(x-1)(x-2)=6$ *(Soluc: $x_1=-1$, $x_2=4$)*

15. $(x^2-4)(2x-6)(x+3)=0$ *(Soluc: $x=\pm2$; $x=\pm3$)*

16. $(2+2t)^2+(t+2)^2=(1+2t)^2+(t+3)^2$ *(Soluc: $t=1$)*

17. $\frac{4}{(2x+2)^2}=1$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=-2$)*

18. $\dfrac{x^2-4}{x+3}=0$ *(Soluc: x=±2)*

19. $\dfrac{x^2-4}{x+3}=-12$ *(Soluc: x_1=−8, x_2=−4)*

20. $\dfrac{x}{3x}=\dfrac{x-1}{-3x-1}$ *(Soluc: x=1/3)*

21. $\dfrac{(x+2)(x-2)}{4}-\dfrac{(x-3)^2}{3}=\dfrac{x(11-x)}{6}$ *(Soluc: x_1=−8, x_2=6)*

22. $6+\dfrac{2x+4}{3}x=8$ *(Soluc: x_1=1, x_2=−3)*

23. $\dfrac{3x^2+2x}{5x^2-3}=0$ *(Soluc: x_1=0, x_2=−2/3)*

24. $\dfrac{x^2+3x-4}{x-3}=0$ *(Soluc: x_1=1, x_2=−4)*

25. $\dfrac{x^2+6x+3}{x-1}=-x$ *(Soluc: x_1=−3/2, x_2=−1)*

26. $12x^3-2x^2-2x=0$ *(Soluc: x_1=0, x_2=1/2, x_3=−1/3)*

27. $(x-3)^2=\dfrac{x}{4}$ *(Soluc: x_1=4, x_2=9/4)*

28. $(2x-4)^2=0$ *(Soluc: x=2)*

29. $(x+3)^7=0$ *(Soluc: x=−3)*

30. $\dfrac{x^4}{10}=8x$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=2\sqrt[3]{10}$)*

31. $\dfrac{\sqrt{x}}{x}=0$ *(Soluc: ∄ soluc)*

32. $\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(1+2x)^2}{3}=-2-\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3}$ *(Soluc: x_1=1, x_2=11/3)*

33. $\sqrt{x^2+4x+4}=1$ *(Soluc: x_1=−1, x_2=−3)*

34. $\dfrac{(x+3)(x-3)-4}{2}-\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{(x-2)^2+1}{6}$ *(Soluc: x_1=4, x_2=−5)*

35. $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{6}+\dfrac{3}{2}$ *(Soluc: x_1=−1, x_2=−8/5)*

36. $400x-\dfrac{400000}{x^2}=0$ *(Soluc: x=10)*

37. $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{13}{12}$ *(Soluc: x=±5)*

38. $(x^2+1)^4=625$ *(Soluc: x=±2)*

39. $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{3\pi}{8}$ *(Soluc: ∄ soluc)*

40. $\sqrt{x}=2$ *(Soluc: x=4)*

41. $\dfrac{(2x+3)(2x-3)}{9}-\dfrac{(3x-2)^2}{3}=\dfrac{x^2}{9}-5$ *(Soluc: x_1=2, x_2=−1/2)*

24. **TEORÍA:** **a)** Carlos, un alumno de 4º de ESO, razona de la siguiente forma en un examen:

$$x^3+2x-3=0$$
$$x^3+2x=3$$
$$x\left(x^2+2\right)=3 \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \boxed{x=3} \\ \searrow \ x^2+2=3 \qquad \text{etc...} \end{array}$$

Justificar que este razonamiento es incorrecto.

b) ¿Qué es una ecuación factorizada? Indicar un ejemplo sencillo.

c) ¿Qué es una ecuación factorizable? Indicar un ejemplo sencillo.

25. Resolver las siguientes **ecuaciones factorizadas** o **factorizables** y comprobar las sombreadas:

a) $(x^2-4)(x^2+1)(x-3)=0$ *(Soluc: x=±2, x=3)*

b) $(x^2-3x)(2x+3)(x-1)=0$ *(Soluc: x_1=0, x_2=1; x_3=3, x_4=−3/2)*

c) $x^6-16x^2=0$ *(Soluc: x=0, x=±2)*

d) $(3x^2-12)(-x^2+x-2)(x^2+1)=0$ *(Soluc: x=±2)*

e) $(3x^2+12)(x^2-5x)(x-3)=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=3$; $x_3=5$)*

f) $x^3=3x$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$; $x_3=-\sqrt{3}$)*

g) $(x-3)(2x^2-8)(x^2+5x)=0$ *($x=\pm 2$, $x=3$, $x=0$, $x=-5$)*

h) $x^3+2x^2-15x=0$ *(Soluc: $x_1=0$, $x_2=3$; $x_3=-5$)*

i) $(x+1)(x-2)(x^2-3x+4)=0$ *(Soluc: $x_1=-1$, $x_2=2$)*

j) $x^4=4x^2$ *(Soluc: $x=0$, $x=\pm 2$*

k) $(x+1)^3=(x-1)^2(x+1)$ *(Soluc: $x_1=-1$, $x_2=0$)*

l) $x^4-8x=0$ *(Soluc: $x=0$, $x=2$)*

m) $(2x^2-8)(2x^2+8)(2x-8)=0$ *(Soluc: $x=\pm 2$, $x=4$)*

26. Resolver las siguientes **ecuaciones con la x en el denominador**. ¡Recúerdese que es fundamental comprobar <u>siempre</u> que la(s) solución(es) obtenida no anula(n) ningún denominador! (con un **(*)** se señalan aquellos apartados en los que esto resulta crucial). Como siempre, hacer la comprobación de los sombreados:

1. $\dfrac{3-x}{x+2}-\dfrac{x-1}{x-2}=-2$ *(Soluc: $x=3$)*

2. $\dfrac{x+2}{x}+3x=\dfrac{5x+6}{2}$ *(Soluc: $x=2$)*

3. $\dfrac{8}{x+6}+\dfrac{12-x}{x-6}=1$ *(Soluc: $x_1=10$; $x_2=-3$)*

4. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x-1}=2$ *(Soluc: $x=-1$)*

5. $\dfrac{3x+1}{x^3}+\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{2x+3}{x^2}$ *(Soluc: $x=\pm 1$)*

6. $\dfrac{5x+1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x}{x-2}$ *(Soluc: $x_1=3$; $x_2=-1$)*

7. $\dfrac{x-1}{x^2+2x}-\dfrac{2}{x^2-2x}=\dfrac{x}{x^2-4}$ *(Soluc: $x=-2/5$)*

8. **(*)** $\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{x-1}{x-2}$ *(Soluc: $x=-3$)*

9. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-2}$ *(Identidad: se verifica $\forall\Re$)*

10. $\dfrac{x}{x-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{6}-\dfrac{x+6}{x-6}$ *(Soluc: $x_1=18$; $x_2=-3$)*

11. $\dfrac{1}{x}=-x+\dfrac{5}{2}$ *(Soluc: $x_1=2$; $x_2=1/2$)*

12. $\dfrac{4}{x}+\dfrac{2(x+1)}{3(x-2)}=4$ *(Soluc: $x_1=3$; $x_2=4/5$)*

13. $\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}\,x$ *(Soluc: $x=\pm\sqrt{2}$)*

14. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{3}{10}$ $\left(x=\dfrac{11\pm\sqrt{481}}{6}\right)$

15. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3}{4}$ *(Soluc: $x_1=2$; $x_2=-2/3$)*

16. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=3$ *(Soluc: $x=3$)*

17. $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$ *(Soluc: $x_1=3$; $x_2=-4$)*

18. $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{26}{35}$ *(Soluc: $x_1=6$; $x_2=-8/13$)*

19. $\dfrac{4x}{x+1}+\dfrac{x}{2x-1}=2$ ($\nexists$ *soluc.*)

20. **(*)** $\dfrac{x-3}{x^2-x}-\dfrac{x+3}{x^2+x}=\dfrac{2-3x}{x^2-1}$ *(Soluc: $x=2$)*

21. $\dfrac{4x}{x+5}-\dfrac{x+5}{x-5}=1$ *(Soluc: $x_1=0$; $x_2=15$)*

22. $\dfrac{1-2x}{x+7}=\dfrac{x}{x-1}$ *(Soluc: $x_1=-1$; $x_2=-1/3$)*

23. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{5}{12}$ *(Soluc: $x_1=5$; $x_2=-1/5$)*

24. $\dfrac{3-x}{x+2}-\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2}{x^2-4}$ ($\nexists$ *soluc.*)

25. $\dfrac{x}{5}=2+\dfrac{75}{x}$ *(Soluc: $x_1=25$; $x_2=-15$)*

26. $\dfrac{2x+1}{x-1}-\dfrac{6x}{x+2}=2$ *(Soluc: $x_1=2$; $x_2=-1/2$)*

27. $\dfrac{-x}{x+3}-\dfrac{x+3}{x-3}=1$ *(Soluc: $x_1=0$; $x_2=-1$)*

28. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{(x+2)^2}{x(x-1)}$ ($\nexists$ *soluc.*)

29. **(*)** $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x+2)^2}{x(x+1)}+\dfrac{x+1}{x}$ *(Soluc: $x=-5$)*

30. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=2$ *(Soluc: $x=a$)*

31. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=1$ (*∄ soluc.*)

32. $\frac{x}{a}-\frac{2a}{x}=1$ (*Soluc: $x_1=2a$; $x_2=-a$*)

33. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b^2+1}{b}$ (*Soluc: x=a/b*)

Ecuaciones bicuadradas:

27. Resolver las siguientes **ecuaciones bicuadradas** y comprobar las sombreadas:

1. $x^4-5x^2+4=0$ (*Soluc: x=±1, x=±2*)
2. $x^4-5x^2-36=0$ (*Soluc: x=±3*)
3. $x^4+13x^2+36=0$ (*Soluc: ∄ soluc*)
4. $x^4-13x^2+36=0$ (*Soluc: x=±2, x=±3*)
5. $x^4-4x^2+3=0$ (*Soluc: x=±1, x=±$\sqrt{3}$*)
6. $x^4+21x^2-100=0$ (*Soluc: x=±2*)
7. $x^4+2x^2+3=0$ (*Soluc: ∄ soluc*)
8. $x^4-41x^2+400=0$ (*Soluc: x=±4, x=±5*)
9. $36x^4-13x^2+1=0$ (*Soluc: x=±1/2, x=±1/3*)
10. $x^4-77x^2-324=0$ (*Soluc: x=±9*)
11. $x^4-45x^2+324=0$ (*Soluc: x=±3, x=±6*)
12. $x^4+2x^2-8=0$ (*Soluc: x=±$\sqrt{2}$*)
13. $x^6+7x^3-8=0$ (*Soluc: x=1, x=−2*)
14. $x^4-16=0$ (*Soluc: x=±2*)
15. $x^4+16=0$ (*Soluc: ∄ soluc*)
16. $x^4-16x^2=0$ (*Soluc: x=0, x=±4*)
17. $x^6-64=0$ (*Soluc: x=±2*)
18. $(x^2+2)(x^2-2)+3x^2=0$ (*Soluc: x=±1*)
19. $5x^2=(6+x^2)(6-x^2)$ (*Soluc: x=±2*)
20. $(x^2+x)(x^2-x)=(x-2)^2+x(x+4)$ (*Soluc: x=±2*)
21. $(2x^2+1)(x^2-3)=(x^2+1)(x^2-1)-8$ (*Soluc: x=±$\sqrt{2}$, x=±$\sqrt{3}$*)
22. $(x^2-2)^2=5(1+x)(1-x)+1$ (*Soluc: x=±1*)
23. $(3x^2-27)(x^4-3x^2-28)=0$ (*Soluc: x=±$\sqrt{7}$, x=±3*)
24. $(x^2+1)(x^2-1)+3x^2=3$ (*Soluc: x=±1*)
25. $(3+x)(3-x)x^2-2x(x-3)=(x+3)^2-1$ (*Soluc: x=±2, x=±$\sqrt{2}$*)
26. $5(x+1)(x-1)=1-(x^2-2)^2$ (*Soluc: x=±1*)
27. $(x+3)(x-3)=\left(\frac{20}{x}\right)^2$ (*Soluc: x=±5*)
28. $(x^2+4)(x+4)(x^4+2x^2-8)=0$ (*Soluc: x=-4, x=±$\sqrt{2}$*)
29. $\frac{x^2-32}{4}=-\frac{28}{x^2-9}$ (*Soluc: x=±4, x=±5*)
30. $\frac{2}{x^2-9}=\frac{x^2-16}{72}$ (*Soluc: x=0; x=±5*)
31. $\frac{(2x+3)^2-12x}{x^2+2x}=x^2-2x$ (*Soluc: x=±3*)
32. $\frac{(x+1)(x-1)}{2}-\frac{(x^2+3)(x^2-3)}{6}=\frac{1}{3}$ (*Soluc: x=±2*)
33. $\frac{(2x+1)^2-(x^2+1)(x^2-1)}{x}=3(x+1)+1$ (*Soluc: x=±$\sqrt{2}$*)
34. $\frac{(2x+1)^2}{4}-\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{3}=\frac{4x+1}{4}$ (*Soluc: x=±2*)
35. $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{x^2}{2}=\frac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4}-2$ (*Soluc: x=±2*)
36. $x^6+1=0$ (*Soluc: ∄ soluc*)
37. $\frac{(3x^2-1)(x^2+3)}{4}-\frac{(2x^2+1)(x^2-3)}{3}=4x^2$ (*x=±1, x=±$\sqrt{3}$*)
38. $\frac{(3x^2+2)(3x^2-2)}{5}-\frac{(3x-1)^2}{4}=\frac{3(x-1)}{2}$ (*x=±1/2, x=±1*)
39. $(2x^2-8)(2x^2+8x)(x^4-2x^2-8)=0$ (*x=±2, x=0, x=−4*)
40. $(9-4x^2)(9x-4x^2)(4x^4-21x^2+27)=0$ (*Soluc: x=±2/3, x=0, x=9/4, x=±3/2, x=±$\sqrt{3}$*)
41. $\frac{3x^2+1}{6x+1}=\frac{6x-1}{3x^2-1}$ (*Soluc: x=±2, x=0*)
42. $\frac{(2x^2+3)(2x^2-3)}{2}-\frac{(2x-3)^2}{3}=4x-\frac{41}{6}$ (*Soluc: x=±1*)
43. $x^2(x+1)(x-1)=(2-x)^2+(x+4)x$ (*Soluc: x=±2*)
44. $(2x+3)^2-12x=(x^2-2x)(x^2+2x)$ (*Soluc: x=±3*)
45. $x^2+\frac{1}{x-1}=\frac{x+3}{x^2-1}$ (*Soluc: x=±$\sqrt{2}$*)
46. $x(x-1)+\frac{1}{x}=\frac{x+3}{x^2+x}$ (*Soluc: x=±$\sqrt{2}$*)
47. $x^6+4x^3+3=0$ (*Soluc: x=$\sqrt[3]{-3}$, x=−1*)

Ecuaciones irracionales:

28. Resolver las siguientes **ecuaciones irracionales** (Recordar que en este tipo de ecuaciones es obligatoria la comprobación, con el fin de descartar posibles soluciones "ficticias"):

1. $\sqrt{x+4}-7=0$ *(Soluc: x=45)*

2. $x-\sqrt{25-x^2}=1$ *(Soluc: x=4)*

3. $\sqrt{169-x^2}+17=x$ *(∄ soluc)*

4. $2\sqrt{x+5}=x-10$ *(Soluc: x=20)*

5. $x+\sqrt{5x+10}=8$ *(Soluc: x=3)*

6. $11=2x-3\sqrt{x-1}$ *(Soluc: x=10)*

7. $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+6}=1$ *(Soluc: x=3)*

8. $x=6-\sqrt{x}$ *(Soluc: x=4)*

9. $\sqrt{3x+1}=1+\sqrt{2x-1}$ *(Soluc: $x_1=1$; $x_2=5$)*

10. $1=2x-3\sqrt{4x-7}$ *(Soluc: $x_1=2$; $x_2=8$)*

11. $x-2\sqrt{x-1}=4$ *(Soluc: x=10)*

12. $\sqrt{5x+4}=2x+1$ *(Soluc: x=1)*

13. $\sqrt{2x+1}-3=\sqrt{x-8}$ *(Soluc: $x_1=12$; $x_2=24$)*

14. $\sqrt{x+5}-1=\sqrt{x}$ *(Soluc: x=4)*

15. $x+\sqrt{5x-10}=8$ *(Soluc: $x=\frac{21-\sqrt{145}}{2}$)*

16. $x-\sqrt{2x-1}=2$ *(Soluc: x=5)*

17. $\sqrt[3]{x+5}=2$ *(Soluc: x=3)*

18. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=7$ *(Soluc: x=15)*

19. $2x-13\sqrt{x}-15=0$ *(Soluc: x=225/4)*

20. $9(1-x)=3\sqrt{1+(3x-4)^2+x^2}$ *(∄ soluc)*

21. $x-\sqrt{2x-1}=1-x$ *(Soluc: $x_1=1$; $x_2=1/2$)*

22. $x-\sqrt{7-3x}=1$ *(Soluc: x=2)*

23. $x+\sqrt{7-3x}=1$ *(Soluc: x=−3)*

24. $4a\sqrt{a}=32$ *(Soluc: a=4)*

25. $\sqrt{x^2+x+1}=x+1$ *(Soluc: x=0)*

26. $\sqrt{x^2+x+1}=-x-1$ *(Soluc: ∄ soluc)*

27. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{7}$ *(Soluc: $x=(14/9)^3$)*

28. $2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=3$ *(Soluc: x=4)*

29. $2\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=4$ *(Soluc: $x_1=5$; $x_2=13/9$)*

30. $\sqrt{ax}=\frac{x^2}{a}$ *(Soluc: $x_1=0$; $x_2=a$)*

31. $\sqrt{a^3}=8$ *(Soluc: a=4)*

32. $\sqrt{2x+7}-2\sqrt{x}=1$ *(Soluc: x=1)*

33. $\sqrt{x-1}+1=x-2$ *(Soluc: x=5)*

34. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$ *(Soluc: x=4)*

35. $\sqrt{3x+1}+1=x$ *(Soluc: x=5)*

36. $2x-\sqrt{3x-5}=4$ *(Soluc: x=3)*

37. $\sqrt{x+2}+x=3x-2$ *(Soluc: x=2)*

38. $\sqrt{7+2x}-\sqrt{3+x}=1$ *(Soluc: $x_1=1$; $x_2=-3$)*

39. $\sqrt{x+7}-1=x$ *(Soluc: x=2)*

40. $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$ *(Soluc: x=4)*

41. $\sqrt{2x+x^2}-x-2=0$ *(Soluc: x=2)*

42. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x}=1$ *(Soluc: x=1)*

43. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3$ *(Soluc: x=13/9)*

44. $\sqrt{x+23}=\sqrt{4x+1}+2$ *(Soluc: x=2)*

45. $\sqrt{x}-2=\sqrt{x-8}$ *(Soluc: x=9)*

46. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$ *(Soluc: x=114)*

47. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}=1$ *(Soluc: x=±2)*

48. $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{x+1}$ *(Soluc: $x_1=-1$; $x_2=3$)*

49. $\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+1}=1$ *(Soluc: x=3)*

50. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=2$ *(Soluc: $x_1=3$; $x_2=11$)*

51. $\sqrt{x^3}=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}$ *(Soluc: x=1)*

52. $5\sqrt{x}=3+2\sqrt{x}$ *(Soluc: x=1)*

53. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3}{2}$ *(Soluc: $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$)*

54. $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{x}=2$ *(Soluc: x=0)*

55. $\sqrt[3]{x}=x$ *(Soluc: x=0; x=±1)*

56. $\sqrt{x+3}=2\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ *(Soluc: x=1)*

57. $3\sqrt{x-5}-\sqrt{x}=3$ *(Soluc: x=9)*

58. $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1$ *(Soluc: x=1)*

59. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}=1$ *(Soluc: $x_1=0$; $x_2=1$)*

29. **TEORÍA:** **a)** ¿Por qué es imprescindible comprobar la validez de las posibles soluciones de una ecuación irracional? Indicar algún ejemplo.

b) ¿Cuáles son los dos tipos de ecuaciones vistos hasta ahora cuya comprobación es obligatoria?

c) ¿Qué comprobación final hay que hacer obligatoriamente en una ecuación con la incógnita en el denominador? Indicar un ejemplo.

30. Razonar, sin resolverla, por qué la ecuación $\frac{x}{4}+2\sqrt{x}+15=0$ no puede tener solución.

Sistemas de ecuaciones de 2º grado:

31. Resolver los siguientes **sistemas de ecuaciones no lineales**, y comprobar los sombreados:

1. $\left.\begin{array}{r}2x-y=1\\x^2-y=4\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=3,y_1=5;x_2=-1,y_2=-3$)*

2. $\left.\begin{array}{r}x-3y=-3\\xy=6\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=3,y_1=2;x_2=-6,y_2=-1$)*

3. $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=1\\2x-y=3\end{array}\right\}$ *($\nexists$ soluc)*

4. $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=10\\x^2-y^2=8\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=3,y_1=1;x_2=-3,y_2=1;x_3=3,y_3=-1;x_4=-3,y_4=-1$)*

5. $\left.\begin{array}{r}x^2-3y=3\\2x-3y=-12\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=-3,y_1=2;x_2=5,y_2=22/3$)*

6. $\left.\begin{array}{r}\frac{x-2}{3}-\frac{y-4}{2}=1\\\frac{2}{x-3}=\frac{4}{y-2}\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=7/2, y=3)*

7. $\left.\begin{array}{r}x-2y=-5\\x^2+y^2=4x+2y+20\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=5,y_1=5;x_2=-3,y_2=1$)*

8. $\left.\begin{array}{l}x\cdot y=12\\(x-4)\cdot(y+0{,}1)=12\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=24$, $y_1=1/2$; $x_2=-20$, $y_2=-3/5$)*

9. $\left.\begin{array}{r}x^2-2xy+y^2=16\\x+y=6\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=5,y_1=1;x_2=1,y_2=5$)*

10. $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=25\\xy=12\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=3$ $y_1=4$; $x_2=-3$ $y_2=-4$ $x_3=4,y_3=3$; $x_4=-4,y_4=-3$)*

11. $\left.\begin{array}{r}x^2-y=0\\x-y=0\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=1$, $y_2=1$)*

12. $\left.\begin{array}{r}x-y=105\\\sqrt{x}+y=27\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=121, y=16)*

13. $\left.\begin{array}{l}y=x^2\\y=\sqrt[3]{x}\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=1$, $y_2=1$)*

14. $\left.\begin{array}{r}\frac{1}{x}+y=3\\\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=1$, $y_1=2$; $x_2=2/5$, $y_2=1/2$)*

15. $\left.\begin{array}{r}xy=10\\9(x-y)^2=x^2\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=\sqrt{15}$, $y_1=2\sqrt{15}/3$; $x_2=\sqrt{30}/2$, $y_2=2\sqrt{30}/3$; $x_3=-\sqrt{15}$, $y_3=-2\sqrt{15}/3$; $x_4=-\sqrt{30}/2$, $y_4=-2\sqrt{30}/3$)*

16. $\left.\begin{array}{r}xy=60\\x^2+y^2=169\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=12$, $y_1=5$; $x_2=-12$, $y_2=-5$; $x_3=5$, $y_3=12$; $x_4=-5$, $y_4=-12$)*

17. $\left.\begin{array}{r}x^2-4x-y=5\\4x+2y=6\end{array}\right\}$ *(Soluc: $x_1=-2$, $y_1=7$; $x_2=4$, $y_2=-5$)*

18. $\left.\begin{array}{r}x^2-x-y=2\\3x+y=-4\end{array}\right\}$ *($\nexists$ soluc)*

19. $\left.\begin{array}{r} x^2-y=1 \\ 4x-y=5 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=3)*

20. $\left.\begin{array}{r} x-y=11 \\ y^2=x-5 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x_1=9, y_1=−2; x_2=14, y_2=3)*

21. $\left.\begin{array}{r} xy=12 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x_1=3, y_1=4;x_2=−8/3, y_2=−9/2)*

22. $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x^2-2x+3y=-1 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x_1=4, y_1=−3; x_2=1, y_2=0)*

23. $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ x^2+y^2-2x=31 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x_1=5, y_1=4; x_2=−3, y_2=−4)*

24. $\left.\begin{array}{r} 3x+y^2=7 \\ 2x+y^2=6 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x_1=1, y_1=2; x_2=1, y_2=−2)*

25. $\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ x^2+3xy=0 \end{array}\right\}$

26. $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=5 \\ x-y=-3 \end{array}\right\}$

27. $\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ x\cdot y=10 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x_1=5, y_1=2; x_2=−2, y_2=−5)*

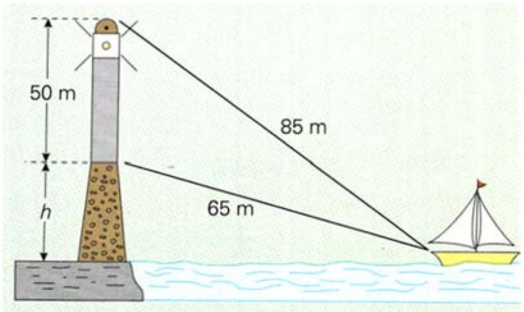
28. $\left.\begin{array}{r} x^2-5x-y=-6 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$

29. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=15 \\ 2x-y=3 \end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{l} x^2-y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x_1=2, y_1=0; x_2=−1, y_2=−3)*

31. $\left.\begin{array}{l} y^2=2ax \\ x^2=ay \end{array}\right\}$ *(Soluc : $x=a\cdot\sqrt[3]{2}$, $y=a\cdot\sqrt[3]{4}$)*

32. En la figura adjunta aparece un faro situado sobre un promontorio. Hallar la altura, h, de éste último. *(Ayuda: Aplicar el teorema de Pitágoras dos veces)* *(Soluc: 5 m)*



[72 problemas de planteamiento](#):

RECORDAR: Para resolver un problema de planteamiento de una ecuación o un sistema se requiere:

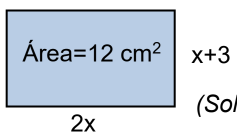
1) **Leer** atentamente **el enunciado** completo.
2) **Identificar lo que nos piden,** y llamarlo **x** (e **y**, si es un sistema).
3) **Plantear la ecuación** (o el sistema) que relaciona algebraicamente los datos del enunciado y la(s) incógnita(s) → es recomendable hacer una tabla (en los problemas de edades), o un dibujo (en los de tipo geométrico), o un diagrama (problemas de mezclas, depósitos…), etc.
4) **Resolverla**, interpretando los resultados obtenidos de acuerdo con el enunciado.
5) **Comprobar** que la(s) solución(es) obtenida(s) verifica(n) las condiciones del enunciado.

33. Hallar dos números positivos consecutivos cuyo producto sea 380 *(Soluc: 19 y 20)*

34. Calcular un número positivo sabiendo que su triple más el doble de su cuadrado es 119 *(Soluc: 7)*

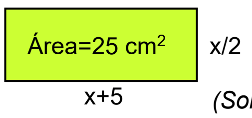
35. Hallar en cada caso el valor de x para que los rectángulos tengan el área que se indica:

a)



(Soluc: x≅1,37 cm)

b)



(Soluc: x=5 cm)

36. Juan pierde los 3/8 de las canicas que tenía, con lo cual le quedan 10. ¿Cuántas canicas tenía al principio? *(Soluc: 16 canicas)*

37. Juan ha leído ya la quinta parte de un libro. Cuando lea 90 páginas más, todavía le quedará la mitad del libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro? ¿Cuántas páginas lleva leídas? *(Soluc: 300 págs.; 60 págs.)*

38. Paloma vendió los dos quintos de una colección de cómics que tenía y luego compró 100 más. Tras esto tenía el mismo número que si hubiese comprado desde el principio 40 cómics. ¿Cuántos cómics tenía Paloma al principio? *(Soluc: 150 cómics)*

39. En un texto matemático babilónico que se conserva en una tablilla en el Museo Británico de Londres se lee: «Restamos al área de un cuadrado su lado y obtenemos 870». Hallar el lado de dicho cuadrado. *(Soluc: 30)*

40. Un campo está plantado con un total de 250 árboles, entre olivos y almendros. Si el doble de almendros son 10 menos que el total de los olivos, ¿cuántos almendros habrá? ¿Y cuántos olivos? *(Soluc: 80 almendros y 170 olivos)*

41. *Problema planteado por Diofanto (matemático griego del siglo III d.C.):* "Encontrar dos números tales que su suma sea 20 y su producto 96" *(Soluc: 8 y 12)*

42. Hallar dos números sabiendo que su suma es 36 y que al dividir el mayor entre el menor el cociente es 2 y el resto 3. *(Soluc: 11 y 25)*

43. Carlos es 6 años mayor que Javier y éste tiene la mitad de años que Pablo. Hallar la edad de cada uno, sabiendo que suman 70 años. *(Soluc: 16, 22 y 32 años)*

44. Uno de los lados de un rectángulo es 3 m más pequeño que el triple del otro. Si el perímetro y área coinciden numéricamente, hallar ambos lados. *(Soluc: 3 y 6 m)*

45. Hallar una fracción irreducible sabiendo que su denominador es igual al cuadrado del numerador menos 4, y ambos términos suman 86 *(Soluc: 9/77)*

46. El perímetro de un solar rectangular mide 40 m. Si su ancho es la tercera parte de su largo, ¿cuánto miden los lados del solar? *(Soluc: 15 m de largo y 5 m de ancho)*

47. En una granja viven la mitad de gallinas que de conejos. Si en total podemos contar 110 patas, ¿cuántos conejos y gallinas pueblan la granja? *(Soluc: 11 gallinas y 22 conejos)*

48. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcular las dimensiones de la cerca. *(Soluc: 25 x 30 m)*

49. Dos tinajas contienen una cierta cantidad diferente de vino cada una. Si juntamos ambos contenidos obtendríamos 100 l, y si de una de ellas retiramos la mitad de su contenido y el resto se lo añadimos a la otra juntaríamos 70 l. ¿Cuántos litros contienen cada una? *(Soluc: 60 y 40 l)*

50. Hallar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 34 cm y su diagonal 13 cm. *(Soluc: 12 cm x 5 cm)*

51. Según una noticia publicada en la prensa, una determinada ciudad fue visitada en 2010 por dos millones de turistas, lo cual supuso un 20 % más que en 2008. ¿Cuál fue la afluencia de turistas en este último año? *(Soluc: $1,\widehat{6}$ millones)*

52. Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que son tres números consecutivos. *(Soluc: 3, 4 y 5)*

53. Un triángulo rectángulo tiene de perímetro 24 m y la longitud de un cateto es igual a tres cuartos de la del otro. Hallar cuánto miden sus catetos. (Ayuda: Llamar ***x*** a un cateto e ***y*** a la hipotenusa, y plantear un sistema). *(Soluc: 6 m y 8 m)*

54. Compramos en las rebajas unos pantalones por 18 €. Si nos han rebajado el 10 %, ¿cuál era su precio original? *(Soluc: 20 €)*

55. Un padre tiene el doble de edad que su hijo. Hace 17 años, tenía el triple. Hallar la edad de ambos. *(Soluc: 68 y 34 años)*

56. Un depósito de agua tiene forma de ortoedro cuya altura es 10 m y su capacidad 4000 m^3. Hallar el lado de la base sabiendo que es cuadrada. *(Soluc: 20 m)*

57. Juan cobra 1350 €, lo cual supone un 10 % menos que María. ¿Cuánto cobra esta? *(Soluc: 1500 €)*

58. Una ciudad de 160 000 habitantes ha perdido la última década el 20 % de la población. Hallar los habitantes que tenía hace 10 años. *(Soluc: 200 000 habitantes)*

59. *Problema del bambú (texto indio del siglo IX):* Un bambú que mide 30 codos y que se eleva sobre un terreno plano se rompe en un punto por la fuerza del viento, de forma que la punta se queda ahora colgando a 16 codos del suelo. ¿A qué altura se ha roto? *(Soluc: 23 codos)*

60. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 m. *(Soluc: 15,59 m^2)*

61. Se tiene un lote de baldosas cuadradas. Si se forma con ellas un cuadrado de x baldosas por lado sobran 27, y si se toman x+1 baldosas por lado faltan 40. Hallar las baldosas del lote. *(Soluc: 1116 baldosas)*

62. En una clase el 70% son chicos. Además, se sabe que hay 12 chicas menos que chicos. ¿Cuántas chicas y chicos hay? *(Soluc: 21 chicos y 9 chicas)*

63. Un padre tiene 49 años y su hijo 11. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple de la edad del hijo? *(Soluc: Dentro de 8 años)*

64. Un frutero vende en un día las dos quintas partes de una partida de naranjas. Además, se le estropean 8 kg, de forma que al final le quedan la mitad de naranjas que tenía al comenzar la jornada. ¿Cuántos kg tenía al principio? *(Soluc: 80 kg)*

65. Entre Rosa y Beatriz tienen 124 discos compactos. Si Rosa le diera a Beatriz 3 discos, entonces Rosa tendría el triple de discos que Beatriz. ¿Cuántos discos tiene cada una? *(Soluc: Rosa tiene 96 discos y Beatriz 28)*

66. Una caja llena pesa 242 g y con la mitad de contenido pesa 188 g. ¿Cuántos gramos pesa la caja vacía? *(Soluc: 134 g)*

67. Juan y María son dos hermanos que están con sus amigos. En un momento dado les preguntan cuántos hermanos y hermanas son, a lo que cada uno de ellos responde de la misma forma: "Tengo el doble de hermanos que de hermanas". ¿Cuántos hermanos y hermanas son?

68. Un grupo de amigos celebra una comida cuyo coste total asciende a 120 €. Uno de ellos hace notar que, si fueran cuatro más, hubieran pagado 5 € menos por persona. ¿Cuántos amigos son y cuánto paga cada uno? *(Soluc: 8 amigos; 15 €)*

69. Un grupo de personas se encuentra en una sala de multicines. La mitad se dirige a la sala A, la tercera parte opta por la sala B y una pareja decide ir a la cafetería. ¿Cuántas personas componían el grupo? *(Soluc: 12 personas)*

70. Un padre ha dado a sus hijos respectivamente un tercio, un cuarto y un quinto de lo que tenía, y aún le quedan 26 € ¿Cuánto dinero tenía? *(Soluc: 120 €)*

71. Nada se sabe de la vida del matemático griego **Diofanto** (siglo III d.C.), excepto su edad al morir. Ésta se sabe por una cuestión planteada en una colección de problemas del siglo V o VI, que reza así: «La juventud de Diofanto duró 1/6 de su vida… se dejó barba después de 1/12 más. Después de 1/7 de su vida se casó. Cinco años después tuvo un hijo. Éste vivió exactamente la mitad de tiempo que su padre, y Diofanto murió cuatro años después». Hallar la edad de Diofanto. *(Soluc: 84 años)*

72. Preguntada una persona por su edad contestó: "Sumad 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y os resultará un número igual al cuadrado de la edad que tengo hoy". Hallar la edad de la persona en el momento actual. *(Soluc: se verifica para cualquier edad)*

73. Si el lado de un cuadrado aumenta 2 cm, su área aumenta 28 cm^2 ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado originario? *(Soluc: Se trata de un cuadrado de lado 6 cm)*

74. Calcular la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su área es 56 cm^2 y su perímetro 30 cm. *(Soluc: 7x8 cm)*

75. En una papelería venden el paquete de bolígrafos a un precio total de 12 €. Si el precio de un bolígrafo subiera 0,10 €, para mantener ese precio total del paquete cada uno debería tener 4 bolígrafos menos. ¿Cuál es el precio de un bolígrafo y cuántos trae cada paquete?

(Ayuda: llamar x al nº de bolígrafos que trae el paquete e y al precio de cada bolígrafo, y plantear un sistema) Comprobar que la solución obtenida verifica las condiciones del enunciado.

(Soluc: cada bolígrafo cuesta 50 cent., y el paquete tiene 24)

76. Javier tiene 27 años más que su hija Nuria. Dentro de ocho años, la edad de Javier doblará la de Nuria. ¿Cuántos años tiene cada uno? *(Soluc: Javier, 46 años, y Nuria, 19)*

77. Un grupo de estudiantes alquila un piso por el que tienen que pagar 420 € al mes. Uno de ellos hace cuentas y observa que si fueran dos estudiantes más, cada uno tendría que pagar 24 € menos. ¿Cuántos estudiantes han alquilado el piso? ¿Cuánto paga cada uno?

(Ayuda: llamar x al nº de estudiantes e y a lo que paga cada uno, y plantear un sistema)

Comprobar que la solución obtenida verifica las condiciones del enunciado.

(Soluc: 5 estudiantes a 84 € cada uno)

78. Con dos tipos de barniz, de 3,50 €/kg y de 1,50 €/kg, queremos obtener un barniz de 2,22 €/kg. ¿Cuántos kilogramos tenemos que poner de cada clase para obtener 50 kg de la mezcla? (Ayuda: plantear un sistema de ecuaciones de primer grado) *(Soluc: 18 kg del barniz de 3,50 y 32 kg del de 1,50)*

79. Dos árboles de 15 m y 20 m de altura están a una distancia de 35 m. En la copa de cada uno hay una lechuza al acecho. De repente, aparece entre ellos un ratoncillo, y ambas lechuzas se lanzan a su captura a la misma velocidad, llegando simultáneamente al lugar de la presa. ¿A qué distancia de cada árbol apareció el ratón? (Ayuda: Si se lanzan a la misma velocidad, recorren el mismo espacio, pues llegan a la vez; aplicar el teorema de Pitágoras, y plantear un SS.EE. de 2º grado) *(Soluc: a 15 m del árbol de 20 m)*

80. Un almacenista de fruta compra un determinado número de cajas de fruta por un total de 100 €. Si hubiera comprado 10 cajas más y cada caja le hubiera salido por 1 € menos, entonces habría pagado 120 €. ¿Cuántas cajas compró y cuánto costó cada caja? *(Soluc: 20 cajas a 5 €)*

81. Calcular dos números positivos sabiendo que su cociente es 2/3 y su producto 216 *(Soluc: 12 y 18)*

82. Un rectángulo tiene 300 cm^2 de área y su diagonal mide 25 cm. ¿Cuánto miden sus lados? *(Sol: 20 cm y 15 cm)*

83. Un frutero ha comprado manzanas por valor de 336 €. Si el kilo de manzanas costara 0,80 € menos, podría comprar 48 kg más. Calcular el precio de las manzanas y la cantidad que compró. (Ayuda: plantear un SS.EE. de 2º grado) *(Soluc: 120 kg a 2,80 €/kg)*

84. Una persona compra una parcela de terreno por 4800 €. Si el m^2 hubiera costado 2 € menos, por el mismo dinero habría podido comprar una parcela 200 m^2 mayor. ¿Cuál es la superficie de la parcela que ha comprado? ¿Cuánto cuesta el m^2? *(Soluc: 600 m^2; 8 €)*

85. El área de un **triángulo** rectángulo es 30 m^2 y la hipotenusa mide 13 m. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos? *(Soluc: 12 m y 5 m)*

86. Calcular dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 195 *(Soluc: 13 y 15)*

87. Si multiplicamos la tercera parte de cierto número por sus tres quintas partes, obtenemos 405. ¿Cuál es ese número? *(Soluc: 45)*

88. Varios amigos alquilan un local por 800 €. Si hubieran sido tres más, habría pagado cada uno 60 € menos. ¿Cuántos amigos son? (Ayuda: llamar x al nº de amigos e y a lo que paga cada uno) *(Soluc: 5 amigos)*

89. Uno de los lados de un rectángulo es doble que el otro y el área mide 50 m^2. Calcular las dimensiones del rectángulo. *(Soluc: 5 x 10 m)*

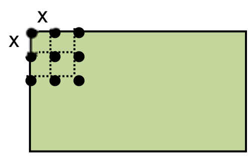
90. Un campo rectangular de 4 ha de superficie tiene un perímetro de 10 hm. Calcular, en metros, su longitud y su anchura. (1 ha=100 a; 1 a=100 m^2) *(Soluc: 100 m x 400 m)*

91. Las diagonales de un rombo están en la relación de 2 a 3. El área es de 108 cm^2. Calcular la longitud de las diagonales y el lado del rombo. *(Soluc: d=12 cm; D=18 cm; l≅10,81 cm)*

92. El diámetro de la base de un cilindro es igual a su altura. El área total es 169,56 m². Calcular sus dimensiones. *(Soluc: d=h=6 m)*

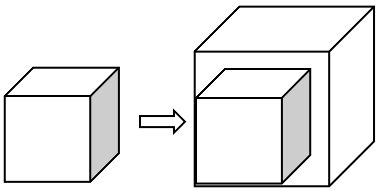
93. Calcular la velocidad y el tiempo que ha invertido un ciclista en recorrer una etapa de 120 km sabiendo que, si hubiera ido 10 km/h más deprisa, habría tardado una hora menos. *(Soluc: v=30 km/h; t=4 h)*

94. En un terreno rectangular de lados 64 m y 80 m se quieren plantar 357 árboles formando una cuadrícula regular. ¿Cuál será el lado de esa cuadrícula? (Ayuda: En el lado menor, por ejemplo, hay 64/x cuadrículas, y un árbol más que el número de cuadrículas) *(Soluc: x=4 m)*



95. Un padre tiene 30 años más que su hijo. Dentro de 15 años duplicará su edad. Hallar la edad de ambos. *(Soluc: 45 y 15)*

96. Al aumentar en 1 cm la arista de un cubo su volumen aumenta en 271 cm³. ¿Cuánto mide la arista? (Ayuda: plantear una ecuación de 3er grado) *(Soluc: 9 cm)*



97. Dos tinajas tienen la misma cantidad de vino. Si se pasan 37 litros de una a otra, ésta contiene ahora el triple que la primera ¿Cuántos litros de vino había en cada tinaja al principio? *(Soluc: 74 l)*

98. Juan y María tienen cierta cantidad de dinero. Juan observa que si le diera a su amiga 15 € entonces esta tendría el cuádruple que él. Y María nota que si se encontrara 25 € tendría el doble que su amigo. ¿Qué cantidad tiene cada uno? *(Ayuda: hacer una tabla).* *(Soluc: Ambos tienen 25 €l)*

99. Un padre, preocupado por motivar a su hijo en Matemáticas, se compromete a darle 1 € por problema bien hecho, mientras que, si está mal, el hijo le devolverá 0,5 €. Después de realizar 60 problemas, el hijo ganó 30 €. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente? *(Ayuda: Plantear un SS.EE. de 1er grado)* *(Soluc: 40 problemas)*

100. Juan compra cierto número de botes de conserva por 24 €. Observa que, si cada bote costara 2 € menos, podría haber comprado un bote más con la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos botes compró y a qué precio? *(Soluc: 3 botes a 8 € cada uno)*

101. Tres hermanos se reparten un premio de 350 €. Si el mayor recibe la mitad de lo que recibe el mediano y el mediano la mitad de lo que recibe el pequeño, ¿cuánto dinero tendrá cada hermano al final?
(Soluc: 50 € el mayor, 100 € el mediano y 200 € el pequeño)

102. Un ranchero decide repartir una manada de 456 caballos entre sus hijos e hijas. Antes del reparto se enfada con los dos únicos varones, que se quedan sin caballos. Así, cada hija recibe 19 cabezas más. ¿Cuántas hijas tiene el ranchero? *(Soluc. 6 hijas)*

103. Una cuadrilla de vendimiadores tiene que vendimiar dos fincas, una de las cuales tiene doble superficie que la otra. Durante medio día trabajó todo el personal de la cuadrilla en la finca grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en la finca grande y la otra mitad trabajó en la pequeña. Durante esa tarde fueron terminadas las dos fincas, a excepción de un reducido sector de la finca pequeña, cuya vendimia ocupó el día siguiente completo a un solo vendimiador. ¿Con cuántos vendimiadores contaba la cuadrilla? (Ayuda: Llamar x al nº de vendimiadores y s a la superficie que vendimia una persona en media jornada, y plantear una ecuación, ¡no un sistema!) *(Soluc. 8 vendimiadores)*

104. Tres amigos juegan una partida de cartas en la que convienen que el que pierda una partida pagará a los otros dos la cantidad que tenga cada uno de ellos en ese momento. Después de 3 manos, en las que cada uno pierde una partida, los tres acaban con la misma cantidad, 20 € ¿Con cuántos € comenzó cada uno?

(Soluc: 32,5 €, 17,5 € y 10 €)

POLINOMIOS
y FRACCIONES ALGEBRAICAS
(5 semanas)

*El matemático italiano **Paolo Ruffini** (1765-1822) demostró que las ecuaciones de quinto grado (y de orden superior) no se pueden resolver algebraicamente. También desarrolló su famoso método rápido para la división de polinomios.*

MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) POLINOMIOS. DEFINICIONES y OPERACIONES

Ejemplos: MONOMIOS tienen 1 término: $-2x,\ -3xy^2,\ 7,\ \frac{a^2b^3c}{5},\ x$, etc.

BINOMIOS tienen 2 términos: $2x+y,\ 3x^5-7,\ a^2b^3+5a^3b^2$, etc.

TRINOMIOS tienen 3 términos: ax^2+bx+c

·
· (en general)
·

coeficiente — término independiente

POLINOMIOS $\underbrace{4x^5+3x^2+x-5}$ ← los polinomios se escriben en orden decreciente de grado

término de mayor grado — término cuadrático o término de 2º grado

este polinomio tiene 4 términoss
" " es un polinomio de 5º grado

x se llama **variable** o **indeterminada**.

polinomio mónico

$x^2-5x+6,\quad 2x^3-3x^2+5x-3,$ etc. son POLINOMIOS COMPLETOS, mientras que el polinomio del ejemplo de arriba es INCOMPLETO.

«**Valor numérico de $P(x)$ para $x=a$** es el valor que toma P(x) cuando reemplazamos **x** con **a**, es decir, P(a)».

Ejercicios: 1 y 2 Ficha Polinomios

Operaciones: 1) SUMA y RESTA de monomios semejantes: **Ejercicio: 3 Ficha Polinomios**

de polinomios: **Ejercicios: 4 y 5 Ficha Polinomios**

2) PRODUCTO de monomios: **Ejercicios: 6 y 7** ← extraer factor común

de polinomios: **Ejercicios: 8, 9 y 10** ← operaciones combinadas

Productos notables: **Ejercicios: 11 a 15 (y 1 a 3 Ficha Productos Notables)**

Potencia de un binomio: Existe una fórmula para desarrollar $(a+b)^n$, llamada TEOREMA DEL BINOMIO o FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON. Vamos a obtenerla por medio del siguiente ejercicio:

Ejercicio 1: $(A+B)^2=$

$(A+B)^3=$

$(A+B)^4 =$

$(A+B)^5 =$

.

Y así sucesivamente (Principio de inducción matemática) .

.

En general, $(A+B)^n$ tiene: **1)** n+1 términos.

2) Los exponentes de A empiezan en **n** y decrecen. Los de B aumentan hasta llegar a **n**. } los exponentes de A y B en todo momento suman **n**

3) Los coeficientes forman el llamado **Triángulo de Tartaglia**[1]:

Cada número es la suma de los dos superiores (excepto los bordes, que son todos 1)

						1							
					1		1						
				1		2		1					$(A+B)^2$
			1		3		3		1				$(A+B)^3$
		1		4		6		4		1			$(A+B)^4$
	1		5		10		10		5		1		$(A+B)^5$
1		6		15		20		15		6		1	$(A+B)^6$

Ejercicio 2: Escribir el desarrollo de $(A+B)^6$ directamente, usando la fórmula del binomio.

Caso $(A-B)^n$: Utilicemos la fórmula anterior para hacer $(A-B)^4$, y extraigamos consecuencias:

[1] En honor del matemático italiano ***Nicoló Fontana*** (1499-1557), conocido con el seudónimo de ***Tartaglia***. En muchos países se denomina *Triángulo de Pascal*, debido al teólogo, físico y matemático francés ***Blaise Pascal*** (1623-1662).

En general, «El desarrollo de $(A-B)^n$ es como el de $(A+B)^n$, excepto que los coeficientes se alternan en signo, comenzando por **+**».

NOTA: De cara al futuro conviene memorizar los siguienes dos productos notables, muy habituales:

$$\boxed{\begin{array}{l}(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ (A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3\end{array}}$$

Ejercicio: 16 Ficha Polinomios

3) COCIENTE de monomios

P(x) : monomio (PROPIED. DISTRIBUTIVA) } **Ejercicio: 17**

P(x) : Q(x) (DIVISIÓN EUCLÍDEA) ← **Ejercicios: 18 y 19**

II) DIVISIÓN de P(x) por $x-a$: REGLA de RUFFINI

Vamos a repasar esta utilísima regla por medio de un ejemplo:

Ejemplo 1:

$$x^3 \qquad -7x+1 \; \underline{| \; x-2 \qquad}$$

RUFFINI

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 1 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \boxed{} \end{array}$$

Sol: $C(x)=$

$R(x)=$

Comprobación: $D = d \cdot C + R \Rightarrow$

Ejercicios: 20 y 21 Ficha Polinomios

Notas:

1°) Nótese que, obviamente, «**el cociente es siempre un grado menor que el dividendo**».

“ “ “ «**el resto** “ “ **una constante**».

2°) **Si en el dividendo falta alguna potencia de x, hay que insertar un 0 en ese hueco**.

Teorema del resto: «**El resto de la división de $P(x)$ por $x-a$ es siempre igual al valor numérico $P(a)$**».

Comprobación: Ejercicio 22 Ficha Polinomios

Utilidad: Esto nos permite predecir, sin necesidad de efectuar la división, so conduce a un resto 0, i.e. si es exacta.

Dem.:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \hline R & Q(x) \end{array} \quad \xrightarrow[D=d\cdot Q+R]{} \quad \underset{\text{valid } \forall x\in\mathbb{R}}{P(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R}$$

Si en particular imponemos $x=a \Rightarrow P(a)=R$ (C.Q.D.)

Ejercicios: 23 a 26 Ficha Polinomios

Este teorema se puede formular en otros términos:

Teorema del factor: « **$P(x)$ es divisible por $x-a$** (i.e. $P(x)$ contiene el factor $x-a$) **si $P(a)=0$**».

Ejemplo 2: Utilizar el teorema del factor para comprobar que $P(x)=x^2+x-2$ contiene el factor $x-1$. Comprobarlo haciendo la división:

Nótese que «**el teorema del factor es a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad son a la división numérica**».

Ejercicios: 27 a 33 Ficha Polinomios

III) FACTORIZACIÓN de POLINOMIOS UTILIZANDO RUFFINI

■ **Repaso: factorización de polinomios cuadráticos:** Ejercicio: 34 Ficha Polinomios

«**Polinomio irreducible** es todo polinomio cuadrático que carece de raíces, es decir, nunca se anula».

Ejemplo 3: $x^2 + x + 2$

■ **Def.:** «**Factorizar un polinomio significa descomponerlo en factores más simples** (normalmente de 1er grado y, a veces, de 2º grado) **tales que si multiplicamos dichos factores obtenemos el polinomio original**». Esto va a ser muy útil, por ejemplo para resolver cierto tipo de ecuaciones, o para simplificar expresiones algebraicas, y para más cuestiones que veremos en próximos cursos.

Def.: «**Las raíces** (o ceros) **de un polinomio P(x) son los valores de x que hacen que el polinomio valga 0** ».

Por medio del ejercicio 34 podemos ver que "**LAS POSIBLES RAÍCES ENTERAS DE UN POLINOMIO SON LOS DIVISORES DE SU TÉRMINO INDEPENDIENTE**".

Por tanto, para encontrar las posibles raíces enteras de un polinomio es suficiente comprobar los divisores del término independiente. En la práctica, para factorizar un polinomio seguiremos los siguientes pasos:

1) **IREMOS COMPROBANDO** (por Ruffini) **EN ORDEN ASCENDENTE LOS DIVISORES DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE (+ o -). SI NO OBTENEMOS RESTO CERO, TENEMOS QUE SEGUIR COMPROBANDO EL SIGUIENTE DIVISOR DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE.**

2) **SI OBTENEMOS RESTO CERO, HABREMOS ENCONTRADO UNA RAÍZ** (debido al teorema del factor). **Y UTILIZANDO EL COCIENTE RESULTANTE SEGUIREMOS COMPROBANDO EL SIGUIENTE DIVISOR. ESTO NOS PERMITE SEGUIR EL PROCESO CON POLINOMIOS CADA VEZ MÁS PEQUEÑOS.**

3) **HABREMOS FINALIZADO SI ENCONTRAMOS TANTAS RAÍCES** racionales (teniendo en cuenta la multiplicidad) **COMO EL GRADO DEL POLINOMIO**, salvo que aparezca un factor cuadrático irreducible.

Ejercicios: 35 y ss. Ficha Polinomios

Notas y consejos:

1°) $\underbrace{\text{Encontrar las soluciones de la ecuación } P(x)=0}_{\text{Ejercicio: 37}}$ es obviamente equivalente a $\underbrace{\text{encontrar las raíces de } P(x)}_{\text{Ejercicio: 38}}$.

2°) Si un divisor del término independiente resulta no ser raíz, no tiene sentido volver a comprobarlo después.

3°) Aunque una raíz puede repetirse, no se recomienda comprobarla de nuevo (ya que tarde o temprano aparecerá), a no ser que sea la única forma de poder continuar.

4°) Si el coeficiente del término de mayor grado es $\neq \pm 1$ (esto es, polinomio no mónico), podría haber al menos una raíz fraccionaria.

5º) **Si el polinomio cuadrático que resulta al final del proceso no tiene raíces reales, ESTE FACTOR IRREDUCIBLE DEBE SER AÑADIDO A LA FACTORIZACIÓN**. En tal caso, el polinomio tiene menos raíces que su grado (Es similar al caso de $87=3\cdot 29$, por ejemplo).

factor primo o irreducible

6º) ¿Por qué no se recomienda al final del proceso obtener las últimas raíces por Ruffini? Consideremos algunos ejemplos:

Ejemplo 4: $(x-1)(x+2)(x-3)=$ $=x^3-2x^2-5x+6$

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	$\boxed{0}$
-2		-2	6	
	1	-3	$\boxed{0}$	
3		3		
	1	$\boxed{0}$		

Ejemplo 5:

$$6(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(x-1)(2x-3)(3x-2)= \qquad =6x^3-19x^2+19x-6$$

	6	-19	19	-6
1		6	-13	6
	6	-13	6	$\boxed{0}$
?				
			$\boxed{}$	

Ejemplo 6: $(x-1)(x^2+2x+12)=x^3+x^2+10x-12$

	1	1	10	- 12
1		1	2	12
	1	2	12	$\boxed{0}$
?				
				$\boxed{}$

IV) FRACCIONES ALGEBRAICAS

- **Repaso de identidades notables:** **Ejercicios: 1 a 3 Ficha Fracciones algebraicas**

- «Las **fracciones algebraicas** son fracciones que utilizan incógnitas». En otras palabras, una fracción algebraica es un cociente de polinoios:

Ejemplos: $\frac{x^2+x+1}{x^3+1}$ $\frac{4x^2+5}{3}$ $-\frac{5}{x}$ $\frac{3a^2b+ab}{5a+b^2}$, etc.

- En general, las reglas para operar con fracciones algebraicas son idénticas a las utilizadas para las fracciones numéricas. La única salvedad, recuérdese, es que en vez de criterios de divisibilidad tendremos que utilizar el teorema del factor.

Ejercicios: 4 y ss. Ficha Fracciones algebraicas

Valor numérico:

1. Calcular el **valor numérico del polinomio** P(x) para el valor de x indicado:

a) $P(x)=x^2+1$, para x=1

b) $P(x)=x^3+1$, para x=–1

c) $P(x)=x^2+x+2$, para x=2

d) $P(x)=-x^2-x-2$, para x=–2

e) $P(x)=\frac{x^2}{2}-5x+\frac{1}{5}$, para x=-2

f) $P(x)=x^3+2x+3$, para x=-1/2

g) $P(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{5x}{3}+1$, para x=1/3

h) $P(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{5x}{3}+1$, para x=0

*(Soluc: **a)** 2; **b)** 0; **c)** 8; **d)** –4; **e)** 61/5; **f)** 15/8; **g)** 11/18; **h)** 1)*

2. En cada caso, hallar k para el valor numérico indicado:

a) $P(x)=2x^2-6x-k$, siendo P(1)=7 *(Soluc: k= –11)*

b) $P(x)=-2x^4-6x^3+kx+29$, siendo P(–2)=35 *(Soluc: k=5)*

c) $P(x)=-\frac{1}{2}x^6-5x^4+5x^2-k$, siendo P(–4)=58 *(Soluc: k= -3306)*

d) $P(x)=3x^3+kx^2+x+1$, siendo P(–1)=–3 *(Soluc: k=0)*

e) $P(x)=-8x^4-\frac{1}{4}x^2-12x+k$, siendo P(1/2)=125 *(Soluc: k=2105/16)*

Sumas, restas y productos de polinomios:

3. **Sumar** (en este cuaderno) convenientemente **monomios semejantes**:

a) $2x-5x+7x+x=$

b) $3x^2-7x^2+x^2-2x^2=$

c) $2x^2y-3x^2y+5x^2y=$

d) $-3xy^2+xy^2-6xy^2+8xy^2=$

e) $3x^2y^2-xy^2+5x^2y-x^2y^2+2xy^2-x^2y=$

f) $-2x^3yz+3x^3yz+5x^3yz-x^3yz=$

g) $-x^3+\frac{5x^3}{4}-\frac{2x^3}{3}+3x^3+\frac{x^3}{2}=$

h) $7x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x^3+2x^2+\frac{3}{2}x^3=$

i) $2ab^2-5a^2b-\frac{2}{3}ab^2-ab^2+\frac{1}{2}a^2b=$

j) $-2xy^3+3x^3y+5xy^3-xy^3=$

*(Soluc: **a)** 5x; **b)** $-5x^2$; **c)** $4x^2y$; **d)** 0; **e)** $2x^2y^2+4x^2y+xy^2$; **f)** $5x^3yz$; **g)** $37x^3/12$; **h)** $6x^3+3x^2/2$; **i)** $\frac{1}{3}ab^2-\frac{9}{2}a^2b$; **j)** $2xy^3+3x^3y$)*

4. Dados $P(x)=2x^5-3x^4+3x^2-5$ y $Q(x)=x^5+6x^4-4x^3-x+7$, hallar (en este cuaderno):

a) P(x)+Q(x)= *(Soluc: $3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-x+2$)*

b) P(x)–Q(x)= *(Soluc: $x^5-9x^4+4x^3+3x^2+x-12$)*

5. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar (en este cuaderno):

a) P(x)+Q(x)+R(x)= *(Soluc: $6x^3+13x^2-5x+11$)*

b) P(x)–Q(x)–R(x)= *(Soluc: $2x^3-x^2+x-5$)*

c) P(x)+3Q(x)–2R(x)= *(Soluc: $10x^3-8x^2-x+22$)*

6. Efectuar (en este cuaderno) los siguientes **productos** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $(-2x^3)\cdot\left(\frac{4}{5}x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)=$ $\left(Soluc: -\frac{4}{5}x^6\right)$

b) $\left(-\frac{5}{7}x^7\right)\cdot\left(\frac{3}{5}x^2\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}x\right)=$ $\left(Soluc: \frac{4}{7}x^{10}\right)$

c) $5x^3\cdot 3x^2y\cdot(-4xz^3)=$ $\left(Soluc: -60x^6yz^3\right)$

d) $-3ab^2\cdot 2ab\cdot(-\frac{2}{3}a^2b)=$ $\left(Soluc: 4a^4b^4\right)$

e) $(3x^4-2x^3+2x^2+5)\cdot 2x^2=$ $\left(Soluc: 6x^6-4x^5+4x^4+10x^2\right)$

f) $(-2x^5+3x^3-2x^2-7x+1)\cdot(-3x^3)=$ $\left(Soluc: 6x^8-9x^6+6x^5+21x^4-3x^3\right)$

g) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}\right)\cdot 12x^2=$ $\left(Soluc: 8x^5-18x^4+\frac{48}{5}x^3-15x^2\right)$

h) $\left(\frac{1}{2}ab^3-a^2+\frac{4}{3}a^2b+2ab\right)\cdot 6a^2b=$ $\left(Soluc: 3a^3b^4-6a^4b+8a^4b^2+12a^3b^2\right)$

7. Extraer el <u>máximo</u> **factor común** posible (en este cuaderno):

a) $4x^2-6x+2x^3=$ $\left(Soluc: 2x(x^2+2x-3)\right)$

b) $12x^4y^2+6x^2y^4-15x^3y=$ $\left(Soluc: 3x^2y(4x^2y+2y^3-5x)\right)$

c) $-3xy-2xy^2-10x^2yz=$ $\left(Soluc: xy(-3-2y-10xz)\right)$

d) $-3x+6x^2+12x^3=$ $\left(Soluc: 3x(4x^2+2x-1)\right)$

e) $2ab^2-4a^3b+8a^4b^3=$ $\left(Soluc: 2ab(b-2a^2+4a^3b^2)\right)$

f) $2x^3+4x^2-8x=$ $\left(Soluc: 2x(x^2+2x-4)\right)$

g) $12x^4+6y^4-5x^3y=$ $\left(Soluc: 12x^4+6y^4-5x^3y\right)$

h) $6x^3y^2-3x^2yz+9xy^3z^2=$ $\left(Soluc: 3xy(2x^2y-xz+3y^2z^2)\right)$

i) $-2x(x-3)^2+4x^2(x-3)=$ $\left(Soluc: 2x(x-3)(x+3)\right)$

j) $2ab^2-a^3+8b^3=$ $\left(Soluc: 2ab^2-a^3+8b^3\right)$

8. Efectuar los siguientes **productos**:

a) $(3x^2+5x-6)\ (8x^2-3x+4)$ *(Soluc: $24x^4+31x^3-51x^2+38x-24$)*

b) $(5x^3-4x^2+x-2)\ (x^3-7x^2+3)$ *(Soluc: $5x^6-39x^5+29x^4+6x^3+2x^2+3x-6$)*

c) $(2x^4-3x^2+5x)\ (3x^5-2x^3+x-2)$ *(Soluc: $6x^9-13x^7+15x^6+8x^5-14x^4-3x^3+11x^2-10x$)*

d) $(ab^2+a^2b+ab)\ (ab-ab^2)$ *(Soluc: $a^3b^2+a^2b^2-a^2b^4-a^3b^3$)*

e) $(-x^6+x^5-2x^3+7)(x^2-x+1)$ *(Soluc: $-x^8+2x^7-2x^6-x^5+2x^4-2x^3+7x^2-7x+7$)*

f) $(x^2y^2-2xy)(2xy+4)$ *(Soluc: $2x^3y^3-8xy$)*

g) $10(x-5+y-5)+(10-x)(10-y)$ *(Soluc: xy)*

h) $(x^2-4x+3/2)(x+2)$ *(Soluc: $x^3-2x^2-13x/2+3$)*

i) $(x^2+5x/2+35/3)(x-6)$ *(Soluc: $x^3-7x^2/2-10x/3-70$)*

j) $(2x^2+4x+2)(x-1/2)$ *(Soluc: $2x^3+3x^2-1$)*

TIPO EXAMEN **9.** Efectuar las siguientes **operaciones combinadas**:

a) $(2x^2+x+3/2)(2x^2-3)+8x+7/2$ *(Soluc: $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1$)*

b) $(3x^3+5x^2/2-3x+13)(2x^2+2)-(-6x+24)$ *(Soluc: $6x^5+5x^4+31x^2+2$)*

c) $(3x^2-6x+1)(x^3-2x/3+2)+14x/3$ *(Soluc: $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2$)*

d) $-x/3+1/3+(2x^2-x/3-2/3)(3x^2+2)$ *(Soluc: $6x^4-x^3+2x^2-x-1$)*

10. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) $[R(x)]^2$ TIPO EXAMEN **b)** $P(x)-Q(x)\cdot R(x)$ **c)** $P(x)\cdot[Q(x)+R(x)]$ **d)** $P(x)\cdot Q(x)\cdot R(x)$

e) $Q(x)\cdot[P(x)-R(x)]$ TIPO EXAMEN **f)** $P(x)-Q(x)\cdot Q(x)$ **g)** $-Q(x)+P(x)\cdot 2Q(x)$

*(Soluc: **a)** $49x^4-28x^3+18x^2-4x+1$; **b)** $-14x^5+4x^4+9x^3-45x^2+13x-4$; **c)** $8x^6+40x^5+26x^4+6x^3+75x^2-25x+24$; **d)** $56x^8+68x^7-72x^6+224x^5+244x^4-179x^3+225x^2-59x+21$; **e)** $8x^6-2x^5-4x^4+33x^3-7x^2-2x+14$; **f)** $-4x^6+4x^4-24x^3+5x^2+12x-46$; **g)** $16x^6+24x^5-16x^4+54x^3+88x^2-33x+35$)*

Identidades notables:

11. Desarrollar, aplicando cuando proceda las **igualdades notables**:

a) $(x+2)^2$

b) $(x-3)^2$

c) $(x+2)(x-2)$

d) $(3x+2)^2$

e) $(2x-3)^2$

f) $(5x+4)(5x-4)$

g) $(x^2+5)^2$

h) $(-2x+5)(2x+5)$

i) $(x^3-2)^2$

j) $(x^2-1)(x^2+1)$

k) $(2x^2+3x)^2$

l) $(2x^2-3)^2$

m) $(-x-3)^2$

n) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

o) $\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2$

p) $(-x^2+3)^2$

TIPO EXAMEN **q)** $\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)$

r) $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$

s) $\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right)^2$

t) $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3}+2\right)$

u) $\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2$

v) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)$

w) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2$

TIPO EXAMEN **x)** $\left(24-\frac{7}{4}x\right)^2$

y) $(5x-4x)^2$

z) $(3a^2b^3-2a^2b^3)^2$

α) $(7+13)^2$

β) 137^2-136^2

*(Soluc: **n)** $x^2+x+\frac{1}{4}$; **o)** $4a^2-6a+\frac{9}{4}$; **q)** $1-\frac{x^2}{4}$; **r)** $4x^2+3x+\frac{9}{16}$; **s)** $\frac{9}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{x^2}{16}$; **t)** $4-\frac{a^2}{9}$; **u)** $\frac{9}{4}x^2-3+\frac{1}{x^2}$; **v)** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{9}$; **w)** $\frac{9}{4}x^2+\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}$; **x)** $576-84x+\frac{49}{16}x^2$; **y)** x^2; **z)** a^4b^6; **α)** 400; **β)** 273)*

12. Operar y simplificar:

a) $(x+1)^2+(x-2)(x+2)$

b) $(3x-1)^2-(2x+5)(2x-5)$

c) $(2x+3)(-3+2x)-(x+1)^2$

TIPO EXAMEN **d)** $(-x+2)^2-(2x+1)^2-(x+1)(x-1)$

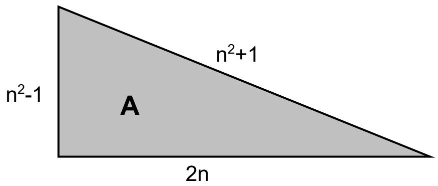
e) $-3x+x(2x-5)(2x+5)-(1-x^2)^2$

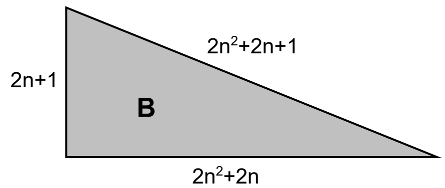
f) $(3x-1)^2-(-5x^2-3x)^2-(-x+2x^2)(2x^2+x)$

g) $(3x+2)^2-(3x-2)^2+(3x+2)(3x-2)$

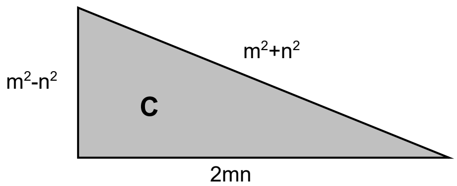
*(Soluc: **a)** $2x^2+2x-3$; **b)** $5x^2-6x+26$; **c)** $3x^2-2x-10$; **d)** $-4x^2-8x+4$; **e)** $-x^4+4x^3+2x^2-28x-1$; **f)** $-29x^4-30x^3+x^2-6x+1$; **g)** $9x^2+24x+4$)*

13. El matemático griego Pitágoras (siglo VI a.C) conocía las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, llamadas **ternas pitagóricas**, sin más que dar valores a $n \in \mathbb{N}$:



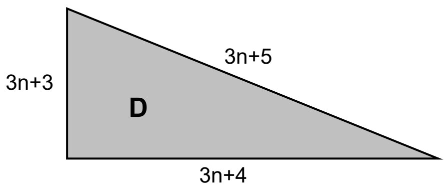


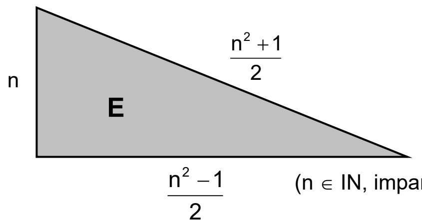
Por su parte, Euclides (s. III a.C.) conocía la siguiente fórmula general, que engloba a las dos anteriores:



$(m,n \in \mathbb{N},\ m>n)$

Finalmente, he aquí otras dos ternas pitagóricas de autor desconocido:





$(n \in \mathbb{N},\ \text{impar})$

Demostrar la veracidad de estas fórmulas. Generar algunos casos concretos.

CURIOSIDAD MATEMÁTICA:

14. Demostrar que $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

15. **a)** Probar que la diferencia entre los cuadrados de dos enteros pares consecutivos es siempre el cuádruple de un impar. Comprobarlo con ejemplos.

b) Probar que el cuadrado de todo número impar es impar *(Ayuda: un número impar puede ser expresado como 2n+1)*

c) Probar que el cuadrado de todo número par es par *(Ayuda: un número par puede ser expresado como 2n+2)*

Potencia de un binomio:

16. Desarrollar, aplicando el **triángulo de Tartaglia**:

a) $(x+2)^4$
b) $(x^2+3)^6$
c) $(2x^2+3y)^6$
d) $(2x^3+5)^5$
e) $(2x^4+5x)^5$
f) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$
g) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^5$
h) $(a-b)^5$
i) $(x-3)^3$
j) $(3x-2)^4$
TIPO EXAMEN **k)** $(x^2-3x)^5$
l) $(3x-2y)^6$
m) $(2x^2-4)^4$
n) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$
o) $(2-3x^2)^5$
p) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^4$
q) $(2x-3)^6$
r) $\left(\frac{x}{2}-3\right)^6$
s) $(-x-1)^4$
t) $(2x-1)^5$
u) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$
v) $\left(\frac{x}{3}-3\right)^5$
w) $\left(x^2+2x\right)^5$
x) $\left(3x^2-1\right)^4$
y) $\left(x-\frac{y}{x}\right)^3$
z) $\left(\frac{1}{x}-xy\right)^3$

*(Sol: **a)** $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$; **b)** $x^{12}+18x^{10}+135x^8+540x^6+1215x^4+1458x^2+729$;
c) $64x^{12}+576x^{10}y+2160x^8y^2+4320x^6y^3+4860x^4y^4+2916x^2y^5+729y^6$; **d)** $32x^{15}+400x^{12}+2000x^9+5000x^6+6250x^3+3125$;
e) $32x^{20}+400x^{17}+2000x^{14}+5000x^{11}+6250x^8+3125x^5$; **f)** $x^4+4x^2+6+4/x^2+1/x^4$; **g)** $x^5+5x^4/2+5x^3/2+5x^2/4+5x/16+1/32$;
h) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$; **i)** $x^3-9x^2+27x-27$; **j)** $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$;
k) $x^{10}-15x^9+90x^8-270x^7+405x^6-243x^5$; **l)** $729x^6-2916x^5y+4860x^4y^2-4320x^3y^3+2160x^2y^4-576xy^5+64y^6$;
m) $16x^8-128x^6+384x^4-512x^2+256$; **n)** $x^5-5x^4/2+5x^3/2-5x^2/4+5x/16-1/32$; **o)** $32-240x^2+720x^4-1080x^6+810x^8-243x^{10}$;
p) $16x^4-32x^3/3+8x^2/3-8x/27+1/81$; **q)** $64x^6-576x^5+2160x^4-4320x^3+4860x^2-2916x+729$;
r) $x^6/64-9x^5/16+135x^4/16-135x^3/2+1215x^2/4-729x+729$; **t)** $32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$; **u)** $x^4-4x^2+6-4/x^2+1/x^4$;
w) $x^{10}+10x^9+40x^8+80x^7+80x^6+32x^5$; **x)** $81x^8-108x^6+54x^4-12x^2+1$; **y)** $x^3-3xy+3y^2/x-y^3/x^3$; **z)** $1/x^3-3y/x+3xy^2-x^3y^3$)*

Cociente de polinomios:

17. Efectuar (en este cuaderno) los siguientes **cocientes** en los que intervienen **monomios**, dando el resultado simplificado:

a) $\frac{4x^3}{2x^2}=$
b) $8x^4:\left(-2x^2\right)=$
c) $\frac{7x^5}{2x^3}=$
d) $-8x^3:\left(2x^2\right)=$
e) $-8x^3:2x^2=$
f) $\frac{-3x^7}{-9x^4}=$
g) $6x^3y^4:\left(2x^2y\right)=$
h) $\frac{\frac{2}{3}x^2y^2z}{\frac{3}{2}xy^2}=$

i) $\dfrac{-9a^4b^3c^2}{3ab^2c}=$

j) $\dfrac{6x^5-9x^2+3x}{3x}=$

k) $\dfrac{-12x^4+6x^3-4x^2}{-2x^2}=$

l) $\dfrac{-6x^8-7x^4-\frac{3}{4}x^3}{-\frac{5}{3}x^3}=$

m) $\dfrac{-8x^9+\frac{3}{2}x^5-x^4}{-\frac{3}{7}x^4}=$

n) $(-18x^3yz^3):(6xyz^3)=$

o) $\dfrac{-3a(a^3b)+5a^4b}{-a^2b}=$

p) $\dfrac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y}=$

*(Sol: **d)** $-4x$; **e)** $-4x^5$; **j)** $2x^4-3x+1$; **k)** $6x^2-3x+2$; **l)** $18x^5/5+21x/5+9/20$; **m)** $56x^5/3-7x/2+7/3$; **n)** $-3x^2$; **o)** $-2a^2$; **p)** $3x^2y^2/2$)*

18. Efectuar los siguientes **cocientes**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado de los sombreados mediante la regla D=d·C+R:

1. $x^4-x^3+7x^2+x+15 \;\big|\underline{\;x^2+2\;}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-x+5$; $R(x)=3x+5$)*

2. $2x^5-x^3+2x^2-3x-3 \;\big|\underline{\;2x^2-3\;}$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x+1$; División exacta)*

RECORDAR: «Se dice que **P(x) es divisible por Q(x)**, o que **P(x) es múltiplo de Q(x)**, o que **Q(x) es divisor** o factor **de P(x)** si **la división de P(x) entre Q(x) es exacta**, es decir, da resto cero»

3. $6x^4-10x^3+x^2+11x-6 \;\big|\underline{\;2x^2-4x+3\;}$ *(Soluc: $C(x)=3x^2+x-2$; División exacta)*

4. $x^3+2x^2+x-1 \;\big|\underline{\;x^2-1\;}$ *(Soluc: $C(x)=x+2$; $R(x)=2x+1$)*

5. $8x^5-16x^4+20x^3-11x^2+3x+2 \;\big|\underline{\;2x^2-3x+2\;}$ *(Soluc: $C(x)=4x^3-2x^2+3x+1$; División exacta)*

6. $x^4+3x^3-2x+5 \;\big|\underline{\;x^3+2\;}$ *(Soluc: $C(x)=x+3$; $R(x)=-4x-1$)*

7. $x^5-2x^4+3x^2-6 \;\big|\underline{\;x^4+1\;}$ *(Soluc: $C(x)=x-2$; $R(x)=3x^2-x-4$)*

8. $x^2 \;\big|\underline{\;x^2+1\;}$ *(Soluc: $C(x)=1$; $R(x)= -1$)*

9. $3x^6+2x^4-3x^2+5 \;\big|\underline{\;x^3-2x+4\;}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+8x-12$; $R(x)=13x^2-56x+53$)*

10. $x^8 \;\big|\underline{\;x^2+1\;}$ *(Soluc: $C(x)=x^6-x^4+x^2-1$; $R(x)=1$)*

11. $x^3-4x^2+5x-8 \;\big|\underline{\;x-2\;}$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*

12. $x^2+1 \;\big|\underline{\;x^2-4x+13\;}$ *(Soluc: $C(x)=1$; $R(x)= 4x-12$)*

13. $2x^5+3x^2-6 \;\big|\underline{\;x+3\;}$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R(x)= -465$)*

14. $6x^2-5 \;\big|\underline{\;3x\;}$ *(Soluc: $C(x)=2x$; $R(x)= -5$)*

15. $x^4-7x^3+8x^2-2 \;\big|\underline{\;x-1\;}$ *(Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)*

16. $2x-1 \;\big|\underline{\;2\;}$ *(Soluc: $C(x)=x$; $R(x)= -1$)*

17. $3x^5-x^4+8x^2-5x-2 \;\big|\underline{\;x^2-x+1\;}$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2-x+5$; $R(x)=x-7$)*

18. $4x+1 \;\big|\underline{\;2x\;}$ *(Soluc: $C(x)=2$; $R(x)= 1$)*

19. $5x^4-2x^3+x-7 \;\big|\underline{\;x^2-1\;}$ *(Soluc: $C(x)=5x^2-2x+5$; $R(x)=-x-2$)*

20. $1+x \;\big|\underline{\;1-x\;}$ *(Soluc: $C(x)= -1$; $R(x)= 2$)*

21. $4x^5-3x^3+5x^2-7 \,\lfloor\, 2x^2-3x+5$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+3x^2-2x-8$; $R(x)=-14x+33$)*

22. $9x^3+3x^2-7x+2 \,\lfloor\, 3x^2+5$ *(Soluc: $C(x)=3x+1$; $R(x)=-22x-3$)*

23. $4x^3 \,\lfloor\, x^2+2x-1$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+3x^2-2x-8$; $R(x)=-14x+33$)*

24. $4x^4-3x^2+5x-7 \,\lfloor\, 2x^2+x-3$ *(Soluc: $C(x)=2x^2-x+2$; $R(x)=-1$)*

25. $4x^5+3x^3-2x^2+5 \,\lfloor\, 2x^2-x+3$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+x^2-x-3$; $R(x)=14$)*

26. $6x^4+5x^2-3x+8 \,\lfloor\, 3x^3-2x-3$ *(Soluc: $C(x)=2x$; $R(x)=9x^2+3x+8$)*

27. $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1 \,\lfloor\, 2x^2-3$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x+3/2$; $R(x)=8x+7/2$)*

28. $8x^4+3x^3+2x-2 \,\lfloor\, 4x^2+x-3$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/4+23/16$; $R(x)=21x/16+37/16$)*

29. $2x^5-x^3+3x-9 \,\lfloor\, 2x^2-x+2$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x^2/2-5x/4-9/8$; $R(x)=35x/8-27/4$)*

30. $x^6 \,\lfloor\, x^4+1$ *(Soluc: $C(x)=x^2$; $R(x)= x^2$)*

31. $6x^3-3x^2+2x-5 \,\lfloor\, 3x-2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/3+8/9$; $R(x)=-29/9$)*

32. $4x^4-x^3+x+5 \,\lfloor\, 2x^2-x+3$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/2-11/4$; $R(x)=-13x/4+53/4$)*

33. $6x^4+3x^3-5x^2+x-8 \,\lfloor\, 3x^2-5x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+13x/3+38/9$; $R(x)=121x/9-148/9$)*

34. $8x^4-3x^2+7x-5 \,\lfloor\, 4x^2-3x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+3x/2-5/8$; $R(x)=17x/8-15/4$)*

35. $6x^5+5x^4+31x^2+2 \,\lfloor\, 2x^2+2$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+5x^2/2-3x+13$; $R(x)=6x-24$)*

36. $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2 \,\lfloor\, 3x^2-6x+1$ *(Soluc: $C(x)=x^3-2x/3+2$; $R(x)=14x/3$)*

37. $6x^4-x^3+2x^2-x-1 \,\lfloor\, 3x^2+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2-x/3-2/3$; $R(x)=-x/3+1/3$)*

38. $4x^4 \,\lfloor\, 2x^2-1$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+1$; $R(x)=1$)*

39. $4x^4+x^3-x+1 \,\lfloor\, 2x^2-1$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/2+1$; $R(x)=-x/2+2$)*

40. $8x^5+8x^4+2x^3-1 \,\lfloor\, 4x^2+4x$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+x/2-1/2$; $R(x)=2x-1$)*

41. $4x^5-3x^3-2x^2-x+2 \,\lfloor\, 2x^2-2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-x/2-1$; $R(x)=0$)*

(✶) **42.** $3x^4-5x^3y+6x^2y^2-5xy^3+y^4 \,\lfloor\, x-y$ *(Soluc: $C(x,y)=3x^3-2x^2y+4xy^2-y^3$; $R(x,y)=0$)*

(✶) **43.** $a^3-b^3 \,\lfloor\, a-b$ *(Soluc: $C(a,b)=a^2+ab+b^2$; $R(a,b)=0$)*

(✶) **44.** $x^5y-2x^4y^2+4x^3y^3-4x^2y^4+3xy^5-y^6 \,\lfloor\, x^2y-xy^2+y^3$ *(Soluc: $C(x,y)=x^3-x^2y+2xy^2-y^3$; $R(x,y)=0$)*

(✶) **45.** $3a^3+a^2b-5ab^2+2b^3 \,\lfloor\, 3a-2b$ *(Soluc: $C(a,b)=a^2+ab-b^2$; $R(a,b)=0$)*

(✶) **46.** $p^2-q^2+5 \,\lfloor\, p-q$ *(Soluc: $C(p,q)=p+q$; $R(p,q)=5$)*

19. Inventar una división de polinomios cuyo cociente sea $C(x)=x^2-3x+1$, el resto sea $R(x)=x-1$ y el dividendo un polinomio de 4º grado.

Regla de Ruffini:

20. Efectuar las siguientes divisiones mediante la **regla de Ruffini**[1], indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar las sombreadas:

1. $x^4-7x^3+8x^2-2 \; | \; x-1$ *(Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)*
2. $x^3-4x^2+5x-8 \; | \; x-2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*
3. $2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \; | \; x-2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+7x^2+10x+21$; $R=24$)*
4. $2x^5+3x^2-6 \; | \; x+3$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R=-465$)*
5. $3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \; | \; x-4$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2+7x+8$; $R=37$)*
6. $2x^4-10x+8 \; | \; x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-4x^2+8x-26$; $R=60$)*
7. $10x^3-15 \; | \; x+5$ *(Soluc: $C(x)=10x^2-50x+250$; $R=-1265$)*
8. $x^3-2x^2-13x/2+3 \; | \; x+2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+3/2$; División exacta)*
9. $x^3-2x^2-3x \; | \; x+2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+5$; $R=-10$)*

TIPO EXAMEN

10. $x^3-7x^2/2-10x/3-70 \; | \; x-6$ *(Soluc: $C(x)=x^2+5x/2+35/3$; División exacta)*
11. $x^3-2x^2 \; | \; x+2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-4x+8$; $R=-16$)*
12. $x^4-2x^3/3+x^2/2+3x+1 \; | \; x+3$ $\left(Soluc: C(x)=x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{63}{2};\ R(x)=\frac{191}{2}\right)$
13. $x^3+2x^2+3x+1 \; | \; x-1$ *(Soluc: $C(x)=x^2+3x+6$; $R=7$)*
14. $x^4-2x^3+x^2+3x+1 \; | \; x-2$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x+5$; $R=11$)*
15. $x^3+a^3 \; | \; x+a$ *(Soluc: $C(x)=x^2-ax+a^2$; $R=0$)*
16. $x^3+x^2+x+1 \; | \; x+1$ *(Soluc: $C(x)=x^2+1$; División exacta)*
17. $x^3-a^3 \; | \; x-a$ *(Soluc: $C(x)=x^2+ax+a^2$; $R=0$)*
18. $2x^4+x^3-2x^2-1 \; | \; x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-3x^2+4x-8$; $R=15$)*
19. $2x^4 \; | \; x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-4x^2+8x-16$; $R=32$)*
20. $2x^4-7x^3+4x^2-5x+6 \; | \; x-3$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-x^2+x-2$; División exacta)*
21. $x^3+2x^2+3x \; | \; x-1$ *(Soluc: $C(x)=x^2+3x+6$; $R=6$)*
22. $x^5+1 \; | \; x-1$ *(Soluc: $C(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$; $R=2$)*
23. $2x^3+3x^2-1 \; | \; x-1/2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+4x+2$; División exacta)*
24. $x^3-5x^2+3x \; | \; x$ *(Soluc: $C(x)=x^2-5x+3$; División exacta)*
25. $3x^3+2x^2+2x-1 \; | \; x-1/3$ *(Soluc: $C(x)=3x^2+3x+3$; División exacta)*
26. $x^4+x^3-x^2+x-1 \; | \; x+2$ *(Soluc: $C(x)=x^3-x^2+x-1$; $R=1$)*

[1] Ideada por el matemático italiano *Amadeo Ruffini* (1765-1822).

27. $2x^3-x^2-x-3 \;|\underline{2x-3}$ *(Soluc: C(x)=x^2+x+1; División exacta)*

(Ayuda: Dividir entre 2 ambos términos)

28. $ax^3-3a^2x^2+2a^3x+1 \;|\underline{x-a}$ *(Soluc: C(x)=ax^2-2a^2x; R=1)*

29. $x^3-x^2+x \;|\underline{x^2-x}$

21. Resolver las siguientes ecuaciones de 2º grado por Ruffini:

a) $x^2-6x+8=0$ *(Soluc: $x_1=2$, $x_2=4$)*

b) $x^2-2x-3=0$ *(Soluc: $x_1=-1$, $x_2=3$)*

c) $3x^2-10x+7=0$ *(Soluc: $x_1=1$, $x_2=7/3$)*

d) $x^2-4x+4=0$ *(Soluc: x=2 doble)*

e) $2x^2+8x+6=0$ *(Soluc: $x_1=-1$, $x_2=-3$)*

f) $x^2+6x=-9$ *(Soluc: x=−3 doble)*

g) ¿Qué ocurre si queremos resolver por Ruffini, por ejemplo, $x^2-4x+21=0$? ¿Y $12x^2-17x-5=0$? ¿Por qué no es recomendable Ruffini para resolver ecuaciones de 2º grado?

Teorema del resto:

RECORDAR:

TEOREMA DEL RESTO: "El resto de la división de P(x) por x−a coincide con el valor numérico P(a)"

Ejemplo: Al efectuar la división de $P(x)=x^2+x-2$ entre $x-1$ se obtiene resto cero, como cabía esperar, puesto que $P(1)=0$

Utilidad: El th. del resto permite predecir, **sin necesidad de efectuar la división**, si se trata de una división exacta.

22. Comprobar el **teorema del resto** mediante las primeras divisiones del ejercicio 20.

23. Dado $P(x)=2x^2-x-3$, comprobar si es divisible por x+1 o por x−2 mediante el teorema del resto. Comprobar a continuación efectuando la división ¿Cuál es el otro factor por el que es divisible? ¿Puede tener más factores? ¿Por qué? *(Soluc: SÍ; NO; 2x−3; NO)*

24. Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de **a** para que el resto de la división $x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7 \;|\underline{x-3}$ sea −1; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división. *(Soluc: a=−21)*

25. Averiguar, sin efectuar la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

a) $x^3-3x^2+2x-10 \;|\underline{x-4}$ *(Soluc: NO)*

b) $x^3-x^2+x+14 \;|\underline{x+2}$ *(Soluc: SÍ)*

c) $x^6-1 \;|\underline{x-1}$ *(Soluc: SÍ)*

d) $x^5-3x^3+2x \;|\underline{x-4}$ *(Soluc: NO)*

TIPO EXAMEN **26.** Hallar, de dos formas distintas, el valor de **m** en cada caso para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $x^3+8x^2+4x+m \;|\underline{x+4}$ *(Soluc: m=−48)*

b) $2x^3-10x^2+mx+25 \;|\underline{x-5}$ *(Soluc: m=−5)*

c) $2x^4+mx^3-4x^2+40 \,\underline{|x-2}$ *(Soluc: m=−7)*

d) $mx^2-3x-744 \,\underline{|x-8}$ *(Soluc: m=12)*

e) $x^2+4x-m \,\underline{|x+3}$ *(Soluc: m=−3)*

f) $x^3-5x^2+m \,\underline{|x-1}$ *(Soluc: m=4)*

g) $5x^4+2x^2+mx+1 \,\underline{|x-3}$ *(Soluc: m=−424/3)*

h) $x^5-4x^3+mx^2-10 \,\underline{|x+1}$ *(Soluc: m=7)*

Teorema del factor:

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x−a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x−a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como $P(1)=0$, podemos asegurar que P(x) es divisible por $x-1$

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

(Nótese que el th. del factor es a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica)

27. Comprobar, sin efectuar la división, que $x^{99}+1 \,\underline{|x+1}$ es exacta. *(Soluc: Al hacer P(−1), sale 0)*

28. Comprobar que x^2-2x-3 es divisible por $x-3$ sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? *(Soluc: P(x)=(x−3)(x+1))*

29. Estudiar si $P(x)=x^2+x-2$ es divisible por $x+2$ y/o por $x-3$, sin efectuar la división. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división. ¿Por qué otro factor es divisible? *(Soluc: divisible por x+2 pero no por x−3)*

30. Estudiar si $P(x)=x^5-32$ es divisible por $x-2$ sin efectuar la división (Comprobar el resultado obtenido haciendo la división). *(Soluc: Sí es divisible)*

31. Sin necesidad de efectuar la división, ¿podemos asegurar que el polinomio $P(x)=x^{50}+x^{25}-x-1$ es divisible por $x-1$? ¿Por qué?

32. **a)** Sin efectuar la división, estudiar **razonadamente** si $P(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}$ es divisible por $x-1$. Comprobar a continuación el resultado haciendo la división **por Ruffini**. *(Soluc: Sí es divisible)*

b) Ídem para $P(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{1}{2}$ y $x+1$. *(Soluc: NO es divisible)*

33. **TEORÍA:** Razonar, mediante ejemplos, que el teorema del factor viene a ser a la división polinómica lo que los criterios de divisibilidad eran a la división numérica

Factorización de polinomios de cualquier grado por Ruffini:

34. Dados los siguientes polinomios cuadráticos se pide:

i) Obtener sus raíces y comprobarlas.

ii) A partir de las raíces anteriores, factorizarlos.

iii) Comprobar dicha factorización.

a) x^2-5x+6 **b)** x^2-2x-8 **c)** x^2-6x+9 **d)** $4x^2+23x-6$ **e)** x^2+x+1 **f)** $6x^2-7x+2$

35. Dados los siguientes polinomios se pide: **i)** Obtener sus raíces por Ruffini. **ii)** Comprobar dichas raíces sustituyéndolas en P(x) **iii)** Factorizar P(x) a partir de sus raíces y comprobar dicha factorización:

a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ *(Soluc: x=-1,2,3)*

b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$ *(Soluc: x=1doble,−3)*

c) $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$ *(Soluc: x=−1,2,3,4)*

d) $P(x)=x^4-2x^2+1$ *(Soluc: x=−1doble, 1doble)*

e) $P(x)=6x^4+x^3-25x^2-4x+4$ *(Soluc: x=±2,−1/2,1/3)*

36. Sabiendo que una de sus raíces es x=1/2, factorizar $P(x)=2x^4-3x^3+3x^2-3x+1$

37. Dadas las siguientes ecuaciones polinómicas se pide:

i) Resolverlas por Ruffini.

ii) Comprobar las sombreadas.

iii) A partir de sus raíces, factorizar el polinomio (y comprobar en el caso de las sombreadas).

1. $x^3-6x^2+11x-6=0$ *(Soluc: x=1,2,3)*

2. $x^3+x^2-9x-9=0$ *(Soluc: x=−1,−3,3)*

3. $x^4-2x^3-17x^2+18x+72=0$ *(Soluc: x=−2, ±3, 4)*

4. $x^4-x^3-13x^2+25x-12=0$ *(Soluc: x=−4, 1 doble, 3)*

5. $x^4-x^3+2x^2+4x-8=0$ *(Soluc: carece de raíces $\in \mathbb{Q}$)*

6. $3x^3+x^2-8x+4=0$ *(Soluc: x=−2,1,2/3)*

7. $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$ *(Soluc: x=±1,±2,3)*

8. $x^4-5x^2+4=0$ *(Soluc: x=±1,±2) (También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

9. $x^4+2x^3-5x^2-6x=0$ *(Soluc: x=−3,−1,0,2)*

10. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ *(Soluc: x=1, ±2, -3)*

11. $x^3-5x^2-5x-6=0$ *(Soluc: x=6)*

12. $x^3+2x^2-2x-4=0$ *(Soluc: x=−2, ±√2)*

13. $x^5-2x^4-x+2=0$ *(Soluc: x=±1,2)*

14. $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$ *(Soluc: x=0,1,2,3)*

15. $6x^4+11x^3-28x^2-15x+18=0$ *(Soluc: x=−1,−3,2/3,3/2)*

16. $\frac{3-x}{2}=\frac{1}{x^2}$ *(Soluc: x=1, 1±√3)*

17. $x^3+3x^2-10x-24=0$ *(Soluc: x=−4,−2,3)*

18. $x^3+2x^2-15x-36=0$ *(Soluc: x=−3 doble,4)*

19. $\frac{x^2-8x-13}{10}=-\frac{14}{x}$ *(Soluc: x=−4,5,7)*

20. $x^3-3x^2+3x-1=0$ *(Soluc: x=1 triple)*

21. $x^3-8=0$ *(Soluc: x=2)*

22. $\frac{x+\sqrt{2}}{x}=\frac{x^2}{x-\sqrt{2}}$ *(Soluc: x=−1)*

23. $x^4-8x^3+24x^2-32x+16=0$ *(Soluc: x=2 cuádruple)*

38. Dados los siguientes polinomios, se pide:

i) Obtener sus raíces reales por Ruffini.

ii) Comprobar dichas raíces en el caso de los sombreados.

iii) Factorizar P(x) a partir de sus raíces (y comprobar dicha factorización en los sombreados).

1. $P(x)=x^4+4x^3+7x^2+8x+4$ *(Soluc: x=–2,–1)*

2. $P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$ *(Soluc: x=–2,1/2,1/3)*

3. $P(x)=x^4-x^3+2x^2-4x-8$ *(Soluc: x=–1,2)*

4. $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ *(Soluc: x=2,3, ±1)*

5. $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$ *(Soluc: x=1,2)*

6. $P(x)=x^4-5x^2+4$ *(También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

7. $P(x)=x^4-5x^2-36$ *(También se puede hacer por ecuación bicuadrada)*

8. $P(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3$ *(Soluc: x=–1,3)*

9. $P(x)=x^4-6x^2+7x-6$ *(Soluc: x=2,–3)*

10. $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$ *(Soluc: x=–1 doble,2,3)*

11. $P(x)=12x^4-25x^3+25x-12$ *(Soluc: x=±1,4/3,3/4)*

12. $P(x)=2x^4-x^3+6x^2-7x$ *(Soluc: x=0, 1)*

13. $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ *(Soluc: x=–1,2)*

14. $P(x)=x^5-x^3-x^2+1$ *(Soluc: x=±1)*

15. $P(x)=x^4-2x^3-7x^2+5x-6$ *(Soluc: carece de raíces $\in \mathbb{Q}$)*

16. $P(x)=3x^4-9x^3-6x^2+36x-24$ *(Soluc: x=1,2 doble,–2)*

17. $P(x)=6x^4+11x^3-13x^2-16x+12$ *(Soluc: x=1, –2, 2/3, –3/2)*

18. $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$ *(Soluc: x=±1,–3 doble)*

19. $P(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$ *(Soluc: x=–1, 2, 3, 4)*

CONSECUENCIA:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: "Un polinomio de grado *n* tiene <u>a lo sumo</u> *n* raíces reales"

39. a) Comprobar que $x^4+4x^3+8x^2+7x+4$ no tiene raíces $\in \mathbb{Z}$. Factorizarlo sabiendo que es divisible por x^2+x+1.

b) Ídem con $6x^4+7x^3+6x^2-1$ sabiendo que –1/2 y 1/3 son raíces suyas.

40. Resolver la ecuación $2x^3-3x^2=-\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es 1/2 *(Soluc: x=±1/2, 3/2)*

41. a) Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x+6}=x$ *(Sol: x=2)* **b)** Ídem con $\sqrt[3]{x+6}=-x$ *(Sol: x=1)*

42. ¿Serías capaz de resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x}-1$? Aunque es un poco complicada para este curso, puedes resolverla con los conocimientos ya adquiridos: tendrás que aplicar Tartaglia y Ruffini… *(Sol: x=1)*

43. Resolver: **a)** $\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}\\ y-x^2=1\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=2)* **b)** $\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}\\ y=\sqrt{x^3}\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1; y=1)*

44. **TEORÍA:** ¿En qué consiste factorizar un P(x)? Poner un ejemplo sencillo de grado 3.

45. Inventar una ecuación polinómica que tenga únicamente por soluciones x=−2, x=1 y x=3

46. Inventar, de dos formas distintas, una ecuación polinómica que tenga únicamente como raíces 1 y 2

47. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: P(−1)=P(2)=P(−3)=0 y P(−2)=18

48. Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. *(Soluc: 1 raíz)*

49. Demostrar de dos formas (por Ruffini u operando directamente) que:

$$x^n-1=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)$$

CURIOSIDAD MATEMÁTICA: REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

El francés René Descartes (1596-1650) encontró un método para predecir el número de raíces de un polinomio ordenado:

« La cantidad de raíces positivas de f(x)=0 es el número de variaciones del signo de los coeficientes de f(x) o disminuido en ese número en una cantidad par, y de raíces negativas es el número de variaciones del signo de los coeficientes de f(-x) o disminuido en ese número en una cantidad par» (es importante insistir en que, para poder aplicar la regla, el polinomio f(x) ha de estar ordenado).

Ejemplos:

$f(x)=x^2+x-12$ tiene un cambio de signo, del 2º al 3er término ⇒ tiene una raíz positiva (sus raíces son −4 y 3)

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$ tiene dos cambios de signo ⇒ tiene dos raíces positivas (raíces −1, 2 y 3)

$f(x)=x^4-5x^2+4$ tiene dos raíces positivas (raíces ±1 y ±2)

$f(x)=x^3+4x^2+3x$ no tiene cambios de signo ⇒ no tiene raíces reales positivas (raíces 0, −1 y −3)

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$, ¿cuántas raíces positivas tiene como máximo?

REPASO IDENTIDADES NOTABLES 4º ESO Acad.

$$\boxed{\begin{array}{l}(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \\ (A+B)(A-B) = A^2 - B^2\end{array}}$$

1. Desarrollar las siguientes expresiones utilizando la identidad notable correspondiente, y simplificar. Obsérvense los primeros ejemplos:

1) $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = \boxed{x^2 + 10x + 25}$

2) $(x-6)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = \boxed{x^2 - 12x + 36}$

3) $(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = \boxed{x^2 - 4}$

4) $(x+2)^2 =$ *(Soluc: x^2+4x+4)*

5) $(x-3)^2 =$ *(Soluc: x^2-6x+9)*

6) $(x+4)(x-4) =$ *(Soluc: x^2-16)*

7) $(x+3)^2 =$ *(Soluc: x^2+6x+9)*

8) $(x-4)^2 =$ *(Soluc: $x^2-8x+16$)*

9) $(x+5)(x-5) =$ *(Soluc: x^2-25)*

10) $(a+4)^2 =$ *(Soluc: $a^2+8a+16$)*

11) $(a-2)^2 =$ *(Soluc: a^2-4a+4)*

12) $(a-3)(a+3) =$ *(Soluc: a^2-9)*

13) $(2x+3)^2 =$ *(Soluc: $4x^2+12x+9$)*

14) $(3x-2)^2 =$ *(Soluc: $9x^2-12x+4$)*

15) $(2x+1)(2x-1) =$ *(Soluc: $4x^2-1$)*

16) $(3x+2)^2 =$ *(Soluc: $9x^2+12x+4$)*

17) $(2x-5)^2 =$ *(Soluc: $4x^2-20x+25$)*

18) $(3x-2)(3x+2)=$ *(Soluc: $9x^2-4$)*

19) $(4b+2)^2=$ *(Soluc: $16b^2+16b+4$)*

20) $(5b-3)^2=$ *(Soluc: $25b^2-30b+9$)*

21) $(b+1)(b-1)=$ *(Soluc: b^2-1)*

22) $(4a+5)^2=$ *(Soluc: $16a^2+40a+25$)*

23) $(5a-2)^2=$ *(Soluc: $25a^2-20a+4$)*

24) $(5a+2)(5a-2)=$ *(Soluc: $25a^2-4$)*

25) $(4y+1)^2=$ *(Soluc: $16y^2+8y+1$)*

26) $(2y-3)^2=$ *(Soluc: $4y^2-12y+9$)*

27) $(2y-3)(2y+3)=$ *(Soluc: $4y^2-9$)*

28) $(3x+4)^2=$ *(Soluc: $9x^2+24x+16$)*

29) $(3x-1)^2=$ *(Soluc: $9x^2-6x+1$)*

30) $(3x+4)(3x-4)=$ *(Soluc: $9x^2-16$)*

31) $(5b+1)^2=$ *(Soluc: $25b^2+10b+1$)*

32) $(2x-4)^2=$ *(Soluc: $4x^2-16x+16$)*

33) $(4x-3)(4x+3)=$ *(Soluc: $16x^2-9$)*

34) $(-3x+2)^2=$ *(Soluc: $9x^2-12x+4$)*

35) $(-2x-5)^2=$ *(Soluc: $4x^2+20x+25$)*

36) $\left(\frac{x}{2}+4\right)^2=$ *(Soluc: $\frac{x^2}{4}+4x+16$)*

37) $\left(\frac{2a}{3}-\frac{1}{2}\right)^2=$ *(Soluc: $\frac{4a^2}{9}-\frac{2a}{3}+\frac{1}{4}$)*

38) $\left(\frac{3}{2}x-2\right)\left(\frac{3}{2}x+2\right)=$

39) $\left(\frac{x}{3}+9\right)^2=$ *(Soluc: $\frac{x^2}{9}+6x+81$)*

40) $\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}\right)^2=$ *(Soluc: $\frac{9}{4}y^2-\frac{3}{4}y+\frac{1}{16}$)*

41) $\left(\frac{3}{4}a+2\right)\left(\frac{3}{4}a-2\right)=$ *(Soluc: $\frac{9}{16}a^2-4$)*

2. **a)** María, una alumna de 4º de ESO, indica lo siguiente en un examen:

$$(x+2)^2=x^2+4$$

Razonar que se trata de un grave error. ¿Cuál sería la expresión correcta?

b) ¿V o F? $(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2$

c) ¿V o F? $(-2x+6)^2=4x^2+36$

3. Desarrollar las siguientes expresiones utilizando la identidad notable correspondiente, y simplificar:

a) $(x-2)^2+(x+3)^2=$

(Soluc: $2x^2+2x+13$)

b) $(x+4)^2-(x-1)^2=$

(Soluc: $10x+15$)

c) $(x+5)(x-5)-(x+5)^2=$

(Soluc: $-10x-50$)

d) $(2x+3)^2-(2x-3)^2+(2x+3)(2x-3)=$

(Soluc: $4x^2+24x-9$)

e) $(2x-5)^2-(2x^2+5x-1)(2x^2-3)=$

(Soluc: $-4x^4-10x^3+12x^2-5x+22$)

f) $(3x-2)^2+(3x+2)(3x-2)=$

(Soluc: $18x^2-12x$)

g) $(4x-5)(4x+5)+(4x-5)^2-(4x+5)^2=$

(Soluc: $16x^2-80x-25$)

h) $\left(x^2-2x\right)^2-\left(x^2-5x+1\right)\left(x^2+2x-3\right)=$

(Soluc: $-x^3+16x^2-17x+3$)

11 EJERCICIOS de FRACCIONES ALGEBRAICAS 4º ESO Acad.

1. Utilizando identidades notables, desarrollar (en este cuaderno) las siguientes expresiones:

a) $(x+2)^2$
b) $(x-2)^2$
c) $(x+2)(x-2)$
d) $(2x+3)^2$
e) $(3x-5)^2$
f) $(3x+2)\,(3x-2)$
g) $(ax+1)^2$
h) $(ax-b)^2$
i) $(3x-2)^2$
j) $(2x+5)\,(2x-5)$
k) $(-1+2x)^2$
l) $(-2-x)^2$
m) $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$
n) $\left(x+\sqrt{2}\right)^2$
o) $(x^2+x+2)^2$

2. **a)** Razonar por qué $(A-B)^2$ y $(B-A)^2$ dan el mismo resultado. **b)** Ídem con $(A+B)^2$ y $(-A-B)^2$

3. Averiguar (en este cuaderno) de qué expresiones notables proceden los siguientes polinomios (Véase el 1^er ejemplo):

a) $x^2+2x+1=\boxed{(x+1)^2}$
b) $x^2-4x+4=$
c) $x^2-1=$
d) $x^2+6x+9=$
e) $x^2-8x+16=$
f) $x^2-4=$
g) $9-x^2=$
h) $x^2+2ax+a^2=$
i) $3x^2+6x+3=$
j) $x^2-a^2=$
k) $a^2x^2-b^2=$
l) $x^2-16=$
m) $x^2+10x+25=$
n) $x^2-2=$
o) $4x^2-9=$
p) $a^2x^2-2ax+1=$
q) $x^4-16=$
r) $4x^2+4x+1=$
s) $x^2-6x+9=$
t) $x^2-25=$
u) $25x^2-16=$
v) $135^2-134^2=$

4. Utilizar **identidades notables y/o extraer factor común** para simplificar las siguientes fracciones algebraicas (Véase el 1^er ejemplo), y comprobar las sombreadas:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\boxed{\dfrac{x-1}{x+1}}$

b) $\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ $\left(Soluc:\ 1+\dfrac{4}{x}\right)$

c) $\dfrac{2x+4}{2x-4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+2}{x-2}\right)$

d) $\dfrac{2x^2-2}{3x^2+6x+3}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x-2}{3x+3}\right)$

e) $\dfrac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+a}{m}\right)$

f) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy}$ $\left(Soluc:\ 1-\dfrac{y}{x}\right)$

g) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+2}{x-2}\right)$

h) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$ TIPO EXAMEN $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{x^3-x^2+x-1}\right)$

i) $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-a}{x+a}\right)$

j) $\dfrac{a^2x^2-1}{a^2x^2+2ax+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{ax-1}{ax+1}\right)$

j) $\dfrac{x^6+a^2x^3y}{x^6-a^4y^2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^3}{x^3-a^2y}\right)$

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x–a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x–a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como $P(1)=0$, podemos asegurar que $P(x)$ es divisible por $x-1$

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

5. Utilizar el **teorema del factor** para simplificar, siempre que sea posible, las siguientes fracciones algebraicas (Consejo: factorizar, siempre que sea necesario, por Ruffini) , y comprobar las sombreadas:

a) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{x+3}\right)$

b) $\dfrac{x-1}{2x^2-3x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{2x-1}\right)$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+3}{x+2}\right)$

d) $\dfrac{x^2-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{5x+9}\right)$

e) $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ $(Soluc:\ irreducible)$

f) $\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ $(Soluc:\ x-1)$

g) $\dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2}{x+2}\right)$

h) $\dfrac{x-3}{x^2+5x+6}$ $(Soluc:\ irreducible)$

i) $\dfrac{x-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{5x+9}\right)$

j) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)$

k) $\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x+3}{x+2}\right)$

l) $\dfrac{x^2+x-a^2-a}{x^2-a^2}$ **TIPO EXAMEN** $\left(Soluc:\ \dfrac{x+a+1}{x+a}\right)$

6. Simplificar, aplicando obligatoria y razonadamente el **teorema del factor**, y comprobar las sombreadas:

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

c) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$ $(Soluc:\ irreducible)$

TIPO EXAMEN **d)** $\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2-x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

e) $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-3}{x+1}\right)$

f) $\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+1}$ $(Soluc:\ irreducible)$

g) $\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-4x^2+x+6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}\right)$

h) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$ $(Soluc:\ x-1)$

i) $\dfrac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

j) $\dfrac{x^3-x^2-10x-8}{x^2+3x-4}$ $(Soluc:\ irreducible)$

k) $\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+4x^2+x-6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-3}{x+3}\right)$

l) $\dfrac{4x^3+7x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{4x-1}{x+1}\right)$

m) $\dfrac{2x^3-x^2-8x+4}{x^3+8}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-2x+4}\right)$

n) $\dfrac{4x^3-2x^2-4x+2}{2x^3-5x^2+4x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x+2}{x-1}\right)$

o) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{2x^3-5x^2+4x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{x-1}\right)$

p) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-3x^2+4x-12}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2-1}{x^2+4}\right)$

q) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{x-1}\right)$

r) $\dfrac{4x^3-8x^2-x+2}{2x^3-x^2-8x+4}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x+1}{x+2}\right)$

s) $\dfrac{x^2-4}{x^3-7x-6}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-2}{x^2-2x-3}\right)$

t) $\dfrac{x^4-5x^2-36}{x^2-9}$ $(Soluc:\ x^2+4)$

u) $\dfrac{x^4+x^2-2}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^3-x^2-2x+2}{x^4+x^2+1}\right)$

v) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-3x-2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

w) $\dfrac{x^3+3x^2-10x-24}{x^3-6x^2-7x+60}$ $(Soluc:\ irreducible)$

x) $\dfrac{x^4+x^2-2}{x^4+x^3-x-4}$ $(Soluc:\ irreducible)$

7. Efectuar las siguientes **sumas y restas** reduciendo previamente a común denominador y dando el resultado simplificado (NOTA: Con un * se indican aquellos casos en los que, al final del proceso de sumas y restas de F.A., se obtiene una expresión que se puede simplificar):

1) $\dfrac{3}{2x+4}+\dfrac{2x}{x^2-4}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{7x-6}{2x^2-8}\right)$

2) $\dfrac{x^2-1}{x^3}-\dfrac{2x}{x^2+7}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{-x^4+6x^2-7}{x^5+7x^3}\right)$

3) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-x-2}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x^2-x-1}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

4) $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{2x^2+8}{x^2-4}\right)$

5) $\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{x+1}{4x-8}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x^2+11x+2}{4x^2-16}\right)$

6) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{4x}{x^2-1}\right)$

7) $1-\dfrac{x}{y}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{y-x}{y}\right)$

8) $x-\dfrac{x^2-1}{x}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{1}{x}\right)$

9) $\dfrac{3x-2}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x-1}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x^2+6x}{x^2-1}\right)$

10) $\dfrac{7x}{6x+12}-\dfrac{x+5}{2x^2-8}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{7x^2-17x-15}{6x^2-24}\right)$

11) $\dfrac{x+3}{x^2+1}+\dfrac{2x}{x-3}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{2x^3+x^2+2x-9}{x^3-3x^2+x-3}\right)$

*** 12)** $\dfrac{x-x^2}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{x^2+2x+1}-\dfrac{1-2x}{1+x}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{3x}{x+1}\right)$

13) $\dfrac{3x}{x^2-1}-\dfrac{x+2}{x+1}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{-x^2+2x+2}{x^2-1}\right)$

TIPO EXAMEN

*** 14)** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{2}{x+1}\right)$

15) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x^2-1}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x^2+x+2}{x^2-1}\right)$

16) $\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}+\dfrac{2x-5y}{x-y}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{2x^2-5y^2-3xy+x+2y}{x^2-y^2}\right)$

17) $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x-z}{xz}\right)$

18) $x+\dfrac{1}{x}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x^2+1}{x}\right)$

19) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$

*** 20)** $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x^2+4x+8}{(x+2)^2(x-2)}+\dfrac{1}{x^2-4}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{1}{x^2+4x+4}\right)$

*** 21)** $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{6x-x^2}{x^2-4}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{1}{x-2}\right)$

*** 22)** $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3x+3}{x^2+x-2}+\dfrac{1}{x+2}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{1}{1-x}\right)$

23) $\dfrac{x-1}{x^2-4}-\dfrac{x-2}{x^2+2x}+\dfrac{1}{x-2}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x^2+5x-4}{x^3-4x}\right)$

*** 24)** $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{12}{x^2-4}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{2x+3}{x+2}\right)$

25) $\dfrac{x-2}{x^2+x-2}-\dfrac{x+1}{x^2-4}+\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$ $\left(\text{Sol}: \dfrac{x^2+x+11}{x^3-x^2-4x+4}\right)$

26) $\dfrac{x^2-x+9}{x^3-9x}+\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{1}{x+3}\right)$

27) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{1-x}{x^2-1}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{5x^2+7x}{x^2-1}\right)$

28) $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x+1}{x-1}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x^4+7x^3-2x^2+5x-3}{x^4-1}\right)$

*** 29)** $\dfrac{3}{2x-4}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{2}{x+2}\right)$

*** 30)** $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{8}{x^2-16}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{1}{x+4}\right)$

31) $\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{2x+1}{x^2-1}+\dfrac{x}{(x+1)^2}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{3x^3+3x^2+3x+1}{x^4+x^3-x^2-x}\right)$

32) $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{1}{x^2-11x+30}+\dfrac{1}{x^2-10x+24}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x-7}{x^3-15x^2+24x-120}\right)$

*** 33)** $\dfrac{x^3-5x^2+16x+9}{x\left(x^2-9\right)}-\dfrac{x+3}{x^2-3x}-\dfrac{1}{x^2-9}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x-3}{x+3}\right)$

34) $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{x+1}{x-1}\right)$

RECORDAR: ¿Cuándo desaparecen los denominadores?

Cuando **tenemos** una igualdad y **dos miembros**, y multiplicamos ambos por una misma cantidad:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}=3 \xrightarrow{\otimes\, x(x-2)} x-2-x=3x(x-2)$$

¿Cuándo NO desaparecen los denominadores?

Cuando tenemos una operación, numérica o algebraica (es decir, **no tenemos dos miembros**):

$$\ldots\ldots=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$$\ldots\ldots=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\boxed{\frac{1}{x(x+1)}}$$

8. Efectuar los siguientes **productos y cocientes**, dando el resultado simplificado:

a) $\dfrac{3x-1}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{2x}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3x-1}{2x^2-6x}\right)$

b) $\dfrac{x+1}{x^2-2}:\dfrac{x^2+2}{x-1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2-1}{x^4-4}\right)$

c) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x+2}}{\dfrac{x+1}{x+3}}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+3}{x+2}\right)$

d) $\dfrac{\dfrac{3x+1}{x^2-4}}{\dfrac{x}{x^2-4x+4}}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3x^2-5x-2}{x^2+2x}\right)$

e) $\dfrac{3x-1}{x^2}\cdot\dfrac{x+1}{x^5}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3x^2+2x-1}{x^7}\right)$

f) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x^2-2}}{\dfrac{x-1}{x^2+2}}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^3+x^2+2x+2}{x^3-x^2-2x+2}\right)$

g) $\left(\dfrac{m^2+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{m^2-1}{2}\right)^2$ $\left(Soluc:\ m^2\right)$

h) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}}$ $(Soluc:\ 1)$

i) $\left(a+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ $\left(Soluc:\ \dfrac{4a^4+4a^2b+b^2}{4a^2}\right)$

j) $\dfrac{\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}}{\dfrac{x-a}{x+a}}$ $\left(Soluc:\ x^2-2ax+a^2\right)$

k) $\dfrac{9\,\dfrac{x+2y}{3}+6z}{3}$ $(Soluc:\ x+2y+2z)$

l) $\dfrac{\dfrac{x}{3}}{x-\dfrac{x}{3}}$ $(Soluc:\ 1/2)$

m) $\dfrac{A}{B}(1-B)+A$ $(Soluc:\ A/B)$

n) $\dfrac{\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}}{\dfrac{5x^2-5x}{2x+6}}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{5x}\right)$

o) $\dfrac{\dfrac{2}{a}-1}{\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{2}}$ $(Soluc:\ a-2)$

p) $\dfrac{\dfrac{y}{1-y}}{\dfrac{y}{1-y}+1}$ $(Soluc:\ y)$

q) $\dfrac{\left(n^2-n\right)\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-1}$ $\left(Soluc:\ -1\right)$

r) $\dfrac{\left(x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ $\left(Soluc:\ 1\right)$

s) $\dfrac{x+2\left(x-2\right)}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3x-4}{x^2-4}\right)$

9. Efectuar las siguientes **operaciones combinadas** con F.A. y simplificar:

a) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{x}\right)$

b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x-2}\,\dfrac{x-1}{x+1}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x^3-2x^2-2x}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

c) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a+b}{a-b}\right)\dfrac{a+b}{ab}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2}{b-a}\right)$

d) $\dfrac{xy}{x^2-y^2}:\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{y}{x-y}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$

e) $\dfrac{2\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{3-x^2}{x^2+1}\right)$

f) $\dfrac{\left(a^3+b^3\right)^2-\left(a^3+b^3\right)^3\cdot 3}{\left(a^3+b^3\right)^3}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1-3a^3-3b^3}{a^3+b^3}\right)$

g) $\dfrac{4x\cdot x^5-\left(2x^2-12\right)\cdot 5x^4}{x^{10}}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{60-6x^2}{x^6}\right)$

10. Demostrar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}$

b) $\dfrac{\left(a+b\right)^2}{4}-\dfrac{\left(a-b\right)^2}{4}=a\cdot b$

c) $\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}+\dfrac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{2}=\left(n+1\right)^2$

d) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$

11. ¿V o F? En caso de ser F, corregir los errores (en este cuaderno):

a) $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{A}{2}+B$

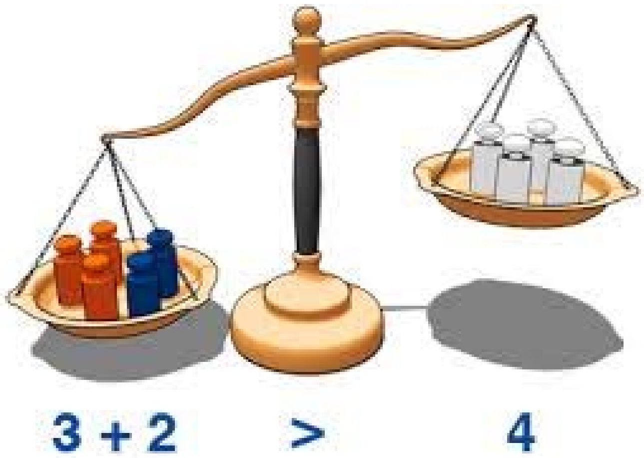
b) $\dfrac{A+BC}{2}=\dfrac{A}{2}+\dfrac{BC}{2}$

c) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

d) $\dfrac{A}{B}-\dfrac{C}{D}=\dfrac{A-C}{B-D}$

INECUACIONES

(2 semanas)



MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES

Def.: **Una desigualdad es una expresión matemática que compara dos valores utilizando uno de los cuatro símbolos posibles**:

$$< \quad > \quad \leq \quad \geq$$

- $<$ menor que
- $>$ mayor que
- $\leq$ menor o igual que
- $\geq$ mayor o igual que

Ejemplo 1: $2<5$ $\leftarrow$ es VERDADERO, ya que en la recta real 2 está a la izquierda de 5

$-2>5$ $\leftarrow$ es ________	$-2>-5$ $\leftarrow$ es ________
$2>-5$ $\leftarrow$ es ________	$2\geq 2$ $\leftarrow$ es ________
$2\geq -5$ $\leftarrow$ es ________	$2>2$ $\leftarrow$ es ________

todos ellos son desigualdades

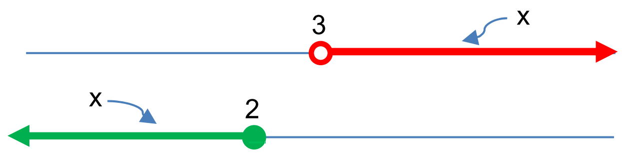
Sin embargo, ¿ $x>3$ o $x\leq 2$ son VERDADEROS o FALSOS?

Ello dependerá del valor particular de **x.** Hay infinitos valores de **x** que verifican cada una de esas expresiones $\Rightarrow$ ambas son **inecuaciones**.

Veámoslo gráficamente en la recta real:

$x>3$ $\rightarrow$

$x\leq 2$ $\rightarrow$



Def.: «**Una inecuación es una desigualdad algebraica, esto es, una desigualdad que contiene a x**».

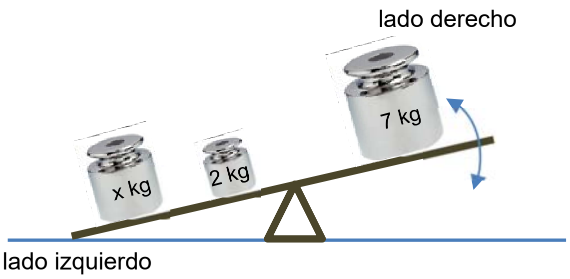
Ejemplo 2: $x+2>7$

«Resolver una inecuación es encontrar todos los valores de la incógnita que verifican la desigualdad»

Notas: 1°) Las inecuaciones generalmente tienen ∞ soluciones, que normalmente se expresan mediante intervalos. Algunas veces hablamos de "conjunto solución".

Ejemplo 2: Comprobar que $x=6$, $x=\sqrt{30}$ y $x=19/3$ son posibles soluciones de la inecuación anterior, mientras que $x=0$, $x=-2/3$ y $x=5$ no lo son.

2°) Una inecuación puede entenderse como una balanza:



$x+2>7$

¿Qué peso(s) hay que poner en el lado izquierdo para mantener el desequilibrio?

La solución obviamente es cualquier valor de x mayor que 5 kg (esto es, $x>5$). Nótese que $x=5$ kg equilibra la balanza, por lo que $x=5$ no es una solución.

Ejercicios: 1, 2 y 3

II) INECUACIONES de 1er GRADO (con una variable)

Para resolver una inecuación lineal debemos convertirla en otra **inecuación equivalente** más simple que tenga la misma solución, utilizando para ello las siguientes dos reglas:

① «**Sumar o restar cualquier número o expresión algebraica a ambos miembros de una inecuación conduce a una inecuación equivalente**».

Comprobación:

$$5<8 \xrightarrow{\oplus 6}$$

$$\Big\downarrow \ominus 3$$

Recordar el símil de la balanza ...

Ejemplo 2: $x+2>7 \xrightarrow{\ominus 2} \boxed{x>5}$

Consecuencia: **1ª regla práctica:** «**LOS TÉRMINOS DE UN MIEMBRO PASAN AL OTRO CAMBIADOS DE SIGNO**». ← *¡Como las ecuaciones!*

Ejemplo 3: $2-x>5-2x$ | $-3\leq -x$

② «**Multiplicar o dividir por un número POSITIVO (¡no una expresión que contenga x!) ambos miembros de una inecuación conduce a una inecuación equivalente**».

¡Cuidado!: A la hora de resolver una inecuación de 1er grado procedemos como con las ecuaciones, pero con la siguiente diferencia:

«**SI MULTIPLICAMOS (O DIVIDIMOS) AMBOS MIEMBROS POR UN NÚMERO NEGATIVO, ENTONCES TENEMOS QUE CAMBIAR EL SENTIDO DE LA DESIGUALDAD**»

Comprobación: $-2>-3 \xRightarrow{\otimes -1}$ Nótese que multiplicar por un número negativo convierte la desigualdad en falsa

Ejemplo 4: $2x>5 \xRightarrow{\otimes 1/2} \boxed{x>5/2}$

Consecuencia: **2ª regla práctica:** «**UN NÚMERO POSITIVO QUE ESTÁ MULTIPLICANDO A UN MIEMBRO DE UNA INECUACIÓN PASA AL OTRO MIEMBRO DIVIDIENDO, Y VICEVERSA. EN EL CASO DE UN NÚMERO NEGATIVO, DEBEMOS TAMBIÉN CAMBIAR EL SENTIDO DE LA DESIGUALDAD**». ← *Esta es la gran diferencia entre las ecuaciones y las inecuaciones*

Ejemplo 5: $3x+1>x+5$

Notas: 1°) Algunas inecuaciones no tienen solución (*v.g.* $x+1>x+2$), mientras que otras tienen cualquier número real como posible solución (*v.g.* $x+2>x+1$).

2°) Cuando manejamos inecuaciones utilizamos los mismos principios básicos que para lasm ecuaciones, excepto la cuestión de multiplicar ambos miembros por un número negativo. Por este motivo, **¡NUNCA PODEMOS MULTIPLICAR (O DIVIDIR) AMBOS MIEMBROS DE UNA**

INECUACIÓN POR UNA EXPRESIÓN QUE CONTENGA LA INCÓGNITA! Ello puede conducir a errores.

3°) Nótese que si intercambiamos ambos miembros de una inecuación, el sentido de la desigualdad debe ser cambiado (Es habitual escribir la variable en el 1er miembro):

$$2 \leq x \Rightarrow x \geq 2$$

Ejercicios: 4 a 7

8 a 12 ← Problemas de planteamiento sobre inecuaciones.

Vocabulario útil:

"al menos" o "no menos de" o "un mínimo de", etc.	$\geq$
"como máximo" o "no más de" o "un máximo de", etc.	$\leq$

III) INECUACIONES de 2° GRADO (con una variable)

Ejemplo 6: $x^2 - 5x + 4 > 0$

Método práctico:

1er paso: Hacer uno de los miembros cero pasando todos los términos al otro ← *cuando sea necesario!*

2° paso: Hallar las 2 raíces de la expresión de 2º grado resultante.

3er paso: A partir de esas dos raíces considerar los tres intervalos que definen en la recta real.

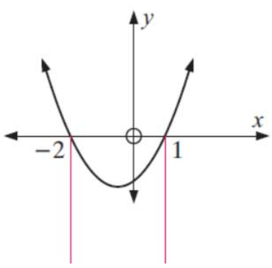
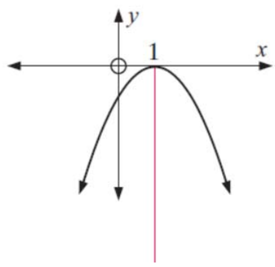
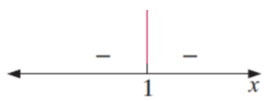
4° paso: Construir un diagrama de signos para estudiar el signo del polinomio cuadrático del paso 2 en cada uno de los intervalos del paso 3, para poder ver en qué intervalo(s) la desigualdad es verdadera.

Solución:

Ejercicios: 13 a 15

Notas: 1°) Realmente este método también resuelve **inecuaciones polinómicas de grado 3 o superior** (Ejercicio 16) e **inecuaciones factorizadas** (Ejercicio 17).

2°) **MÉTODO GRÁFICO PARA RESOLVER INECUACIONES**:

Función:	$y = x^2 + x - 2$	$y = -2x^2 + 4x - 2$
Raíces:	$x = -2 \ \wedge \ x = 1$	$x = 1$ doble
Gráfica:		
Diagrama de signos:		
Inecuación:	$x^2 + x - 2 < 0$	$-2x^2 + 4x - 2 \geq 0$
Conjunto solución:	$x \in (-2, 1)$	solo $x = 1$

(Hacer cero uno de los dos miembros de la inecuación pasando todos los términos al otro miembro, y después) VER PARA QUÉ VALORES DE **x** LA GRÁFICA ESTÁ POR ENCIMA DEL EJE **x** (> o ≥) O DEBAJO (< o ≤).

IV) SISTEMAS de INECUACIONES LINEALES de UNA VARIABLE

Def.: «**Un sistema de inecuaciones con una incógnita x es un conjunto de inecuaciones con la misma incógnita x y que deben ser todas satisfechas a la vez**».

Es decir, las soluciones del sistema de inecuaciones son las soluciones que son comunes a todas las inecuaciones que forman el sistema.

Por consiguiente, el **método práctico para resolver sistemas de inecuaciones** consiste en los siguientes pasos:

1er paso: Resolver cada inecuación por separado.

2° paso: Representar la solución de cada inecuación en distintas rectas reales.

3er paso: El conjunto solución será la ∩ de los intervalos del paso anterior.

Ejemplo 7: a) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3 > 0 \\ 3x + 1 > 0 \end{array}\right\}$

(Sol : x > 3 / 2)

b) $\left.\begin{array}{r} x-1>0 \\ 1-2x>0 \end{array}\right\}$

(Sol : ∄ sol.)

c) $\left.\begin{array}{r} 3x-2<0 \\ x+2>0 \end{array}\right\}$

(Sol : $x \in (-2, 2/3)$)

Ejercicios: 18 y 19

V) INECUACIONES RACIONALES

Def.: «**Una inecuación racional es una inecuación que contiene un cociente de polinomios**».

Ejemplo 8: $\dfrac{2x+5}{x-4} > 1$

¡Cuidado con no caer en este error común!: $\dfrac{2x+5}{x-4} > 1 \Rightarrow \cancel{2x+5 > x-4}$ FALSO!

¿Por qué es falso? Recordar la nota 2 de la sección II: «¡**NO PODEMOS MULTIPLICAR NI DIVIDIR AMBOS MIEMBROS DE UNA INECUACIÓN POR UNA EXPRESIÓN QUE CONTENGA LA INCÓGNITA!**». ¡La razón es que esta expresión puede ser negativa!

Una vez visto lo que NO se debe hacer, veamos el correcto proceder:

Método práctico para resolver inecuaciones con cocientes:

1er paso: Hacer uno de los miembros cero pasando todos los términos al otro, y operar a continuación hasta obtener un único cociente ← *cuando sea necesario!*.

2º paso: Hallar las raíces del numerador y denominador de la fracción algebraica anterior, los cuales a su vez dividirán la recta real en intervalos.

3er paso: Construir un diagrama de signos para estudiar el signo del numerador y denominador de la expresión del paso 1 en cada uno de los intervalos del paso 2, para poder ver en qué intervalo(s) la desigualdad del paso 1 es verdadera

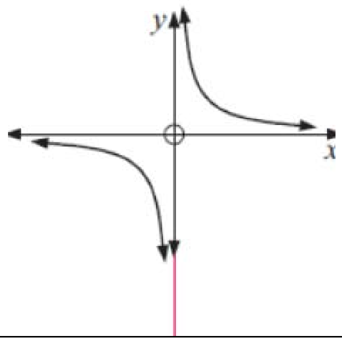
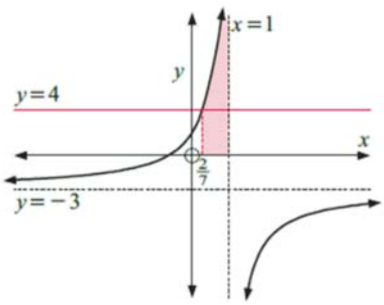
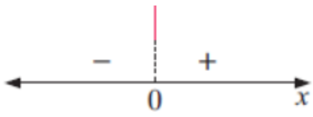
Nota: Recordar que los ceros del denominador harían indefinida la expresión racional del paso 1, de modo que no pueden ser incluidos en el conjunto solución. Ahora bien, los ceros del numerador deben ser cuidadosamente ponderados en cada caso de cara a su posible inclusión (o no) en la solución general.

Ejemplo 8: $\dfrac{2x+5}{x-4} > 1$

Solución:

Ejercicios: 20 y 21

ANEXO: Método gráfico para resolver inecuaciones racionales:

Inecuación:	$\dfrac{4}{x} < 0$	$\dfrac{3x+2}{1-x} > 4$
Función(es):	$y = \dfrac{4}{x}$	$y = \dfrac{3x+2}{1-x} \wedge y = 4$
Gráfica:		
Diagrama de signos:		La curva $y = \dfrac{3x+2}{1-x}$ está por encima de la recta $y=4$ entre $x=2/7$ y $x=1$
Conjunto solución:	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in \left(\dfrac{2}{7}, 1\right)$

21 EJERCICIOS de INECUACIONES 4º ESO Acad.

Repaso de desigualdades:

1. Dadas las siguientes desigualdades, indicar si son V o F utilizando la recta real. Caso de ser inecuaciones, indicar además la solución mediante la recta $\mathbb{R}$ y mediante intervalos:

a) $4>-3$	**c)** $4\geq 6$	**e)** $3\leq 3$	**g)** $x\leq -3$
b) $5<-6$	**d)** $3<3$	**f)** $x>0$	**h)** $2x<8$

2. **a)** Razonar, operando, que la desigualdad $\frac{1}{9}-\frac{5}{12}\geq -\frac{1}{4}$ es falsa. Comprobarlo con la calculadora.

b) Ídem con $40+60\sqrt{3}>120$

3. Dada la inecuación $2x>5$, estudiar si los siguientes números pueden ser solución: $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5/2$. Razonar, a continuación, su solución general.

Inecuaciones de 1^er grado:

4. Dada la inecuación $3x+1>x+5$ se pide, por este orden:

a) Comprobar si son posibles las soluciones $x=5$, $x=0$, $x=-1$

b) Resolverla y dibujar en la recta real la solución.

RECORDAR: Las inecuaciones de 1^er grado se resuelven de forma prácticamente similar a las ecuaciones de 1^er grado; por ejemplo, si un número **positivo** está multiplicando a todo un miembro, pasará al otro miembro dividiendo:

ECUACIÓN:	INECUACIÓN:
$2x=6$	$2x\geq 6$
$x=3$	$x\geq 3$

Solamente hay una diferencia con las ecuaciones: si el factor multiplicativo fuera negativo, habría que cambiar el sentido de la desigualdad. El motivo es el siguiente:

$$\text{p. ej.}\quad 2<6 \xrightarrow{\text{multiplicamos ambos miembros por } -1} -2>-6$$

En la práctica se recomienda multiplicar ambos miembros de la desigualdad por -1, lo cual cambia el sentido de la desigualdad. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} -2x &\geq 6 \\ 2x &\leq -6 \\ x &\leq -3 \end{aligned}$$

5. Resolver las siguientes inecuaciones simples:

a) $7x\leq 14$

b) $-2x>6$

c) $3x\leq -9$

d) $-5x\geq -15$

e) $10\leq 5x$

f) $-14\geq 7x$

g) $-x>2$

h) $-x\geq 2$

i) $20\leq -20x$ *(Sol: $x\leq -1$)*

j) $-11<-11x$ *(Sol: $x<1$)*

k) $3\leq -x$

l) $-5x\geq 5$ *(Sol: $x\leq -1$)*

m) $-3\leq -x$

n) $3x<-3$ *(Sol: $x<-1$)*

o) $-2<-2x$ *(Sol: $x<1$)*

p) $-7x\leq -7$ *(Sol: $x\geq 1$)*

q) $\frac{2x}{3}>1$

6. Resolver las siguientes inecuaciones y representar la solución en la recta real:

a) $2x+6\leq 14$ *(Sol: $x\leq 4$)*

b) $3x-4\geq 8$ *(Sol: $x\geq 4$)*

c) $4x+7\leq 35$ *(Sol: $x\leq 7$)*

d) $3x+5<x+13$ *(Sol: $x<4$)*

e) $5-3x\geq -3$ *(Sol: $x\leq 8/3$)*

f) $4-2x\geq x-5$ *(Sol: $x\leq 3$)*

g) $5+3x<4-x$ *(Sol: $x<-1/4$)*

h) $2x-3>4-2x$ *(Sol: $x>7/4$)*

i) $6x-3<4x+7$ *(Sol: $x<5$)*

j) $3x-1<-2x+4$ *(Sol: $x<1$)*

k) $2x+9>3x+5$ *(Sol: $x<4$)*

l) $2(x-3)+5(x-1)\geq -4$ *(Sol: $x\geq 1$)*

m) $12(x+2)+5<3(4x+1)+3$ *(Sol: $\nexists$ soluc.)*

n) $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+3$ *(Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$)*

o) $x(x-1)>x^2+3x+1$ *(Sol: $x<-1/4$)*

p) $(x+2)(x+3)<(x-1)(x+5)$ *(Sol: $x<-11$)*

q) $2(x+3)+3(x-1)>2(x+2)$ *(Sol: $x>1/3$)*

7. Resolver las siguientes inecuaciones, quitando previamente los denominadores:

a) $\frac{x-1}{2}-\frac{x-4}{3}<1$ *(Sol: $x<1$)*

b) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}>5-\frac{x}{6}$ *(Sol: $x>5$)*

c) $\frac{2x-4}{3}+\frac{3x+1}{3}<\frac{2x-5}{12}$ *(Sol: $x<7/18$)*

d) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}>x-2$ *(Sol: $x<6$)*

e) $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}>\frac{x+14}{2}-2$ *(Sol: $x>4$)*

f) $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}>2+\frac{3x-1}{15}$ *(Sol: $x<3$)*

g) $\frac{3x-3}{5}-\frac{4x+8}{2}<\frac{x}{4}-3x$ *(Sol: $x<92/27$)*

h) $\frac{x-1}{2}-x<\frac{1-x}{4}-3$ *(Sol: $x>9$)*

i) $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{8}-\frac{8-10x}{45}>0$ *(Sol: $x>109/110$)*

j) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0$ *(Sol: $x>6$)*

k) $4x-\frac{3-2x}{4}<\frac{3x-1}{3}+\frac{37}{12}$ *(Sol: $x<1$)*

l) $\frac{2x+3}{4}>\frac{x+1}{2}+3$ *(Sol: $\nexists$ soluc.)*

m) $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}>\frac{5x-36}{4}-1$ *(Sol: $x<8$)*

n) $\frac{x}{18}-\frac{2x+1}{12}\geq\frac{2-4x}{24}$ *(Sol: $x\geq 3$)*

o) $1-\frac{3x-7}{5}>\frac{5x+4}{15}-\frac{x-1}{3}$ *(Sol: $x<3$)*

8. Un empresario paga a un vendedor un sueldo fijo de 1500 € más 1 € por artículo vendido. Otro vendedor, más emprendedor, no tiene sueldo fijo, pero pacta cobrar 3 € por cada unidad que logre vender ¿A partir de qué número de productos vendidos cobrará más el segundo empleado?

9. Un alumno ha obtenido un 3,75 en el primer examen de la evaluación, y un 4,5 en el segundo. Hallar qué nota deberá sacar como mínimo en el tercer y último examen, que hace media con los anteriores, para poder aprobar. (NOTA: se considera aprobado si la media es al menos un 5)

10. Una editorial ofrece a un vendedor dos tipos de contrato: A) 25 000 € fijos más un 10 % por cada libro vendido; o bien: B) El 30 % del precio de cada libro vendido. Si el precio de cada ejemplar es de 35 €, ¿a partir de cuántos ejemplares vendidos le resultará más beneficiosa la opción B? *(Sol: Deberá vender 3571 libros)*

11. Se define el *Índice de masa corporal* (IMC) como el siguiente cociente:

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso (en kg)}}{\text{estatura}^2 \text{ (en m)}}$$

Un peso normal se considera entre 18,5 y 24,9. Si el IMC de un individuo supera este último valor, se le considera obeso. Hallar cuál es el peso máximo para un individuo de 1,89 m de altura de modo que se pueda considerar un peso normal.

12. Hallar qué condición deben verificar los radios respectivos R y r de una pizza grande y una mediana para que sea más rentable pedir una pizza grande en vez de dos medianas. *(Sol: $R>\sqrt{2}\cdot r$)*

Inecuaciones de 2º grado:

13. Resolver las siguientes inecuaciones y representar la solución en la recta real:

1. $x^2-6x+8\geq 0$ *[Sol: $x\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$]*
2. $x^2-2x-3<0$ *[Sol: $x\in(-1,3)$]*
3. $x^2-5x+6>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$]*
4. $x^2-3x-10\leq 0$ *[Sol: $x\in[-2,5]$]*
5. $3x^2-10x+7\geq 0$ *[Sol: $x\in(-\infty,1]\cup[7/3,\infty)$]*
6. $2x^2-16x+24<0$ *[Sol: $x\in(2,6)$]*
7. TIPO EXAMEN $x^2-4x+21\geq 0$ *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*
8. $x^2-3x>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$]*
9. $x^2-4\geq 0$ *[Sol: $x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$]*
10. TIPO EXAMEN $x^2-4x+4>0$ *[Sol: $x\in\mathbb{R}-\{2\}$]*
11. $x^2+6x+9\geq 0$ *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*
12. $x^2-2x+1<0$ *[Sol: $\nexists$ soluc.]*
13. TIPO EXAMEN $x^2-4x+4\leq 0$ *[Sol: $x=2$]*
14. $6x^2-5x-6<0$ *[Sol: $x\in(-2/3,3/2)$]*
15. $x^2-9x+18<0$ *[Sol: $x\in(3,6)$]*
16. $x^2-4x+7<0$ TIPO EXAMEN *[Sol: $\nexists$ soluc.]*
17. $x^2-2x+6\leq 0$ *[Sol: $\nexists$ soluc.]*
18. $2x^2+8x+6<0$ *[Sol: $x\in(-3,-1)$]*
19. $2x^2+10x+12\leq 0$ *[Sol: $x\in[-3,-2]$]*
20. $-x^2+5x-4\geq 0$ *[Sol: $x\in[1,4]$]*
21. $x^2\geq 4$ *[Sol: $x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$]*
22. $(x+2)(x-5)>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,-2)\cup(5,\infty)$]*
23. $(x-3)(x-1)<0$ *[Sol: $x\in(1,3)$]*
24. $(4x-8)(x+1)>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$]*
25. $(2x-4)3x>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$]*

26. $x^2<9$ *[Sol: $x\in(-3,3)$]*

27. $x^2<-9$ TIPO EXAMEN *[∄soluc.]*

28. $9x^2-16>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,-4/3)U(4/3,\infty)$]*

29. $3x^2+15x+21<0$ TIPO EXAMEN *[∄soluc.]*

30. $2x^2-5x+2<0$

31. $-2x^2+5x+3>0$

32. $x^2-9x+20\leq 0$

33. $-2x^2+2x+15<0$

34. $x^2-5x+4>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,1)U(4,\infty)$]*

35. $3x^2-4x<0$ *[Sol: $x\in(0,4/3)$]*

36. $x^2+16\geq 0$

37. $2x^2-8>0$

38. $x^2+x+1\geq 0$ TIPO EXAMEN *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*

39. $-4x^2+12x-9\leq 0$ TIPO EXAMEN *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*

14. Resolver las siguientes inecuaciones de 2º grado reduciéndolas previamente a la forma general:

a) $x(x+3)-2x>4x+4$ *[Sol: $x\in(-\infty,-1)U(4,\infty)$]*

b) $(x-1)^2-(x+2)^2+3x^2\leq -7x+1$ *[Sol: $x\in[-4/3,1]$]*

c) $x\left(x^2+x\right)-\left(x+1\right)\left(x^2-2\right)>-4$ *[Sol: $x>-3$]*

d) $(2x-3)^2\leq 1$ *[Sol: $x\in[1,2]$]*

e) $4x(x+39)+9<0$ *[Sol: $x\in\left(-\frac{39}{2}-3\sqrt{42},-\frac{39}{2}+3\sqrt{42}\right)$]*

f) $-x(x+2)+3\geq 0$ *[Sol: $x\in[-3,1]$]*

g) $(3x-2)^2+5x^2\geq(3x+2)(3x-2)$ *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*

h) $4x(x+3)-(2x+3)^2>x-1-(x+2)(x-2)$ *[Sol: $x\in(-\infty,-3)U(4,\infty)$]*

i) $(2x+3)(2x-3)+5x>2(x+1)-1$ *[Sol: $x\in(-\infty,-2)U(5/4,\infty)$]*

j) $(2x+2)(2x-2)-2(x+1)(x-1)\leq(x+1)^2$ *[Sol: $x\in[-1,3]$]*

k) $(2x+3)(2x-3)\leq(2x-3)^2+30x$ *[Sol: $x\geq -1$]*

l) $6+x^2>\left(3x+1\right)\left(3x-1\right)-\left(2x-3\right)^2$ *[Sol: $x\in(-4,1)$]*

m) $(x+3)(x-3)-(x-2)^2<6+x(x-5)$ *[Sol: $x\in\left(-\infty,\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)U\left(\frac{9+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$]*

n) $(2x+1)(x+1)-(x+2)(x-2)\leq 3$ *[Sol: $x\in[-2,-1]$]*

o) $\frac{3}{2}(2x-4)^2+1\geq 0$ *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*

TIPO EXAMEN **p)** $\frac{(2x+1)(2x-1)}{6}-\frac{(x+1)^2}{9}\leq\frac{x(7x-8)-1}{18}$ *[Sol: $x\in[-2,2/3]$]*

q) $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(x+1)(x-1)}{3}<\frac{4x^2-19x+31}{6}$ *[Sol: $x\in(-3,2)$]*

r) $\frac{(x+2)(x-2)}{3}-\frac{6-8x}{9}\geq\frac{5x-21}{9}$ *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*

s) $\frac{(x+2)(x-2)}{12}+\frac{2x+1}{18}-\frac{6-5(x-2)}{6}\le\frac{3(x-1)^2+11}{36}$ *[Sol: x≤3]*

t) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{(x-3)^2}{3}\ge\frac{x(11-x)}{6}$ *[Sol: $x\in(-\infty,-8]U[6,\infty)$]*

u) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{5x+6}{6}<\frac{(x+3)(x-3)}{3}+6$ *[Sol: $x\in(0,7)$]*

v) $\frac{(x-2)(x+4)}{2}-\frac{(x-2)^2}{6}\ge x-2$ *[Sol: $x\in(-\infty,-4]U[2,\infty)$]*

w) $\frac{(x+1)(x-1)+3}{3}-\frac{(x-1)^2+2x}{4}\le 1-\frac{x+7}{12}$ *[Sol: $x\in[-1,0]$]*

x) $\frac{(3x+1)(3x-1)}{6}+4x-5\ge\frac{(x+2)(x-2)}{2}+\frac{11}{6}$ *[Sol: $x\in(-\infty,-5]U[1,\infty)$]*

y) $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{2x+1}{6}\ge 1-\frac{(x+1)(x-1)}{2}$ *[Sol: $x\in(-\infty,-4/5]U[2,\infty)$]*

z) $\frac{(x+1)(x-1)}{2}-\frac{(x^2+3)(x^2-3)}{6}>\frac{1}{3}$ *[Sol: $x\in(-2,2)$]*

α) $\frac{(2x+3)(2x-3)}{9}-\frac{(3x-2)^2}{3}<\frac{x^2}{9}-5$ *[Sol: $x\in(-\infty,-1/2)U(2,\infty)$]*

β) $(3x-2)^2-\frac{(16x-15)x}{2}>3-\frac{11x}{2}$ *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*

15. **TEORÍA:**

a) ¿Por qué no se puede hacer lo siguiente: $x^2\ge 4\Rightarrow x\ge 2$? ¿Cuál sería la forma correcta de proceder?

b) ¿Y al revés? Por ejemplo, ¿es cierto lo siguiente?: $a>b\Rightarrow a^2>b^2$ (Piénsese en la función $y=x^2$)

c) Inventar, razonadamente, una inecuación de 1er grado sin solución, y otra que se verifique $\forall\mathbb{R}$.

d) Inventar, razonadamente, una inecuación de 2º grado sin solución, y otra que se verifique $\forall\mathbb{R}$.

e) ¿Por qué, en el caso de una inecuación, si dividimos ambos miembros por un número negativo hay que cambiar el sentido de la desigualdad? Poner un ejemplo.

f) Un alumno resuelve la inecuación $\frac{(x+1)(x-1)}{2}-\frac{(x^2+3)(x^2-3)}{6}>\frac{1}{3}$ y da la solución $x\in(-\infty,-2)U(2,\infty)$. Su compañera sostiene que ello es incorrecto ya que, por ejemplo, ha observado que x=0 verifica la inecuación. Sin resolverla, ¿tiene razón ella? *(Sol: María está en lo cierto)*

Inecuaciones polinómicas de grado >2:

16. Resolver las siguientes inecuaciones aplicando el método más apropiado en cada caso:

a) $x^3-5x^2+2x+8\ge 0$ *[Sol: $x\in[-1,2]$ U $[4,\infty)$]*

b) $x^3-x^2-6x<0$ *[Sol: $x\in(-\infty,-2)$ U $(0,3)$]*

c) $x^3-2x^2-5x+6\ge 0$ *[Sol: $x\in[-2,1]$ U $[3,\infty)$]*

d) $x^4-1>0$ [Sol: $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$]

e) $\frac{(x+2)(x-2)}{4}-\frac{x^2}{2}<\frac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4}-2$ [Sol: $x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$]

f) $x^3-6x^2+32\le0$ [Sol: $x\in(-\infty,-2]$]

g) $x^3-7x-6\ge0$ [Sol: $x\in[-2,-1]\cup[3,\infty)$]

h) $x^4-13x^2+36>0$ [Sol: $x\in(-\infty,-3)\cup(-2,2)\cup(3,\infty)$]

i) $x^3-9x^2+24x>16$ [Sol: $x\in(1,4)\cup(4,\infty)$]

j) $x^3-9x^2+24x\ge16$ [Sol: $x\in[1,\infty)$]

k) $x^5>1$

l) $x^4-3x^3-9x^2+23x-12\ge0$

m) $x^4\ge0$ [Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]

n) $x^4+x^3+7x^2+8x+4\ge0$ [Sol: $x\in[-\infty,-2]\cup[-1,\infty)$]

Inecuaciones factorizadas:

17. Resolver las siguientes inecuaciones aplicando el método más apropiado en cada caso:

a) $(x^2-x-2)(x^2+9)>0$ [Sol: $x\in(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$]

b) $(x^2+2x-15)(x+1)<0$ [Sol: $x\in(-\infty,-5)\cup(-1,3)$]

c) $(2x+8)(x^3-4x)(x^2-4x+4)\le0$ [Sol: $x\in-4,-2]\cup[0,2]$]

d) $x^2(x-2)\le0$ [Sol: $x\in(-\infty,2]$]

e) $x^2(x-2)<0$ [Sol: $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)$]

f) $(x+1)^2(x-3)<0$ [Sol: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,3)$]

g) $x^2(2x-5)(x+2)\ge0$ [Sol: $x\in[-\infty,-2]\cup[5/2,\infty)$]

h) $(x-3)(x+5)(x^2+1)>0$ [Sol: $x\in(-\infty,-5)\cup(3,\infty)$]

i) $(x+2)^2(x-3)^2>0$

j) $(x-5)(x^2+4)\le0$

k) $(x^2-4)(x^2+4)<0$

Sistemas de inecuaciones de 1er grado:

18. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones de 1er grado con una incógnita, indicando la solución de dos formas distintas: mediante intervalos, y representando en la recta real:

1. $\left.\begin{array}{l}5x+2\ge4x+5\\3x-7<x+3\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in[3,5)$]

2. $\left.\begin{array}{l}1-x<2-3x\\3+x<2+5x\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in(1/4,1/2)$]

3. $\left.\begin{array}{l}2x+6\le0\\-x+1\le0\end{array}\right\}$ [$\nexists$soluc.]

4. $\left.\begin{array}{l}2x+5<3x\\-x+8<4\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in(5,\infty)$]

5. $\left.\begin{array}{l}2x>8\\2x\le4\end{array}\right\}$ [$\nexists$soluc.]

6. $\left.\begin{array}{l}2x\ge4x-2\\5x-4<6x-1\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in(-3,1]$]

7. $\left.\begin{array}{l}3x<9\\x\ge\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in[1/2,3)$]

8. $\left.\begin{array}{l}3x-5\ge2x-6\\4x+1<2x+7\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in[-1,3)$]

9. $\left.\begin{array}{l}7x+2>4x+5\\5x-1\le3x+3\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in(1,2]$]

10. $\left.\begin{array}{l}3x-1<5x-5\\x\ge2x+1\end{array}\right\}$ [$\nexists$soluc.]

11. $\left.\begin{array}{l}2x+1\le x+3\\2x+3\le3x+1\end{array}\right\}$ [Sol: x=2]

12. $\left.\begin{array}{l}-2x-6\le0\\3x+3\le0\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in[-3,-1]$]

13. $\left.\begin{array}{l} 3x+2\ge x-4 \\ 5-x\ge -2 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[−3,7]]*

14. $\left.\begin{array}{l} 2(x-3)+6\ge 2x \\ x+5\le 3x+2-2x+7 \end{array}\right\}$ *[Sol: ∀x∈ℝ]*

15. $\left.\begin{array}{l} 2(x-3)+6> 2x \\ x+5\le 3x+2-2x+7 \end{array}\right\}$ *[∄soluc.]*

16. $\left.\begin{array}{l} 4x+1<2x+9 \\ x+8<5-2x \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(−∞,−1)]*

17. $\left.\begin{array}{l} 5-x\le 4x-4 \\ 1-2x\ge -3 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[9/5,2]]*

18. $\left.\begin{array}{l} 3(2x-1)-(5+2x)\ge -3 \\ 2[3(x-5)-x+1]<1 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[5/4,29/4)]*

19. $\left.\begin{array}{l} (2x-3)^2-(x+1)(x-1)\le 3x^2 \\ (x+2)^2-(x-2)^2>2x+1 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[5/6,∞)]*

20. $\left.\begin{array}{l} 2x-10>-x+2 \\ 12-4x>-3x+2 \\ 3(x+2)\ge 2(x+6) \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(6,10)]*

21. $\left.\begin{array}{l} 2x+\dfrac{x}{4}\le\dfrac{9}{4}-\dfrac{x-1}{2} \\ 2x-1-2(2x+1)<1 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(-2,1]]*

22. $\left.\begin{array}{l} 2(3x-1)-(2+4x)>x \\ 2-\dfrac{3x+1}{2}\le x-\dfrac{x+2}{3} \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(4,∞)]*

23. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{x-1}{3}>6 \\ \dfrac{x-5}{4}+\dfrac{x}{8}\le 2 \end{array}\right\}$ *[∄ soluc.]*

24. $\left.\begin{array}{l} 2(x-3)-2(x+3)<1 \\ -(x+5)\ge -x-5 \end{array}\right\}$ *[Sol: ∀x∈ℝ]*

25. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2(3x-5)}{3}-\dfrac{3(x-2)}{2}>1 \\ \dfrac{2x+3(x-1)}{2}\ge x-1 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(8/3,∞)]*

26. $\left.\begin{array}{l} 2(x+1)+2x\ge 3x+1-(x+3) \\ 2(2x+1)-2<3(x+1)-x \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[−2,3/2)]*

27. $\left.\begin{array}{l} 5x+\dfrac{4x}{3}+2>\dfrac{10x}{3}+5 \\ 2-\dfrac{x-3}{4}\le 1-\dfrac{x}{2} \end{array}\right\}$ *[∄ soluc.]*

28. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}-\dfrac{6-x}{4}<x+1 \\ 3-\dfrac{5x-1}{10}\ge\dfrac{x-1}{5}-\dfrac{x-3}{2} \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(−10,9]]*

29. $\left.\begin{array}{l} -1-\dfrac{2(x+1)}{5}\le\dfrac{x-1}{2} \\ \dfrac{3x+1}{4}-\dfrac{x}{6}<2 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[−1,3)]*

30. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{5-3x}{4}-3(x+4)\le\dfrac{3(x+2)}{2}+2 \\ \dfrac{2(2x+1)-(x-1)}{3}-\dfrac{2x+1}{5}<2 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[−3,2)]*

31. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{9-19x}{6}-\dfrac{4(1-2x)}{3}\le\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{2(2x+1)-(x-1)}{3}-\dfrac{2x+1}{5}<2 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[−3,2)]*

32. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{4}\le\dfrac{3x}{4} \\ x+1\le x+1 \end{array}\right\}$ *[Sol: ∀x∈ℝ]*

33. $\left.\begin{array}{l} 2(x+1)>\dfrac{3x-2}{14} \\ 3x-2\le\dfrac{7x}{3} \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(−6/5,3]]*

34. $\left.\begin{array}{l} 3-\dfrac{2(x-1)}{9}\ge\dfrac{5x}{6}+\dfrac{7x}{9} \\ \dfrac{3(2x-1)-2}{2}-\dfrac{x+1}{5}>-2 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(1/4,58/33]]*

35. (*) $\left.\begin{array}{c} x(x-1)\le 6 \\ x^2+(x+2)(x-2)>(x+2)(x-1) \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[5/6,∞)]*

36. (*) $\left.\begin{array}{l} x(x-1)<2 \\ 5(x+1)\ge 4(x+2)-2 \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[1,2)]*

19. Considerar el sistema $\left.\begin{array}{l} -6-x<-3x+2 \\ 2x+8<5-x \end{array}\right\}$ ¿Cómo podemos saber, sin resolverlo, si x=−2 y x=3 son solución?

[Sol: SÍ; NO]

Inecuaciones con cocientes:

20. Resolver las siguientes **inecuaciones con cocientes**:

a) $\frac{x-1}{x-4}>0$ [Sol: $x\in(-\infty,1)\cup(4,\infty)$]

b) $\frac{5}{x+3}<0$ [Sol: $x\in(-\infty,-3)$]

c) $\frac{5}{x}\geq 0$ [Sol: $x\in(0,\infty)$]

d) $\frac{2x-3}{x+1}\geq 1$ TIPO EXAMEN [Sol: $x\in(-\infty,-1)\cup[4,\infty)$]

e) $\frac{5x-8}{x-3}\leq 4$ TIPO EXAMEN [Sol: $x\in[-4,3)$]

f) $\frac{3}{2x-6}\geq 2$ TIPO EXAMEN [Sol: $x\in(3,15/4]$]

g) $2<\frac{x+6}{x-2}$ TIPO EXAMEN [Sol: $x\in(2,10)$]

h) $\frac{-3}{2x-6}\geq 0$ [Sol: $x\in(-\infty,3)$]

TIPO EXAMEN **i)** $\frac{x+3}{2x-1}>-\frac{1}{2}$ [Sol: $x\in(-\infty,-5/4)\cup(1/2,\infty)$]

j) $\frac{x+3}{x-7}\leq 2$ [Sol: $x\in(-\infty,7)\cup[17,\infty)$]

k) $\frac{x+3}{x-7}\leq\frac{1}{2}$ [Sol: $x\in[-13,7)$]

l) $\frac{x}{x+5}>x$ [Sol: $x\in(-\infty,-5)\cup(-4,0)$]

m) $1\leq\frac{2x+3}{x-1}$ [Sol: $x\in(-\infty,-4]\cup(1,\infty)$]

n) $\frac{1}{x}\geq 1$ [Sol: $x\in(0,1]$]

o) $\frac{2x-4}{x+2}\geq\frac{2}{3}$ [Sol: $x\in(-\infty,-2)\cup[4,\infty)$]

TIPO EXAMEN **p)** $\frac{1}{x}\leq x$ [Sol: $x\in[-1,0)\cup[1,\infty)$]

q) $\frac{2x-4}{3}\geq 0$ [Sol: $x\in[2,\infty)$]

r) $\frac{3}{2x-4}\geq 0$ [Sol: $x\in(2,\infty)$]

s) $\frac{1}{x}<1$ TIPO EXAMEN [Sol: $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$]

t) $\frac{1}{x}>-1$ TIPO EXAMEN [Sol: $x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$]

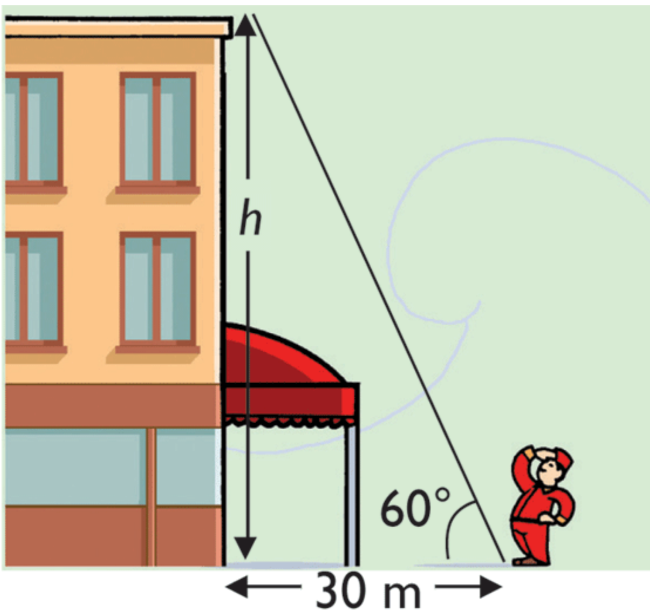
21. **a)** ¿Por qué no se puede hacer $\frac{x-1}{x-4}>0\Rightarrow x-1>0$? ¿Cómo se resuelve correctamente?

b) ¿V o F? $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Rightarrow A\cdot D=B\cdot C$

c) ¿V o F? $\frac{A}{B}<\frac{C}{D}\Rightarrow A\cdot D<B\cdot C$ (En caso de ser falso, indicar un contraejemplo)

NOTA: Las inecuaciones de 1er grado con dos incógnitas y los sistemas de inecuaciones de 1er grado con dos incógnitas los resolveremos gráficamente al final del curso, cuando veamos el tema de rectas.

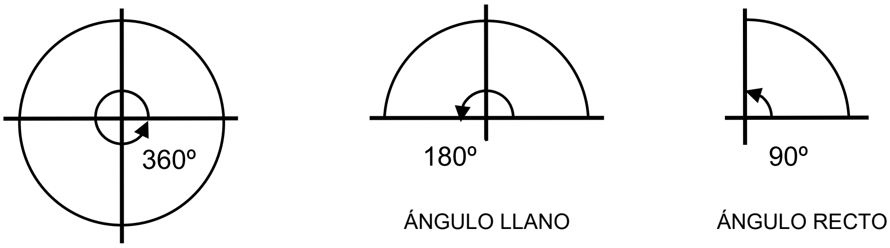
TRIGONOMETRÍA
RESOLUCIÓN de TRIÁNGULOS



MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO
Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) GRADOS Y RADIANES

Sistema sexagesimal: Es el sistema que hemos utilizado hasta ahora. En él, por definición, **una vuelta completa son 360º**. Por tanto:



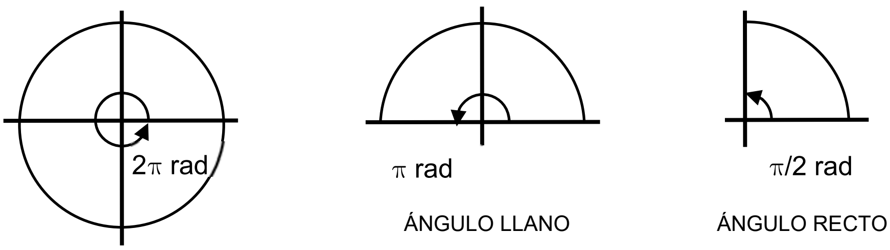
ÁNGULO LLANO ÁNGULO RECTO

etc. etc. etc.

Este sistema ya lo utilizaban los babilonios hacia el 3 000 a.C. ¿Por qué eligieron 360º? Por practicidad, dado que es divisible por una gran cantidad de números: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 y 180.

Nótese que las unidades de este sistema, los grados sexagesimales, se indican con el símbolo º, y que **éste no debe omitirse nunca**.

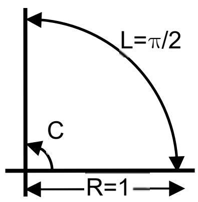
Radianes: Es el sistema que más se utiliza en Física (movimiento circular, etc.), pero también se emplea en Matemáticas, ya que, por ejemplo, como veremos en el tema 6, los radianes se emplean en las funciones trigonométricas. Por definición, **una vuelta completa son 2π rad**. Por tanto:



ÁNGULO LLANO ÁNGULO RECTO

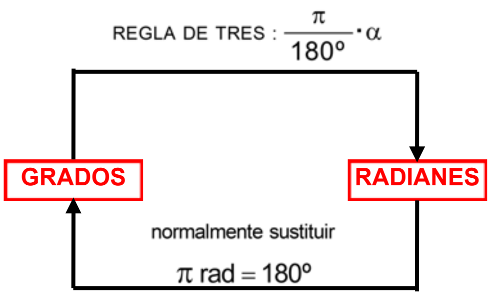
etc. etc. etc.

Este sistema se empezó a utilizar en Física en época relativamente reciente (siglo XVIII). ¿Por qué elegir 2π rad? De nuevo por comodidad. En efecto, supongamos una circunferencia de radio 1. Como la longitud o perímetro de la circunferencia viene dada por $L=2\pi R$, en este caso la longitud sería 2π, que es precisamente el valor del ángulo en radianes. Si fuera media circunferencia, la longitud del arco correspondiente sería π rad, que de nuevo es el valor del ángulo en radianes. Y así sucesivamente:



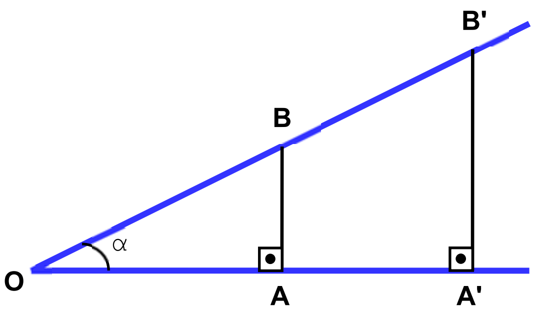
Es decir, **«En una circunferencia de radio unidad, la medida de un ángulo en radianes coincide con la longitud del arco correspondiente».** Una vez nos acostumbremos a ellos, los radianes resultan una forma muy útil y cómoda de medir ángulos.

Resumen:



Ejercicios final tema: 1, 2 y 3

II) DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



Considerar la figura adjunta, formada por dos triángulos rectángulos en posición de Tales. Se define el «**seno de un ángulo** como el cociente o razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa[1]»:

$$\boxed{\text{sen }\alpha=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\overset{\text{Th. de Tales}}{=}\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}=\ldots \qquad (1)$$

Nótese que sen α se puede expresar de infinitas formas equivalentes, debido al teorema de Tales.

Análogamente, se define el «**coseno de un ángulo** como el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa»:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\overset{\text{Th. de Tales}}{=}\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}=\ldots \qquad (2)$$

Finalmente, se define la «**tangente de un ángulo** como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo»:

$$\boxed{\text{tg }\alpha=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\overset{\text{Th. de Tales}}{=}\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}}=\ldots=\boxed{\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}} \qquad (3)$$

[1] Curiosidad matemática: Los griegos solían colocar el ángulo recto de un triángulo rectángulo en la parte superior. Por eso *hipotenusa* proviene de *hipo* (debajo) y *teinein* (extender). De ahí pasó al latín y, posteriormente, a las distintas lenguas europeas.

Nótese que de (1) y (2) se infiere fácilmente que la tangente es también el cociente entre seno y coseno. Esta es precisamente la primera identidad trigonométrica de una larga lista que veremos a lo largo del tema, y cuyo resumen podemos ver al final del cuaderno. Estas tres razones así definidas, llamadas **razones trigonométricas directas**, se utilizan, como veremos en breve, para resolver triángulos.

Observaciones: 1) «Las razones trigonométricas dependen del ángulo pero no del triángulo».

Ello es debido, como ya se ha dicho, al teorema de Tales. Y esta es precisamente la gran aplicación de la Trigonometría al cálculo de distancias o longitudes inaccesibles o muy lejanas. Por ejemplo, en Astronomía permite, mediante triangulación, obtener distancias entre astros.

2) Las razones trigonométricas carecen de unidades, no así los ángulos.

Ello es obvio, ya que una razón es un cociente de medidas de la misma unidad.

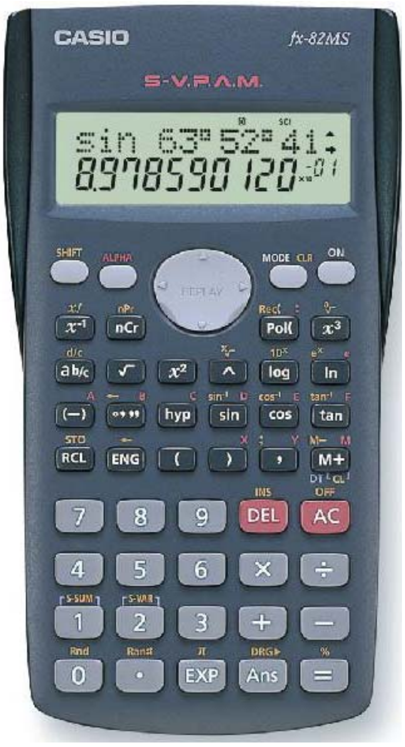
3) Cada razón directa tiene su correspondiente **razón trigonométrica inversa**:

COSECANTE: $$\boxed{\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} \qquad (4)$$

SECANTE: $$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}} \qquad (5)$$

COTANGENTE: $$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} \qquad (6)$$

Estas tres razones inversas no se suelen utilizar para resolver triángulos, sino en los cálculos algebraicos con fórmulas trigonométricas, como veremos profusamente a lo largo del tema, y en el próximo curso.



Ejercicios final tema: 4, 5 y 6

Uso de la calculadora en Trigonometría. Razones recíprocas:

Vamos a explicarlo para una Casio fx-82 MS, uno de los modelos más extendidos entre los estudiantes[2]. Para cualquier otro modelo se suele proceder de forma bastante análoga.

En primer lugar, tenemos que cerciorarnos de si la calculadora está trabajando en grados sexagesimales (en la parte superior de la pantalla aparecerá DEG, i.e. degrees) o en radianes (aparecerá RAD). Para ello hay que pulsar la tecla MODE varias veces y elegir 1=DEG o 2=RAD.

Ejemplo 1: ¿sen 23º? ⇨ sin 23 = ⇨ 0,3907311285...

Para introducir el ángulo en grados, minutos y segundos hay que utilizar la tecla º ' '' :

[2] Puede descargarse el manual en https://www.dropbox.com/s/nr5qlmhcupv7t8s/manual_casio_fx_82_ms.pdf

Ejemplo 2: ¿tg 103º 12' 25''? ⇨ $\boxed{\text{tan}}$ 103 $\boxed{\text{º ' ''}}$
12 $\boxed{\text{º ' ''}}$
25 $\boxed{\text{º ' ''}}$ $\boxed{=}$ ⇨ –4,261198564...

Para obtener cualquiera de las tres razones inversas hay que invertir la razón correspondiente directa:

Ejemplo 3: ¿sec 35º 30'? ⇨ 1 $\boxed{:}$ $\boxed{\text{cos}}$ 35 $\boxed{\text{º ' ''}}$ 30 $\boxed{\text{º ' ''}}$ $\boxed{=}$ ⇨ 1,228326911...

Por otra parte está el problema inverso, es decir, si por ejemplo sabemos que $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}85$, de qué ángulo α procede? Es decir, ¿cuál es el ángulo α tal que $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}85$? Esto nos lleva a definir las **razones trigonométricas recíprocas**. Cada una de las seis razones anteriormente definidas (las tres directas y las tres inversas) tienen su correspondiente razón recíproca. En realidad solo vamos a manejar las razones recíprocas de seno, coseno y tangente:

Definición: Si $\operatorname{sen}\alpha = x$, se dice que α es el **arcoseno** de x, es decir, el ángulo cuyo seno es x, y se indica de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}\alpha = x \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen} x$$

$$\text{arc} = \text{ángulo cuyo}$$

Definición: Si $\cos\alpha = x$, se dice que α es el **arcocoseno** de x, es decir, el ángulo cuyo coseno es x, y se indica de la siguiente forma:

$$\cos\alpha = x \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,cos} x$$

$$\text{arc} = \text{ángulo cuyo}$$

Definición: Si $\operatorname{tg}\alpha = x$, se dice que α es la **arcotangente** de x, es decir, el ángulo cuya tangente es x, y se indica de la siguiente forma:

$$\operatorname{tg}\alpha = x \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tg} x$$

$$\text{arc} = \text{ángulo cuyo}$$

Hay que tener siempre en cuenta que un arc sen, arc cos o arc tg es un ángulo, y por tanto hay que indicar siempre sus unidades.

Ejemplo 4: $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}85 \Rightarrow$ ¿α?

$\operatorname{sen}\alpha = 0{,}85 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen} 0{,}85$ ¿Cómo se obtiene una razón recíproca con la calculadora? Hay que usar la tecla $\boxed{\text{SHIFT}}$:

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{sin}}$ 0,85 $\boxed{=}$ ⇨ 58,21166938...º

Vemos que la calculadora da el ángulo en grados y décimas de grado, por lo que hay que pasarlo a grados, minutos y segundos con la tecla $\boxed{\text{º ' ''}}$:

58,21166938...º $\boxed{\text{º ' ''}}$ ⇨ 58º 12' 42''

Por lo tanto, $\alpha = \operatorname{arc\,sen} 0{,}85 \cong \boxed{58º\ 12'\ 42''}$

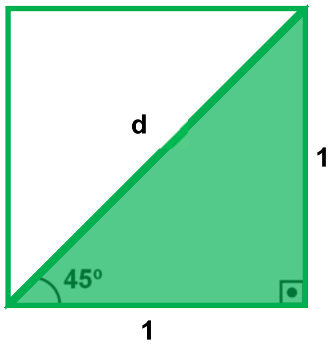
(NOTA: Puede comprobarse que, efectivamente, sen 58º 12' 42'' = 0,85)

Ejercicios final tema: 7, 8 y 9 (Uso calculadora)
10, 11, 12 y 13 (Uso razones trigonométricas)

III) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30º, 45º Y 60º

Razones de 45º:

Considerar un cuadrado que, para simplificar los cálculos, tendrá lado 1 (ver figura). Si trazamos una diagonal obtenemos el triángulo rectángulo sombreado de la figura, en el que vamos a obtener las razones de 45º. Para ello, previamente vamos a hallar por medio del teorema de Pitágoras la diagonal d:



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

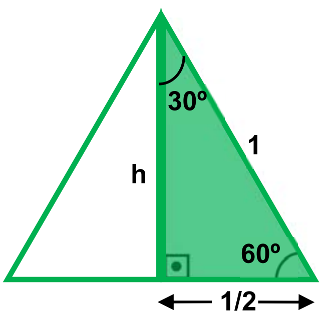
$$\text{sen } 45º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (7)$$

$$\cos 45º = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (8)$$

$$\text{tg } 45º = \frac{\text{sen} 45º}{\cos 45º} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1 \qquad (9)$$

NOTA: Si hubiéramos tomado otro lado del cuadrado distinto de 1 habríamos obtenido los mismos resultados, obviamente.

Razones de 30º y 60º:



Considerar un triángulo equilátero, de nuevo de lado 1 para simplificar los cálculos. Trazamos la altura h correspondiente a la base, con lo cual obtenemos el triángulo rectángulo sombreado de la figura, en el que aparece un ángulo de 30º y otro de 60º. Para obtener sus razones previamente vamos a hallar por medio del teorema de Pitágoras la altura h:

$$1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

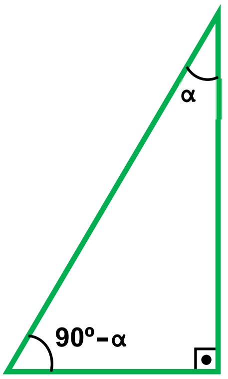
$$\text{sen } 30º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \qquad \cos 60º = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \qquad (7) \text{ y } (8)$$

$$\cos 30º = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{sen } 60º = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (9) \text{ y } (10)$$

$$\boxed{\text{tg } 30° = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}} \qquad \boxed{\text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}} \qquad (11) \text{ y } (12)$$

Todo esto se puede resumir en la siguiente tabla:

	30º	**45º**	**60º**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

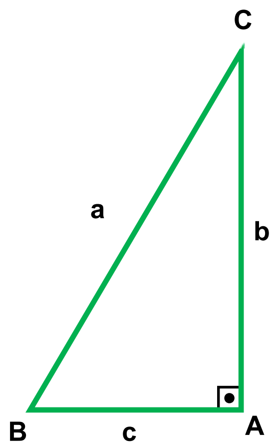


Observamos que $\text{sen } 30° = \cos 60°$ y que $\cos 30° = \text{sen } 60°$. Ello es debido a que ambos ángulos, 30º y 60º, son complementarios[3] (es decir, suman 90º). Este resultado vamos a utilizarlo muy a menudo a lo largo del tema:

Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios (i.e. suman 90º). «**Si dos ángulos son complementarios, entonces el seno de uno es el coseno del otro, y viceversa**»:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \cos(90° - \alpha) \\ \cos \alpha &= \text{sen}(90° - \alpha) \end{aligned}} \qquad (13)$$

IV) RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS (identidades trigonométricas)



Fórmula fundamental de la Trigonometría: $\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$ (14)

Demostración: Considerar el triángulo rectángulo de la figura:

$$\text{sen}^2 B + \cos^2 B = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \underset{\text{Th. de Pitágoras}}{=} \frac{a^2}{a^2} = 1 \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

De la relación fundamental de la Trigonometría se derivan otras dos fórmulas muy parecidas entre sí:

[3] Nótese que ello también ocurre con 45º y su complementario, 45º (él mismo).

$$\boxed{1+\text{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\sec^2\alpha \qquad \boxed{1+\text{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha}}=\text{cosec}^2\alpha \qquad (15)\text{ y }(16)$$

Demostración: Vamos a demostrar (15) (la otra fórmula se demuestra análogamente). Para ello, partimos de la relación fundamental, y dividimos ambos miembros por $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \text{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

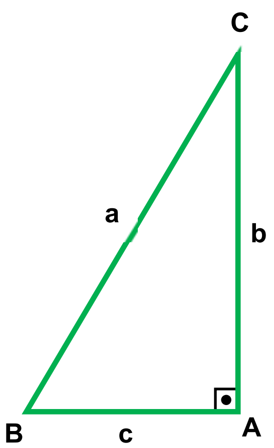
NOTA: En la práctica, apenas utilizaremos (16).

¿Cuál es la **utilidad** de estas identidades trigonométricas, que relacionan las distintas razones? Permiten, dada una razón trigonométrica, hallar las restantes, como podemos ver en los siguientes ejercicios:

Ejercicios final tema: 14 a 28

V) RESOLUCIÓN de TRIÁNGULOS

V.1) Resolución de triángulos rectángulos:



Considerar el triángulo rectángulo de la figura[4]. Todo triángulo tiene 6 elementos: 3 ángulos y 3 lados. Siempre nos van a dar 3 de esos elementos (en el caso de un triángulo rectángulo hay un dato implícito, $\hat{A}=90^\circ$), y **resolver un triángulo consiste en obtener los restantes 3 elementos**, mediante las siguientes herramientas matemáticas:

1º) $\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$, es decir, dado uno de los dos ángulos agudos, el otro es su complementario.

2º) $a^2=b^2+c^2$, es decir, el teorema de Pitágoras, que nos permite, conociendo dos lados, hallar el tercero. De todas formas, por cuestiones didácticas vamos a procurar no utilizarlo en la medida de lo posible, ya que es más rápido y práctico lo siguiente:

3º) Las relaciones trigonométricas anteriormente definidas. En la práctica utilizaremos sólo las tres directas:

$$\text{sen}B=\frac{b}{a}=\cos C \qquad \cos B=\frac{c}{a}=\text{sen}C \qquad \text{tg}B=\frac{b}{c} \qquad \text{tg}\,C=\frac{c}{b}$$

Ejercicios final tema: 29 a 37

[4] El criterio que se suele seguir es llamar **A** al ángulo recto, **B** y **C** a los dos ángulos agudos, y los lados con la letra minúscula del ángulo opuesto, es decir, **a** es la hipotenusa), y **b** y **c** los catetos.

V.2) Resolución de triángulos oblicuángulos:

Hay que trazar una de las tres alturas del triángulo, obteniéndose así dos triángulos rectángulos, como puede verse en los siguientes ejercicios:

Ejercicios final tema: 38 a 47 (Resolución triángulos no rectángulos)
48 a 81 (Problemas de planteamiento)

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos: ejercicios 82 a 88 final tema

Reseña histórica: Los griegos de la época alejandrina (a partir del siglo IV a.C.) desarrollaron la Trigonometría esférica -la cual incluye ideas básicas de la Trigonometría plana- debido, sobre todo, a la idea de cuantificar la astronomía: predecir las posiciones de los cuerpos celestes, medir el tiempo, el calendario, la navegación y la geografía.

El primer gran astrónomo alejandrino fue **Aristarco** (ca. 310-230 a.C.), que utilizó la geometría para medir distancias y tamaños relativos entre cuerpos celestes. **Hiparco de Nicea** (ca. 190−120 a.C.) fue el primero en construir tablas trigonométricas, aplicándolas al estudio de la bóveda celeste. Se le considera el fundador de la Trigonometría.

Ptolomeo de Alejandría (ca. 100−170), responsable del modelo de sistema solar geocéntrico que estaría vigente durante muchos siglos, escribe hacia el año 150 el *Almagesto*, el libro más importante de Trigonometría de la antigüedad. Continuador de la obra de Hiparco y Menelao, en él se mezclan Trigonometría y Astronomía. Recoge, entre otras, las fórmulas del seno de la suma y de la resta de dos ángulos, así como la del seno del ángulo mitad. Ello le permite construir unas completas tablas trigonométricas. Este libro pone la Trigonometría en su forma definitiva, que perdurará alrededor de mil años.

Durante toda la Edad Media no se produce ningún avance sustancial en este campo. Como curiosidad, Roberto de Chester (s. XII) es el responsable de la actual palabra "seno", al traducir incorrectamente del árabe un cierto término, que él entendió como "sinus" (bahía o ensenada, en latín).

Hasta 1450 la Trigonometría sobre todo era esférica, pero a partir de esa fecha empezó a tener importancia la Trigonometría plana, de la mano de los alemanes. Johann Müller (1436-1476), más conocido como "**Regiomontano**", expone los conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, resuelve problemas de triángulos y aborda la Trigonometría esférica. Construyó tablas de senos y tangentes bastante exhaustivas. Tradujo directamente del griego.

El alemán **Georg Joachim Rheticus** (1514-1576), alumno de Copérnico, combinó los avances anteriores para construir detalladas tablas de funciones trigonométricas. A él se debe la noción actual de seno, y la utilización de las seis funciones trigonométricas. Posteriormente, figuras como el alemán Johannes Werner (1560-1622), el francés François Vieta (1540-1603) et al. reunirán y sistematizarán los conocimientos anteriores.

88 EJERCICIOS de TRIGONOMETRÍA 4º ESO Acad.

Grados y radianes:

1. Pasar los siguientes ángulos a radianes:

a) 30º **b)** 45º **c)** 60º **d)** 90º **e)** 180º **f)** 270º **g)** 360º

h) 135º **i)** 235º **j)** 75º

*(Sol: **a)** π/6 rad; **b)** π/4 rad; **c)** π/3 rad; **d)** π/2 rad; **e)** π rad; **f)** 3π/2 rad; **g)** 2π rad; **h)** 3π/4 rad; **i)** 47π/36 rad; **j)** 5π/12 rad)*

2. Pasar los siguientes ángulos, expresados en radianes, a grados sexagesimales:

a) 2π/3 rad **b)** π/5 rad **c)** 4π/3 rad **d)** 3π/4 rad **e)** 5π/6 rad **f)** π/10 rad **g)** 0,2 rad

h) 1 rad *(Sol: **a)** 120º; **b)** 36º; **c)** 240º; **d)** 135º; **e)** 150º; **f)** 18º; **g)** ≅ 11º 27' 33''; **h)** ≅ 57º 17' 45'')*

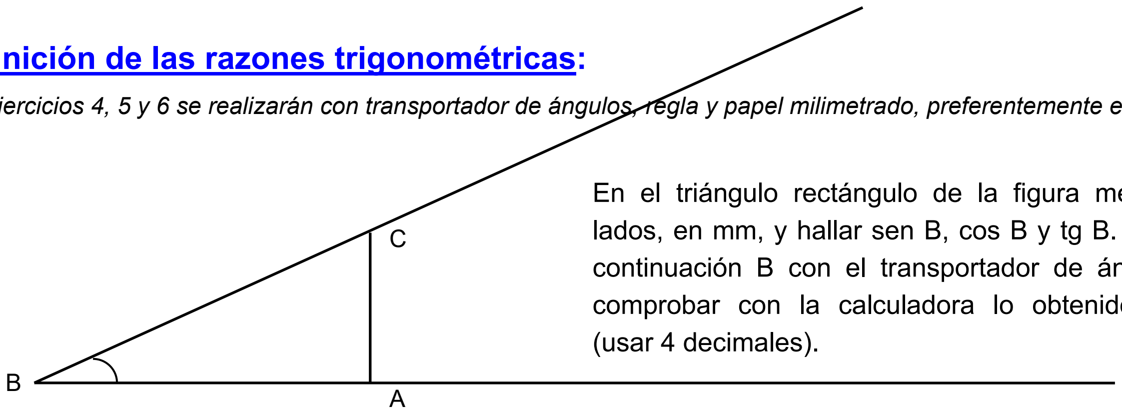
3. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

Grados	105º		320º		305º		35º
Radianes		4π/9 rad		7π/15 rad		16π/3 rad	

Definición de las razones trigonométricas:

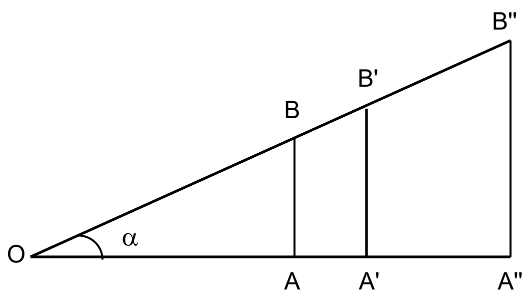
Los ejercicios 4, 5 y 6 se realizarán con transportador de ángulos, regla y papel milimetrado, preferentemente en casa.

4.



En el triángulo rectángulo de la figura medir sus lados, en mm, y hallar sen B, cos B y tg B. Medir a continuación B con el transportador de ángulos y comprobar con la calculadora lo obtenido antes (usar 4 decimales).

5.



Comprobar en la figura adjunta que el sen α sólo depende del ángulo y no del triángulo (usar 4 decimales).

6. Utilizando el transportador de ángulos, dibujar sobre papel milimetrado un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 30º, y medir a continuación sus lados para obtener sen 30º, cos 30º y tg 30º; comparar finalmente los valores obtenidos con los que proporciona la calculadora (usar 4 decimales).

7. Utilizar la calculadora para obtener, con cuatro decimales bien aproximados, las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 75º **b)** cos 40º **c)** tg 75º 23' **d)** sen 23º 5' 24'' **e)** cos 18º 32' 37''

f) sec 27º **g)** cosec 36º **h)** tg 35º 30' **i)** ctg 32º 25'13'' **j)** tg 90º

k) cosec 67º 34' 23'' **l)** sen π/3 rad **m)** cos 2π/5 rad **n)** tg π/4 rad **o)** sen 120º

p) cos 120º **q)** sen 225º **r)** tg 225º **s)** tg 45º **t)** cos π rad

8. **TEORÍA**: ¿Puede ser el seno o el coseno de un ángulo mayor que 1? ¿Y la tangente? ¿Hay alguna restricción para la secante o cosecante? *(Soluc: NO; SÍ; siempre son mayores que 1)*

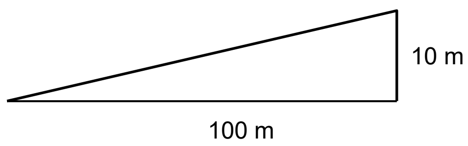
9. Hallar α en los siguientes casos (en grados sexagesimales), utilizando la calculadora solamente cuando sea estrictamente necesario:

a) sen α=0,8 **b)** tg $\alpha=\sqrt{3}$ **c)** cos $\alpha=\sqrt{3}/2$ **d)** sen α=1/2 **e)** cos α=1,5

f) tg α=1,5 **g)** sen α=1 **h)** cos α=1 **i)** sen α=0 **j)** cos α=0

k) sec α=2 **l)** ctg $\alpha=\sqrt{3}/3$ **m)** cosec $\alpha=2\sqrt{3}/3$ **n)** sec α=1

10. Cuando una señal de tráfico indica que la pendiente de una carretera es p. ej. del 10 %, quiere decir que por cada 100 m de trayecto horizontal[1] la carretera asciende 10 m. Comprobar que la pendiente de una carretera coincide entonces con la tangente del ángulo de inclinación α. ¿Cuánto vale tg α en ese ejemplo? *(Soluc: tg α=0,1)*



11. Supongamos que ascendemos por una carretera de montaña cuya pendiente media es del 7 % durante 10 km. ¿Cuánto hemos ganado en altitud? *(Soluc: $\cong$ 698 m)*

12. Un puerto mítico en el ciclismo es el *Galibier*, situado en los Alpes franceses. A lo largo de los últimos cien años se han escrito allí algunas de las páginas más gloriosas del ciclismo. Por una de sus vertientes la ascensión comienza en Le Monêtier-Les-Bains, que está a 1470 m sobre el nivel del mar, y se alcanzan los 2645 m del Galibier, después de recorrer 22,5 km. ¿Cuál es su pendiente media?

13. **TEORÍA**: ¿Puede existir un ángulo tal que su tangente y su coseno sean iguales? Razonar la respuesta. *(Soluc: NO)*

[1] A veces, sin ser tan puristas, se suele entender que los 100 m son medidos, no en horizontal, sino sobre la propia carretera. Ver:
http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/trigonometria/pendiente_carretera/actividad.html

Relaciones entre las razones trigonométricas:

14. **a)** Comprobar la relación fundamental con 30º, 45º y 60º (sin utilizar decimales ni calculadora)

b) Comprobar, mediante calculadora, la relación fundamental para 17º

15. Comprobar la relación $1+\mathrm{tg}^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$ con 30º, 45º y 60º (sin utilizar decimales ni calculadora)

16. De un ángulo agudo se sabe que su seno es 3/5. Mediante identidades trigonométricas, hallar sus restantes razones. *(Soluc: cos α=4/5; tg α=3/4)*

17. Sabiendo que cos α = 0,2, hallar sus restantes razones: **a)** mediante identidades trigonométricas; **b)** mediante calculadora. *(Soluc: sen $\alpha=2\sqrt{6}/5$, tg $\alpha=2\sqrt{6}$)*

18. De un ángulo agudo se sabe que su tangente vale 2. Mediante identidades trigonométricas, hallar sus restantes razones. *(Soluc: sen $\alpha=2\sqrt{5}/5$; cos $\alpha=\sqrt{5}/5$)*

19. Dado un ángulo agudo α, encontrar, aplicando identidades trigonométricas, las restantes razones, sabiendo que:

a) sen α=5/6 **b)** cos α=5/12 **c)** tg α=5/12 **d)** ctg $\alpha=\sqrt{6}/2$ **e)** sec $\alpha=\sqrt{5}$ **f)** sen α=2/3

g) cos α=1/3 **h)** tg α=4/3 **i)** cosec $\alpha=\sqrt{5}$ **j)** cosec $\alpha=3\sqrt{2}/2$ **k)** sec $\alpha=\sqrt{7}$

*(Soluc: **a)** cos $\alpha=\sqrt{11}/6$, tg $\alpha=5\sqrt{11}/11$; **b)** sen $\alpha=\sqrt{119}/12$, tg $\alpha=\sqrt{119}/5$; **c)** sen α=5/13, cos α=12/13; **d)** sen $\alpha=\sqrt{10}/5$, cos $\alpha=\sqrt{15}/5$, tg $\alpha=\sqrt{6}/3$; **e)** sen $\alpha=2\sqrt{5}/5$, cos $\alpha=\sqrt{5}/5$, tg α=2; **f)** cos $\alpha=\sqrt{5}/3$, tg $\alpha=2\sqrt{5}/5$; **g)** sen $\alpha=2\sqrt{2}/3$, tg $\alpha=2\sqrt{2}$; **h)** sen α=4/5, cos α=3/5; **i)** sen $\alpha=\sqrt{5}/5$, cos $\alpha=2\sqrt{5}/5$, tg α=1/2; **j)** sen $\alpha=\sqrt{2}/3$, cos $\alpha=\sqrt{7}/3$, tg $\alpha=\sqrt{14}/7$; **k)** sen $\alpha=\sqrt{42}/7$, cos $\alpha=\sqrt{7}/7$, tg $\alpha=\sqrt{6}$)*

20. Dado un ángulo agudo α tal que $\mathrm{ctg}\,\alpha=\sqrt{11}$, se pide:

a) Hallar, aplicando identidades trigonométricas, sen α, cos α y tg α (resultados racionalizados) *(Soluc: sen $\alpha=\sqrt{3}/6$, cos $\alpha=\sqrt{33}/6$, tg $\alpha=\sqrt{11}/11$)*

b) Obtener, mediante calculadora, de qué α se trata. *(Soluc: $\alpha\cong$ 16º 46' 43'')*

21. Dado un ángulo α tal que $\mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, se pide:

a) Hallar, aplicando identidades trigonométricas, sen α, cos α y tg α (resultados racionalizados)

b) Obtener, <u>sin calculadora</u>, de qué α se trata. *(Soluc: sen $\alpha=\sqrt{3}/2$, cos α=1/2, tg $\alpha=\sqrt{3}$; α=60º)*

22. **a)** Dado $\cos\alpha=\sqrt{6}/3$ obtener, mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas, sen α y tg α, dando los resultados simplificados y racionalizados (no se puede utilizar decimales). *(sen $\alpha=\sqrt{3}/3$, tg $\alpha=\sqrt{2}/2$)*

b) Averiguar, mediante calculadora, de qué ángulo α se trata, explicando el resultado. *(Sol: $\alpha\cong$ 35º 15' 52'')*

23. **a)** Dada $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}/2$ obtener, mediante las correspondientes fórmulas trigonométricas, sen α, cos α y ctg α (Dar los resultados simplificados y racionalizados; no se puede utilizar decimales)

(Soluc: sen $\alpha=\sqrt{21}/7$, cos $\alpha=2\sqrt{7}/7$, ctg $\alpha=2\sqrt{3}/3$)

b) Averiguar razonadamente, mediante calculadora, α *(Soluc: $\alpha\cong$ 40º 53' 36'')*

24. Dado un ángulo agudo α tal que $\sec\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, se pide:

a) Hallar, aplicando identidades trigonométricas, sen α, cos α y tg α (resultados racionalizados)
(Soluc: sen $\alpha=\sqrt{7}/3$, cos $\alpha=\sqrt{2}/3$, tg $\alpha=\sqrt{14}/2$)

b) Obtener, mediante calculadora, de qué α se trata. *(Soluc: $\alpha\cong$ 61º 52' 28'')*

25. Dada ctg α=2, hallar sen α, cos α y tg α mediante identidades trigonométricas y sin utilizar decimales. ¿Cuánto vale α? *(Soluc: sen $\alpha=\sqrt{5}/5$, cos $\alpha=2\sqrt{5}/5$, tg α=1/2; $\alpha\cong$ 26º 33' 54'')*

26. **a)** Dada $\sec\alpha=\sqrt{2}$, hallar, mediante identidades trigonométricas, sen α, cos α y tg α (No vale utilizar decimales)

b) ¿De qué ángulo α se trata? *(Soluc: sen $\alpha=\sqrt{2}/2$, cos $\alpha=\sqrt{2}/2$, tg α=1; α=45º)*

27. **a)** ¿Puede existir un ángulo tal que sen α =1/5 y cos α =3/5? (no vale calculadora)

b) Ídem para tg α=4/3 y cos α=3/5

28. **a)** Dado un ángulo α tal que $\text{ctg}\,\alpha=\sqrt{3}$, obtener, mediante fórmulas trigonométricas, sen α, cos α y tg α

b) Obtener, sin calculadora, α *(Soluc: sen α=1/2, cos $\alpha=\sqrt{3}/2$, tg $\alpha=\sqrt{3}/3$; α=30º)*

Resolución de triángulos rectángulos:

29. Resolver los siguientes triángulos, rectángulos en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

a) a=320 m, B=47º *(Soluc: C=43º; b≅234,03 m; c≅218,24 m; S_{ABC}≅25537,64 m²)*

b) b=32,8 cm, B=22º *(Soluc: C=68º; a≅87,56 cm; c≅81,18 cm; S_{ABC}≅1331,40 cm²)*

c) a=42,5 m, b=35,8 m *(Soluc: B≅57º23'22''; C≅32º36'38''; c≅22,90 m; S_{ABC}≅409,99 m²)*

d) b=8 mm, c=6 mm *(Soluc: B≅53º7'48''; C≅36º52'12''; a=10 mm; S_{ABC}=24 mm²)*

e) c=42,7 dam, C=31º *(Soluc: B=59º; a≅82,91 dam; b≅71,06 dam; S_{ABC}≅1517,23 dam²)*

f) a=8 km, b=6 km *(Soluc: B≅48º35'25''; C≅41º 24'35''; c≅5,29 km; S_{ABC}≅15,87 km²)*

g) a=13 m, c=5 m *(Soluc: B≅67º22'48''; C≅22º37'12''; b=12 m; S_{ABC}=30 m²)*

h) c=124 dm, B=67º 21' *(Soluc: C≅22º39'; a≅321,99 dm; b≅297,16 dm; S_{ABC}≅18423,90 dm²)*

i) a=12,65 cm, C=48º 10' *(Soluc: B=41º50'; b≅8,44 cm; c≅9,43 cm; S_{ABC}≅39,76 cm²)*

j) a=75 m, C=35º *(Soluc: B=55º; b≅61,44 m; c≅43,02 m; S_{ABC}≅1321,44 m²)*

k) b=36, C=35º *(Soluc: B=55º; a≅43,95; c≅25,21; S_{ABC}≅453,73)*

l) a=15 mm, b=12 mm *(Soluc: B≅53º7'48''; C≅36º52'12''; c=9 mm; S_{ABC}=54 mm²)*

m) b=24 m, c=8 m *(Soluc: B≅71º33'54''; C≅18º 26'; a≅25,30 m)*

n) b=12 cm, c=4 cm *(Soluc: B≅71º33'54''; C≅18º26'; a≅12,65 cm)*

o) b=212 m, c=165 m *(Soluc: B≅52º6'23''; C≅37º53'37''; a≅268,64 m; S_{ABC}=17490 m²)*

p) B=35º, a=4 cm *(Soluc: C=55º; b≅2,30 cm; c≅3,28 cm; S_{ABC}≅3,77 cm²)*

q) b=5 cm, B=80º *(Soluc: C=10º; a≅5,1 cm; c≅0,9 cm)*

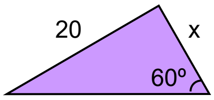
r) a=28 cm, C=4º *(Soluc: B=86º; b≅27,93 cm; c≅1,95 cm; S_{ABC}≅27,27 cm²)*

30. Dibujar aproximadamente un triángulo de datos: A=90º, b=$\sqrt{3}$, c=1, y resolverlo <u>sin calculadora</u>.

(Soluc: a=2, B=60º, C=30º)

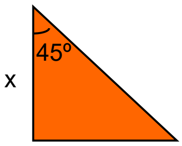
31. Hallar el valor del lado x en los siguientes triángulos rectángulos:

a)



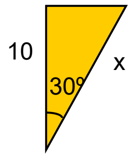
(Soluc: x≅11,55)

b)



(Soluc: x=15)

c)



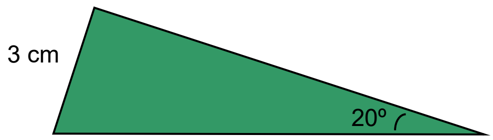
(Soluc: x≅11,55)

32. Resolver un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm y uno de sus catetos 1 cm. Hallar su área. *(Soluc: ≅ 19º 28' 16'', ≅ 70º 31' 44'', ≅ 2,83 cm; S ≅ 1,41 cm²)*

33. Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 5 y 12 cm. Hallar sus restantes elementos y calcular su área. *(Soluc: 13 cm; ≅ 67º 22' 48'', ≅ 22º 37' 12'', S = 30 cm²)*

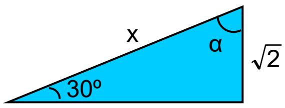
34. En el triángulo rectángulo de la figura, calcular los elementos desconocidos y obtener su área:

(Soluc: ≅ 8,77 y 8,24 cm, S = 12,36 cm²)

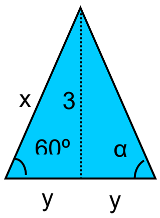


35. Hallar las incógnitas en los siguientes triángulos (**no utilizar calculadora** sino raíces, dando además el resultado racionalizado):

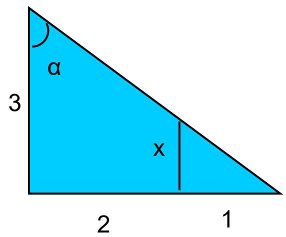
a)



b)



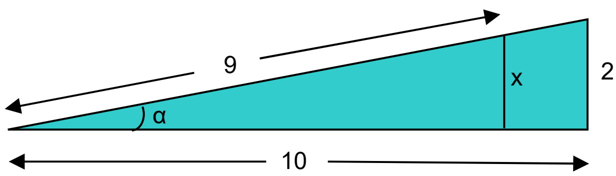
c)



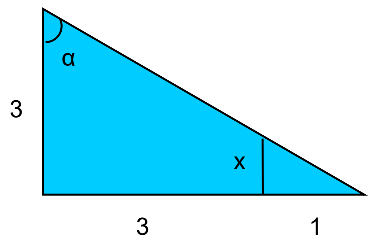
*(Soluc: **a)** α=60º, $x=2\sqrt{2}$; **b)** α=60º, $x=2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$; **c)** α=45º, x=1)*

36. Ídem, pero con calculadora:

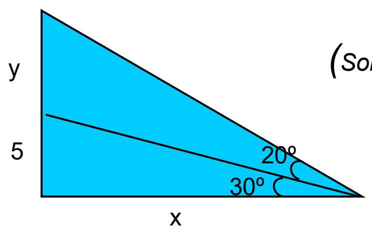
a)



b)



c)

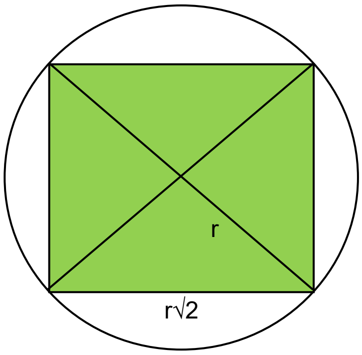


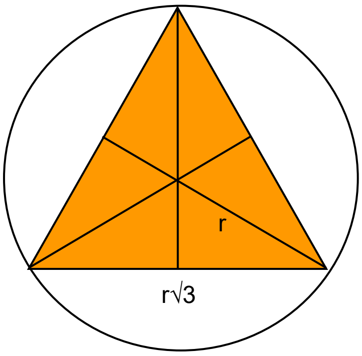
*(Soluc: **a)** α ≅ 11º 18' 36''; x ≅ 1,77 **b)** α≅53º7'48''; x=0,75 **c)** x ≅ 8,66; y ≅ 5,32)*

37. TEORÍA: a) Probar que si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 60º, entonces la hipotenusa es igual al doble del cateto menor.

b) Demostrar que el cuadrado construido sobre la diagonal de un cuadrado cualquiera tiene siempre un área doble que la del cuadrado original.

c) Cuando el gran sabio griego Tales de Mileto viajó a Egipto, le fue preguntado cuál podría ser la altura de la pirámide de Keops, por supuesto desconocida y jamás medida. Tales reflexionó unos segundos y contestó así: «Me echaré sobre la arena y determinaré la longitud de mi cuerpo. Después, me pondré en un extremo de esta línea que mide mi longitud y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide ha de medir tantos pasos como su altura». Justificar la genial respuesta del gran sabio.





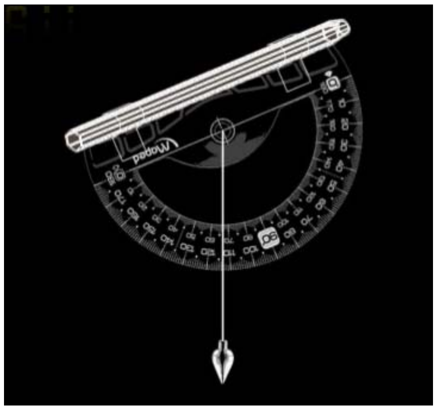
d) Demostrar que el lado del cuadrado inscrito (ver figura dcha.) en una circunferencia de radio **r** mide r√2.

e) Demostrar que el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia (ver figura izda.) de radio **r** mide *r√3.*

f) Si un rectángulo tiene mayor perímetro que otro, ¿necesariamente tendrá mayor área? Indicar ejemplos. *(Soluc: no necesariamente)*

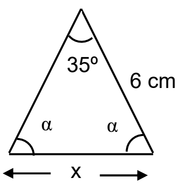
g) Utilización de un clinómetro para medir la altura de un árbol: Un clinómetro es un instrumento que se utiliza para medir visuales, tal y como indica la figura. Justificar el siguiente método para medir la altura de un árbol: 1º) Miramos a través del visor la última hoja de la copa del árbol. 2º) Nos acercamos o alejamos hasta que el instrumento señale un ángulo de 45º, y en ese momento nos paramos. 3º) La altura **h** del árbol será la distancia que hay desde los pies a la base del árbol, **a**, más la altura desde los pies a los ojos, **b**:

$$h=a+b$$



Resolución de triángulos oblicuángulos:

38.

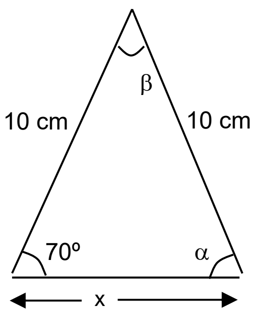


En el triángulo de la figura, trazar la altura **h** correspondiente a x y hallar:

a) α y x *(Soluc: $\alpha \cong 72º\ 30'$; $x \cong 3{,}61$ cm)*

b) h y área *(Soluc: $h \cong 5{,}72$ cm; $S \cong 10{,}32\ cm^2$)*

39.



En el triángulo de la figura, trazar la altura **h** correspondiente a x y hallar:

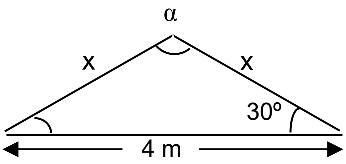
a) α y β

b) altura h

c) base x

d) área *(Soluc: α=70º, β=40º, h≅9,4 cm, x≅6,84 cm; S≅32,14 cm^2)*

40. Dado el triángulo de la figura, trazar la altura **h** correspondiente al lado de 4 m y hallar:



a) El ángulo desigual α

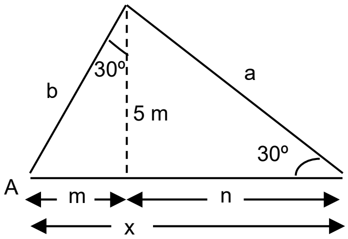
b) Los lados iguales x

c) La altura h

d) El área del triángulo.

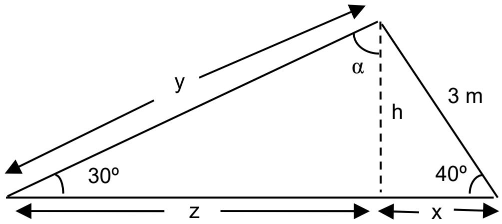
(Soluc: α=120º, x≅2,31 m, h≅1,15 m; S≅2,31 m^2)

41.



En el triángulo de la figura, calcular: **A**, **b**, **m**, **n**, **a** y **x**. Hallar su área.
(Soluc: A=60º, b ≅ 5,77 m, m ≅ 2,89 m, n ≅ 8,66 m, a=10 m, x ≅ 11,55 m; S ≅ 28,87 m^2)

42.



Dado el triángulo de la figura se pide:

a) Hallar α, h, x, y, z

b) Calcular su área.

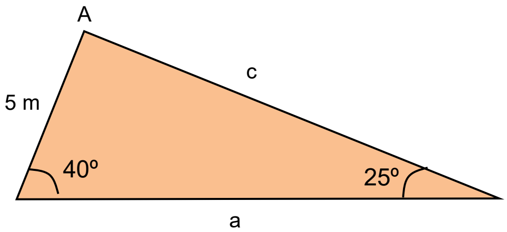
(Soluc: α = 60º, h≅ 1,93m, x ≅ 2,30m, y ≅ 3,86m, z ≅ 3,34m; S ≅ 5,44m^2)

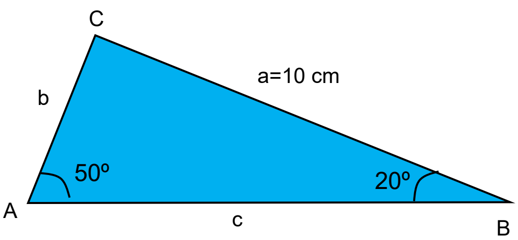
43. TEORÍA: ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? Dibujar un triángulo acutángulo, y trazar sus tres alturas. ¿Qué ocurre si el triángulo es obtusángulo?

44. a) Resolver el triángulo de la figura derecha –es decir, hallar A, a y c–, trazando para ello previamente la altura correspondiente al lado a.

b) Hallar su área.

(Soluc: A = 115º, a ≅ 10,72m, c ≅ 7,60m, S ≅ 17,21m^2)





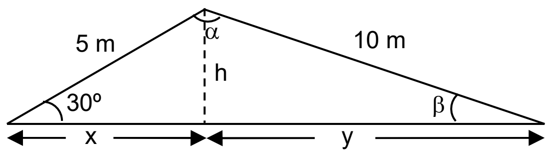
45. En el triángulo de la figura izquierda hallar C, b y c, trazando para ello previamente una altura. Hallar también su área.

(Soluc: C = 110º, b ≅ 4,46cm, c ≅ 12,27cm, S ≅ 20,98cm^2)

46. En el triángulo de la figura, se pide: **a)** Hallar h, x, y, α y β

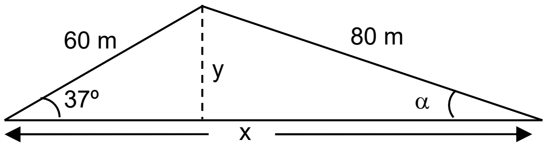
b) Calcular su área.

(Soluc: h≅2,5m; x≅4,33m; y≅9,68m; α≅135º31'20''; β≅14º28'39''; A≅17,52m^2)



47. Hallar α, x e y en el triángulo de la figura (No vale aplicar el teorema de Pitágoras):

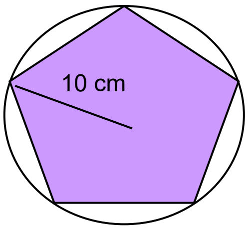
(Soluc: $x\cong 119{,}31\,m$; $\alpha\cong 26^{\circ}49'52''$; $y\cong 36{,}11\,m$)



Problemas de planteamiento:

48. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 20 cm y cada uno de los ángulos iguales mide 25º. Resolver el triángulo y calcular su área. *(Soluc: α=130º, x≅36,25 cm; S≅153,21 cm^2)*

49.



Si el radio de un pentágono regular mide 10 cm, ¿cuánto mide el lado? ¿Cuál es su área?

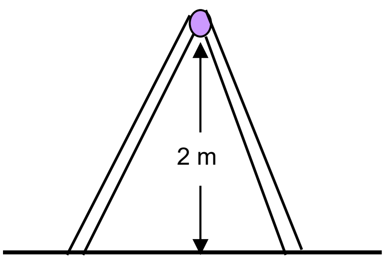
(Soluc: ≅ 11,76 cm y ≅237,76 cm^2 respectivamente)

50. Calcular el valor de la apotema de un decágono regular de lado 20 cm. ¿Cuál es su área? Comprobar que se verifica la fórmula ***S=p·a/2***, donde ***p*** es el perímetro y ***a*** la apotema.

51. Calcular el área de un decágono regular y de un octógono regular, ambos de 6 cm de lado. ¿Cuál es mayor? *(Soluc: ≅276,99 cm^2 y 173,82 cm^2)*

52. Determinar la superficie de un hexágono regular inscrito en un círculo de 9 cm de radio.

53.



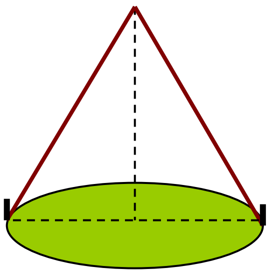
Un carpintero quiere construir una escalera de tijera cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de 60º. Si la altura de la escalera, estando abierta, es de 2 metros, ¿qué longitud deberá tener cada brazo? *(Soluc: ≅ 2,31 m)*

54. Un niño está haciendo volar su cometa. Ha soltado ya la totalidad del hilo, 47 m, y observa que el ángulo que forma la cuerda con el suelo es aproximadamente 45º. ¿A qué altura se encuentra la cometa? *(Soluc: ≅ 33,23 m)*

55. Calcular la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman 50º con el suelo. *(Soluc: ≅ 15,49 m)*

56. Desde lo alto de un faro colocado a 40 m sobre el nivel del mar se ve un barco formando un ángulo de 55º con la horizontal. ¿A qué distancia de la costa se halla el barco? *(Soluc: ≅ 28 m)*

57. Un avión vuela a 350 m de altura, observando el piloto que el ángulo de depresión del aeropuerto próximo es de 15º. ¿Qué distancia respecto a la vertical le separa del mismo en ese instante? *(Soluc: ≅ 1306 m)*

58. 

Una tienda de campaña tiene forma cónica. La parte central tiene una altura de 4 m y está sujeta en el suelo con dos cables de 12 m de longitud. Calcular:

a) El ángulo que forman los cables con el suelo.

b) La distancia entre los dos puntos de anclaje (Sin aplicar el teorema de Pitágoras).

(Soluc: ≅19º 28' 16''; ≅22,63 m)

59. En un tramo de carretera la pendiente es del 6%. ¿Cuánto asciende un ciclista que recorra un kilómetro? *(Soluc: 60 m)*

60. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30º. Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada?

(Soluc: anchura≅15,73 m; altura 7,07 y 5 m respectivamente)

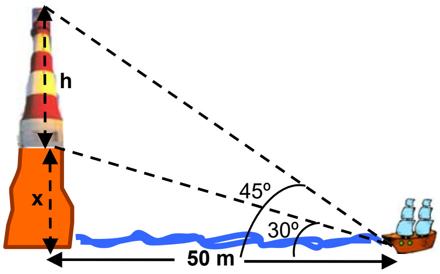
61. Si las puntas de un compás, abierto, distan 6,25 cm y cada rama mide 11,5 cm, ¿qué ángulo forman? *(Soluc: ≅ 31º 32')*

62. Una escalera de 4 metros está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 metros de la pared? *(Soluc: 60º)*

63. De un triángulo rectángulo se sabe que un ángulo agudo mide 45º y uno de sus catetos 5 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto, la hipotenusa y el otro ángulo agudo? *(Soluc: 5 cm, ≅ 7,07 cm, 45º)*

64. Calcular los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 8 cm. *(Soluc: 112º 37' y 67º 23')*

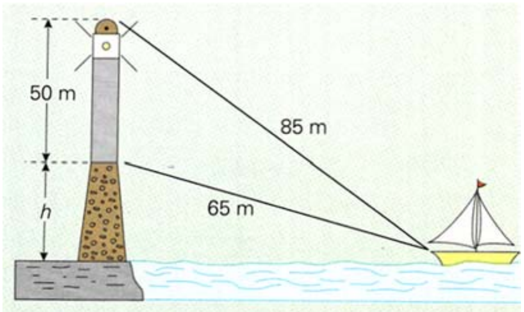
65. La base de un triángulo isósceles mide 54 cm y los ángulos en la base 42º. Calcular los lados iguales, la altura y el área. *(Soluc: ≅ 36,3 cm, ≅24,3 cm y ≅656,1 cm²)*

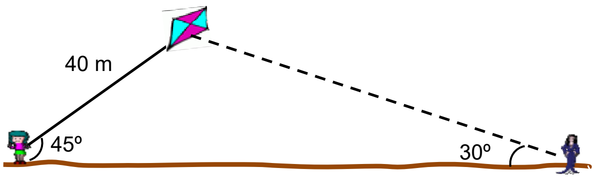


66. Si la sombra de un poste es la mitad de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el suelo? *(Sol: 63º 26')*

67. En la figura de la izquierda, hallar la altura del acantilado, x, y la del faro, h. *(Sol: 28,87 y 21,13 m, respectivamente)*

68. En la figura adjunta aparece un faro situado sobre un promontorio. Hallar la altura, h, de éste último. (Ayuda: Aplicar el teorema de Pitágoras dos veces) *(Sol: 5 m)*

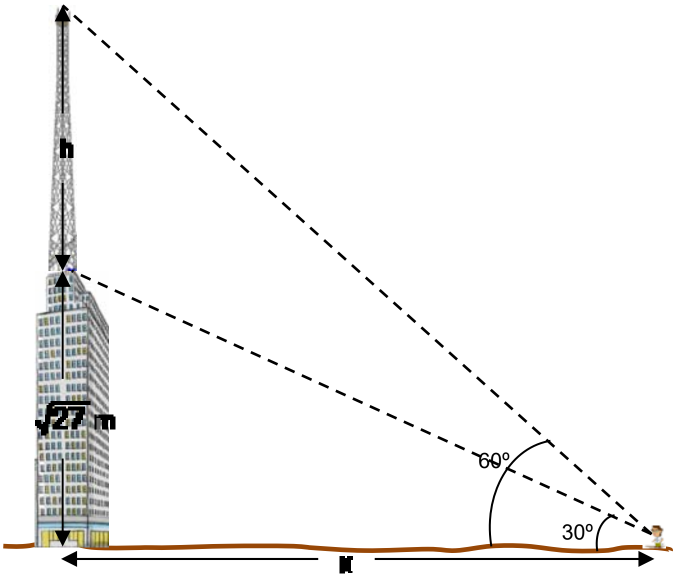


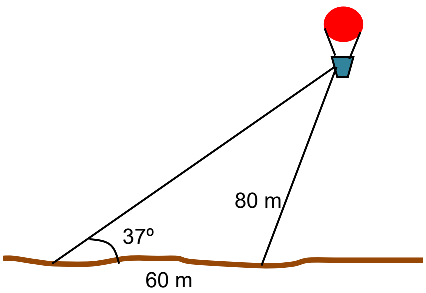


69. Una niña sostiene una cometa de 40 m de hilo con un ángulo de 45º respecto a la horizontal. Desde un punto opuesto su madre observa la cometa bajo un ángulo de 30º. Hallar la altura a la que está la cometa, y la distancia entre madre e hija. Resultados en forma radical, no decimal, y racionalizados.

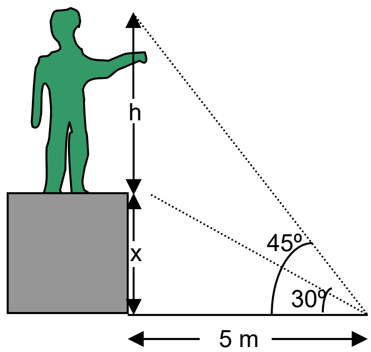
[Sol: altura=$20\sqrt{2}$ m; distancia=$20(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ m]

70. Un observador ve la azotea de un edificio de $\sqrt{27}$ m de altura bajo un ángulo de 30º, y la parte superior de la antena construida sobre el anterior con un ángulo de 60º (ver figura). Hallar la distancia del observador al pie del edificio y la altura de la antena (resultados lo más simplificados posibles, y sin usar decimales sino radicales). *(Sol: x=9 m; h=$6\sqrt{3}$ m)*





71. (*) Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. (*Ayuda: Trazar la altura correspondiente al lado del cable más extenso).* *(Soluc: ≃71,80m; ≃119,31m)*

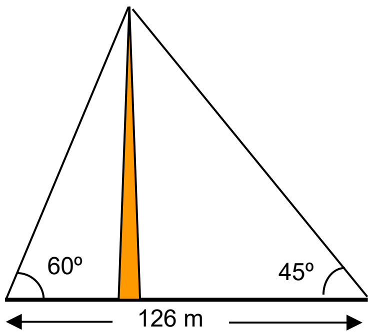


Método de doble observación:

72. Desde un punto del suelo situado a 5 m de la base de un pedestal se ve la parte superior de éste bajo un ángulo de 30º, mientras que la parte superior de la estatua que descansa sobre él se ve bajo un ángulo de 45º (ver figura). Hallar la altura del pedestal y de la estatua.
(Soluc: ≃ 2,89 m y ≃2,11 m respectivamente)

73. Queremos conocer el ancho de un río y la altura de un árbol inaccesible que está en la orilla opuesta. Para ello nos situamos en la orilla del río y vemos la copa del árbol bajo un ángulo de 41º. A continuación retrocedemos 25 m y vemos ahora el árbol bajo un ángulo de 23º. Hallar el ancho del río y la altura del árbol. *(Soluc: ≃ 23,86 m y ≃20,74 m respectivamente)*

74. Considerar el triángulo de datos: a=10 m, B=30º, C=45º. Resolverlo, trazando previamente la altura correspondiente al lado a, y hallar su área. (Ayuda: Plantear un sistema de ecuaciones)
(Soluc: A = 105º, b ≃ 5,18 m, c ≃ 7,32 m, S ≃ 18,3 m^2)



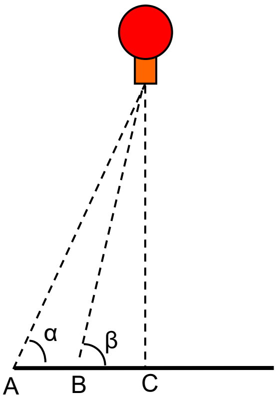
75. Una antena está sujeta al suelo por dos cables de acero, como indica la figura izquierda. Calcular la altura de la antena y la longitud de los dos cables.
(Soluc: ≅79,88 m, ≅92,24 m, ≅112,97 m respectivamente)

76. Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, este ángulo se hace de 60º. Hallar la altura de la torre. *(Soluc: ≅ 64,95 m)*

77. Desde un barco se ve la cima de un acantilado bajo un ángulo de 70º respecto a la horizontal. Al alejarse 100 m, el ángulo disminuye a 30º. Hallar la altura del acantilado. *(Soluc: ≅ 73,10 m)*

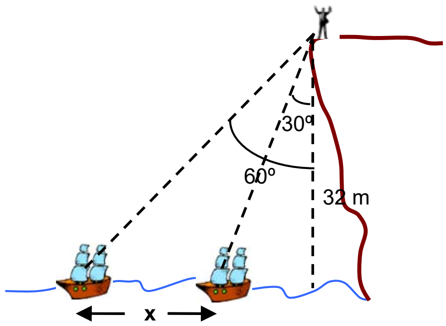
78. Dos edificios gemelos distan 150 m. Desde un punto que está entre los dos vemos que las visuales a los puntos más altos forman con la horizontal ángulos de 35º y 20º respectivamente. Hallar la altura de ambos edificios. ¿A qué distancia estamos de cada edificio? *(Soluc: ≅51,3 m y 98,7 m respectivamente; ≅35,9 m)*

79. Calcular la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas: 1º) El ángulo que forma la visual hacia la luz con el horizonte es de 25º 2º) Nos alejamos 200 m y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10º *(Soluc: ≅56,7 m)*



80. Para hallar la altura a la que está situado un globo, Rosa se coloca en un punto B y Carlos en un punto A, a 5 m de ella, de tal forma que los puntos A, B y C están alineados. Si los ángulos α y β miden 45º y 50º respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo? *(Soluc: ≅31,08 m)*

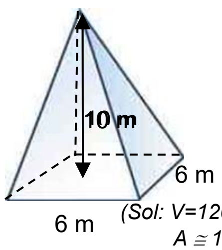
81. Sobre un acantilado de 32 m de altura un observador divisa dos embarcaciones, bajo ángulos de 30º y 60º respecto a la vertical. Hallar la distancia que las separa.
(Soluc: ≅36,95 m)



Problemas de volúmenes y áreas de cuerpos geométricos:

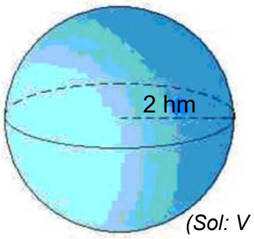
82. Nombrar las siguientes figuras y hallar los elementos que faltan y su volumen. Hallar (salvo el g) también su área:

a)



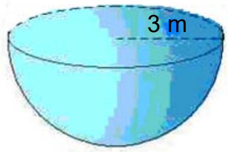
(Sol: V=120 m³; A ≅ 161,28 m²)

b)



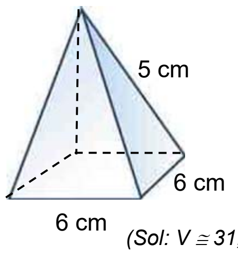
(Sol: V ≅ 33,51 hm³; A ≅ 50,27 hm²)

c)



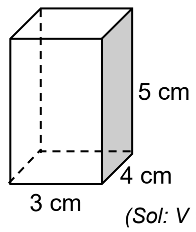
(Sol: V ≅ 56,55 m³; A ≅ 113.09 m²)

d)



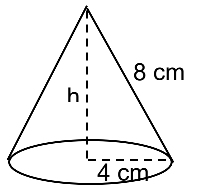
(Sol: $V \cong 31,75$ cm^3; $A = 84$ cm^2)

e)



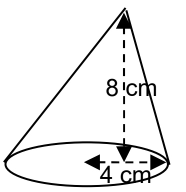
(Sol: $V = 60$ cm^3; $A = 94$ cm^2)

f)



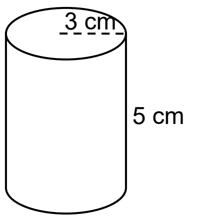
(Sol: $h \cong 6,93$ cm; $V \cong 116.08$ cm^3)

g)



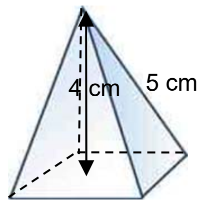
(Sol: $V \cong 134,04$ cm^3)

h)



(Sol: $V \cong 141,37$ cm^3; $A \cong 150,80$ cm^2)

i)



(Sol: V=24 cm^3; $A \cong 56,42$ cm^2)

83. Hallar el área de una pirámide recta, cuya base es un triángulo equilátero, de arista básica 2 cm y arista lateral 6 cm. (*) Hallar también su volumen. *(Soluc: 41 cm^2)*

84. Hallar el área de una pirámide triangular recta con aristas laterales de 6 mm, y con base un triángulo equilátero de 4 mm de lado. (Ayuda: hallar primero la apotema de una cara lateral) *(Soluc: 40,87 mm^2)*

85. **(*)** Dibujar una pirámide cuadrangular regular recta de base 6 cm y apotema 8 cm. Hallar: altura, superficie y volumen. *(Soluc: 5 cm; 60 cm^3; 132 cm^2)*

86. (*) Hallar el volumen de una pirámide cuadrangular recta de arista lateral 10 mm y altura 5 mm. *(Soluc: 250 mm^3)*

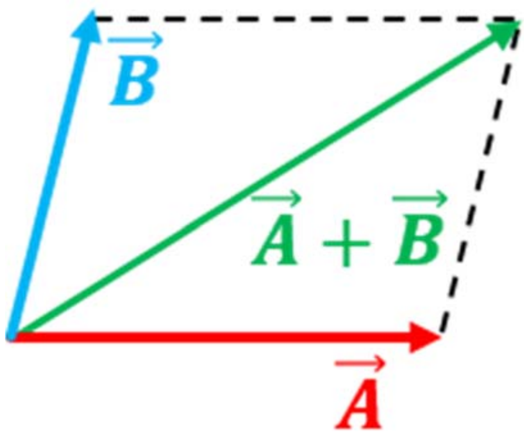
87. **(*)** Dibujar una pirámide hexagonal regular recta de base 6 cm y apotema lateral 12 cm. Hallar su altura, área y volumen. *(Soluc: $h \cong 6,08$ cm; $A \cong 189,64$ cm^2; $V \cong 309,53$ cm^3;)*

88. **(*)** Dibujar una pirámide hexagonal regular recta de base 3 m y arista lateral 6 m. Hallar su apotema lateral, altura, área y volumen. *(Soluc: $a \cong 5,81$ m; $h \cong 5,20$ m; $A \cong 75,67$ m^2; $V \cong 121,48$ m^3)*

DIFERENCIA ENTRE ÁREA Y SUPERFICIE:

- La ***superficie*** es el conjunto de infinitos puntos contenidos dentro de una línea cerrada; el ***área*** es la medida de esa superficie: "La superficie de un cubo tiene 6,45 cm^2 de área".
- La palabra ***superficie*** describe también el borde de un objeto tridimensional, es decir, algo que se puede tocar: "La superficie de una esfera".

VECTORES



MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

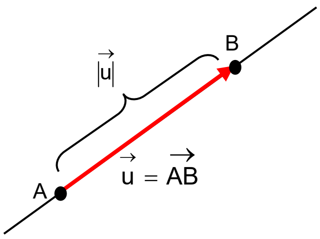
I. DEFINICIONES

Magnitudes

- **Vectoriales:** Un **vector** es un segmento orientado que, para ser definido, precisa de los siguientes tres elementos:
  - **Módulo:** Indica la intensidad, y viene dado por la longitud de la flecha que representa al vector.
  - **Dirección:** Viene dada por la recta sobre la que está la flecha que representa al vector.
  - **Sentido:** Es el que apunta la flecha que representa al vector (Para una misma dirección, hay dos posibilidades).

  Ejemplos: La velocidad, la fuerza, la aceleración, etc.
- **Escalares:** Basta un número –un escalar- para ser definidas (Por ejemplo, la temperatura, masa, tiempo, densidad, energía, etc.).

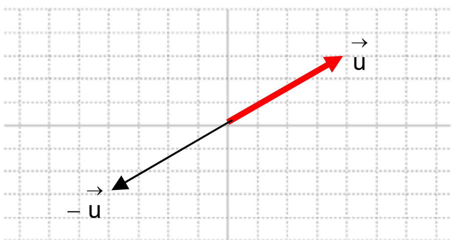
Notación:



Como vemos en el dibujo al margen, un vector[1] se representa mediante una flecha. En concreto, se trata de un vector que va del punto A al punto B, por lo que se representa como $\overrightarrow{AB}$. En otros casos, se puede nombrar simplemente como $\vec{u}$. Nótese que el vector tiene una dirección, es decir, está construido sobre una recta. Por otra parte, **su módulo**, que, como hemos dicho arriba, es la longitud de la flecha, **se representa como** $|\vec{u}|$ **o** $|\overrightarrow{AB}|$, es decir, con el nombre del vector entre | |. A veces, se indica con dobles barras, esto es, $\|\overrightarrow{AB}\|$, y se suele denominar norma del vector. Nosotros utilizaremos indistintamente ambas notaciones. Finalmente, el sentido del vector es el que apunta su flecha. Por lo tanto, se define el vector nulo como $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

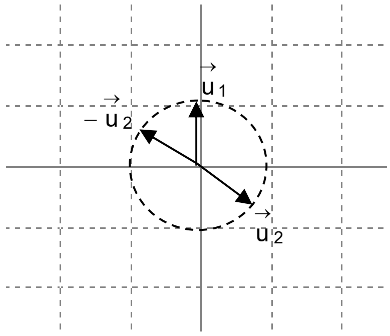
Vector nulo: «**Se designa como $\vec{0}$, y es aquel que tiene módulo cero**». Se representa por un punto (por lo cual, no tiene mucho sentido considerar su dirección y sentido…).

Vector opuesto: Dado un vector $\vec{u}$, se define su opuesto, que **se designa como** $-\vec{u}$, como aquel que **tiene el mismo módulo, la misma dirección, pero distinto sentido**:

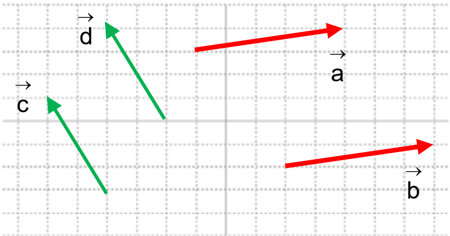


[1] Del latín *vector*, *vectoris*, que a su vez proviene de *veho*, verbo que significa "el que conduce, el que transporta".

Vector unitario: «**Es todo vector que tenga módulo 1**». Por ejemplo, los siguientes vectores son unitarios:



Vector iguales o equipolentes: **«Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son equipolentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido»**. Se indica como $\vec{u} \sim \vec{v}$, aunque, en general, también se suele poner simplemente $\vec{u} = \vec{v}$.



En la figura, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son equipolentes, y lo mismo podemos decir de $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

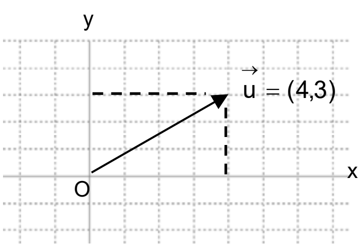
Puesto que, si trasladamos un vector de forma equipolente, es decir, sin variar su módulo, dirección y sentido, sigue siendo el mismo vector, se dice que los **vectores** son **libres** en el plano. Por lo tanto, se define:

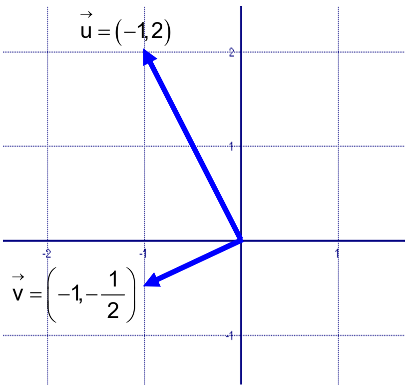
$\mathbb{V}^2$ = Conjunto de todos los vectores libres del plano

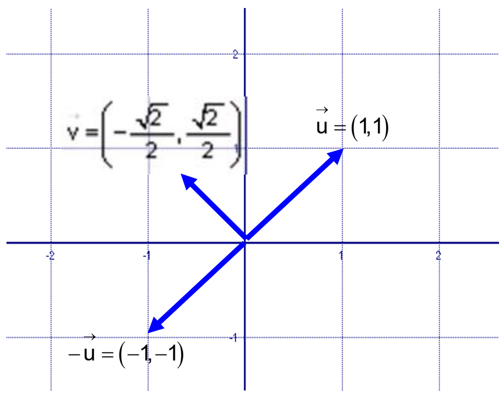
Acabamos de hablar de vectores libres. Ahora bien, si los referimos a un punto, entonces serán vectores fijos. El punto que habitualmente se utiliza es el origen:

Coordenadas de un vector referido al origen: «**Coinciden con las coordenadas del punto extremo del vector**»:

Ejemplo 1:







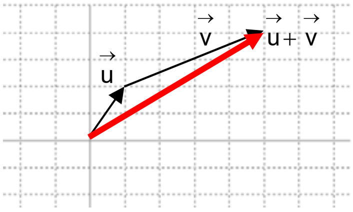
Nótese en el tercer ejemplo que, evidentemente, el opuesto del vector $\vec{u}=(a,b)$ es $-\vec{u}=(-a,-b)$.

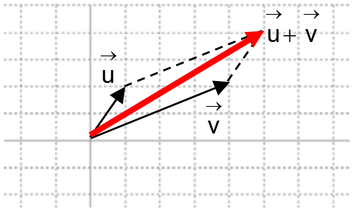
Ejercicios final tema: 1 a 3

II. OPERACIONES

II.I SUMA DE VECTORES $(\vec{u}+\vec{v})$

Gráficamente: Hay dos formas posibles de sumar vectores; ambas, obviamente, conducen al mismo vector suma. Consideremos primero la figura izquierda:





REGLA DEL PARALELOGRAMO

Como vemos, en la 1ª forma (que se usa más en Matemáticas) se engancha el segundo vector al extremo del primero, y el vector suma de ambos será aquel que tiene su origen en el del primero y su extremo en el del último. En el caso de la regla del paralelogramo (muy utilizada en Física, para sumar fuerzas), los dos vectores se ponen con origen común, y se traza a continuación el paralelogramo que definen; el vector suma será entonces la diagonal de dicho paralelogramo que arranca del origen de ambos vectores. **Puede comprobarse analíticamente que ambas formas funcionan.**

Analíticamente: $\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_x,u_y)\\ \vec{v}=(v_x,v_y)\end{array}\right\}\ \vec{u}+\vec{v}=(u_x+v_x,u_y+v_y)$

(Lo comprobaremos gráficamente mediante el próximo ejercicio)

Propiedades:

CONMUTATIVA: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

ASOCIATIVA: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

ELEMENTO NEUTRO: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

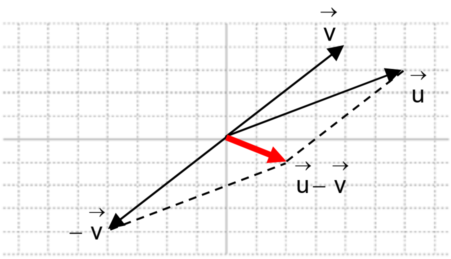
ELEMENTO OPUESTO: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

Todas estas propiedades son de inmediata demostración, tanto analítica como gráficamente, como comprobaremos en el siguiente ejercicio:

Ejercicios final tema: 4

II.II RESTA DE VECTORES $(\vec{u}-\vec{v})$

Gráficamente: Para restar dos vectores, sumamos al primero el opuesto del segundo, es decir, $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. De las dos formas vistas anteriormente vamos a utilizar, por ejemplo, la regla del paralelogramo:

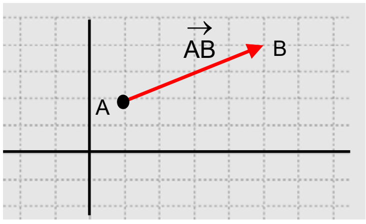


Analíticamente, es obvio que se restan las componentes. Puede comprobarse en el ejemplo anterior, o con el siguiente ejercicio:

Ejercicios final tema: 5

De la resta de vectores puede deducirse una fórmula muy utilizada:

Coordenadas del vector que une dos puntos: Se obtienen restando las componentes del punto extremo menos el punto origen del vector:



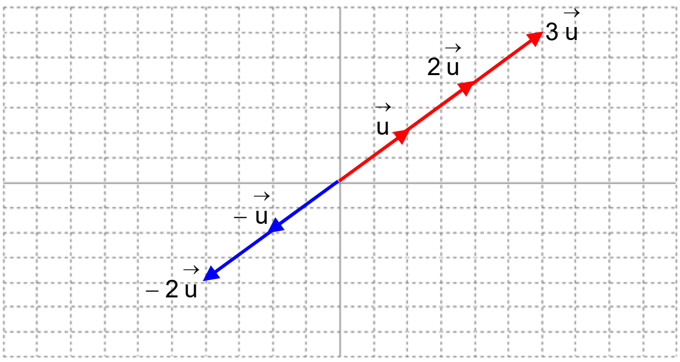
$$\boxed{\vec{AB}=B-A} \qquad (1)$$

La demostración se verá el próximo curso, pero puede comprobarse gráficamente su validez con el ejemplo de la figura, o con otros ejercicios:

Ejercicios final tema: 6 y 7

II.III PRODUCTO POR UN ESCALAR $(\lambda\vec{u})$

Gráficamente: Veámoslo con un ejemplo. Si queremos hacer $3\vec{u}$, lo que haremos es $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$, es decir, aplicamos la suma de vectores. Si lo que queremos construir es $-2\vec{u}$, haremos $-2\vec{u}=(-\vec{u})+(-\vec{u})$:



En resumen: Se define el vector $k\vec{u}$ como aquel que tiene

MÓDULO: $\|k\vec{u}\|=|k|\cdot\|\vec{u}\|$

DIRECCIÓN: la de $\vec{u}$

SENTIDO: $\begin{cases}\text{el de } \vec{u}\text{, si } k>0\\ \text{opuesto, si } k<0\end{cases}$

Todo esto puede comprobarse que concuerda analíticamente (lo veremos en el próximo ejercicio):

Analíticamente: $\vec{u} = (u_x, u_y) \rightarrow k\vec{u} = (k u_x, k u_y)$

Ejercicios final tema: 8

Consecuencia: **«Si dos vectores tienen sus componentes proporcionales entonces tienen la misma dirección i.e. son //, y viceversa».**

Ejercicios final tema: 9 a 12

Propiedades: ASOCIATIVA: $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma de vectores: $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma de escalares: $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$

ELEMENTO NEUTRO: $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración, tanto analítica como gráficamente).

II.IV COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})$

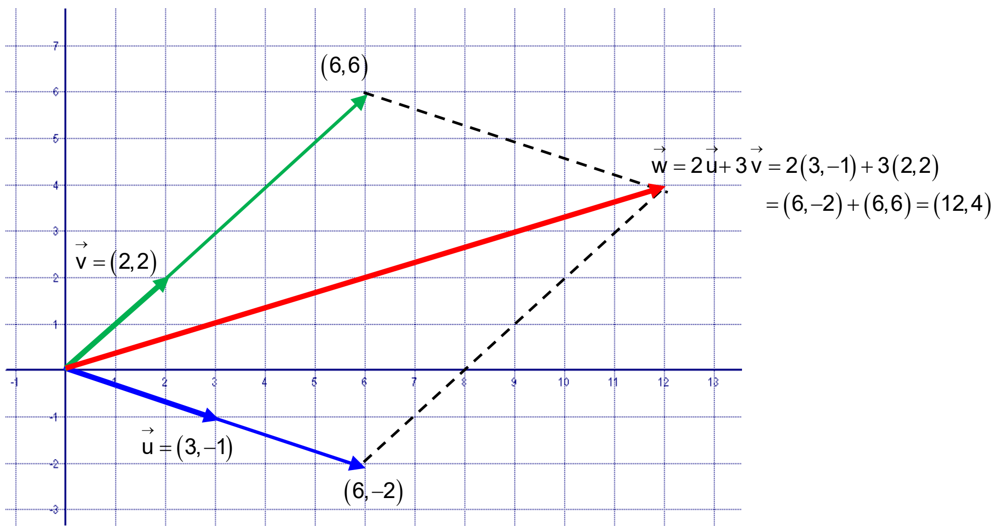
A continuación vamos a combinar las operaciones de los tres apartados anteriores:

Se dice que el vector $\vec{w}$ es **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se puede expresar como

$$\vec{w} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \qquad \text{donde } \lambda,\mu \in \Re$$

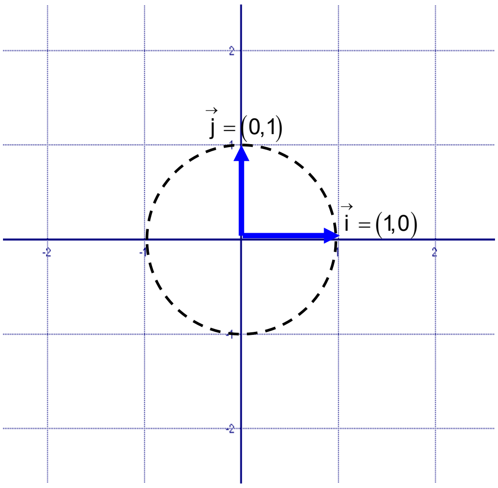
NOTA: λ o μ en algunos casos pueden ser 0

Ejemplo 2: Considerar los vectores $\vec{u}=(3,-1)$ y $\vec{v}=(2,2)$, y construimos, por ejemplo, la combinación lineal $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$. En la figura puede comprobarse que todo coincide analítica y gráficamente:



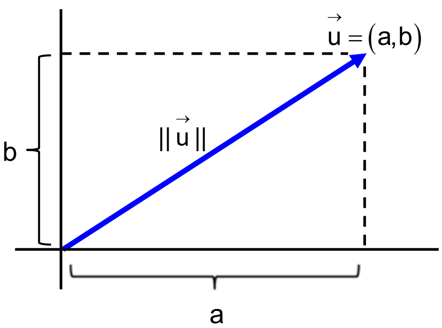
Ejercicios final tema: 13 y 14

Definición: «**Los vectores** $\vec{i}=(1,0)$ **y** $\vec{j}=(0,1)$ **forman una base de** $\mathbb{V}^2$ **, es decir, nos van a permitir siempre expresar cualquier vector como combinación lineal de ambos**»



NOTA: Como veremos el próximo curso, $\{\vec{i},\vec{j}\}$ no es la única base de $\mathbb{V}^2$, pero sí la más simple, y por eso se denomina base canónica[2] de $\mathbb{V}^2$. La ventaja de utilizar la base canónica $\{\vec{i},\vec{j}\}$ es que las coordenadas de un vector coinciden con las del punto extremo. En otra base tendría distintas coordenadas.

III. MÓDULO DE UN VECTOR



Considerar el vector $\vec{u}$ de la figura adjunta. Como acabamos de ver en el apartado anterior, las coordenadas de dicho vector en la base canónica serán las del extremo del vector, es decir, $\vec{u}=(a,b)$. Vamos a hallar aplicando el teorema de Pitágoras el módulo $\|\vec{u}\|$ de dicho vector, es decir, la longitud del vector:

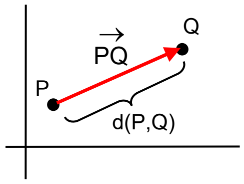
$$\|\vec{u}\|^2=a^2+b^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (2)$$

es decir, **«el módulo de un vector es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes»**.

Ejercicios final tema: 15 a 22

[2] Del griego *kanonikos*, conforme a la regla.

Consecuencia: Distancia entre dos puntos:



Supongamos dos puntos, $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$, cuya distancia de separación, d(P,Q), queremos conocer. Es obvio que dicha distancia (ver dibujo) coincidirá con el $\|\overrightarrow{PQ}\|$:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{PQ}\| = d(P,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3)$$

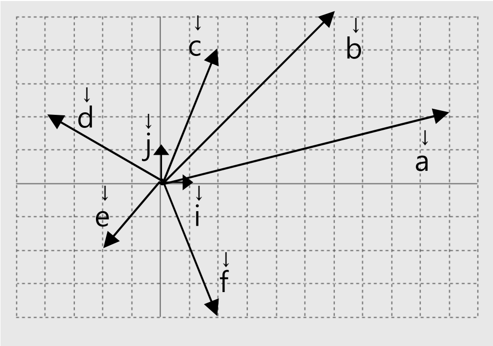
Ejercicios final tema: 23 y 24

24 EJERCICIOS de VECTORES 4º ESO Acad.

1. **a)** Representar en el mismo plano los vectores:

$$\vec{a}=(3,1)\quad \vec{b}=(-1,5)\quad \vec{c}=(2,-4)\quad \vec{d}=(-3,-1)\quad \vec{i}=(1,0)\quad \vec{j}=(0,1)\quad \vec{e}=(3,0)\quad \vec{f}=(0,-5)$$

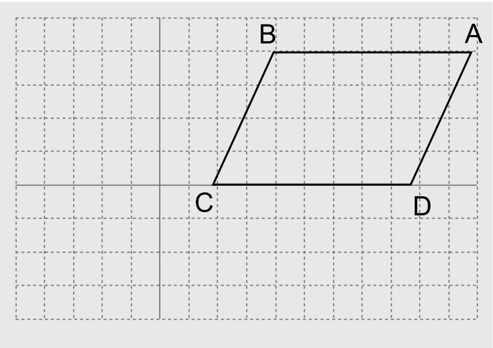
b) Escribir las coordenadas de los vectores fijos de la figura adjunta (puede hacerse en este cuaderno):



2. **a)** Dibujar dos vectores de origen común, igual módulo, y que formen un ángulo de 135º. Expresar sus componentes.

b) Dibujar dos vectores que tengan el origen común y los sentidos opuestos. Expresarlos analíticamente. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

3. Dado el paralelogramo de la figura[1]:



a) Indicar, analítica y gráficamente, un vector equipolente con $\overrightarrow{CD}$; ídem con $\overrightarrow{AD}$ (puede hacerse en este cuaderno)

b) Indicar, analítica y gráficamente, un vector opuesto a $\overrightarrow{CD}$; ídem con $\overrightarrow{AD}$ (puede hacerse en este cuaderno)

[1] Recordar que, por convenio, los vértices de un polígono se designan con letras mayúsculas, en orden alfabético (A, B, C, D...), y en sentido levógiro i.e. antihorario.

4. Sumar analíticamente los siguientes vectores, y comprobar gráficamente:

a) $\vec{u} = (0,2)$ y $\vec{v} = (4,1)$.

b) $\vec{u} = (4,1)$ y $\vec{v} = (0,2)$.

c) $\vec{x} = (4,2)$ y $\vec{y} = (-1,2)$.

d) $\vec{u} = (-4,-1)$ y $\vec{v} = (-1,3)$.

e) $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{u} = (4,2)$.

f) $\vec{a} = (2,-3)$ y $\vec{b} = (-4,6)$.

g) $\vec{x} = (1,3)$ y $\vec{y} = (-1,-3)$.

h) $\vec{x} = (1,3)$ y $\vec{0} = (0,0)$.

i) $\vec{u} = (0,1)$, $\vec{v} = (4,2)$ y $\vec{w} = (2,-4)$

5. Calcular analíticamente $\vec{u} - \vec{v}$, y comprobar gráficamente:

a) $\vec{u} = (0,2)$ y $\vec{v} = (4,1)$.

b) $\vec{u} = (4,1)$ y $\vec{v} = (0,2)$.

c) $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{v} = (-1,2)$.

d) $\vec{u} = (-4,-1)$ y $\vec{v} = (-1,3)$.

e) $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{u} = (4,2)$.

f) $\vec{u} = (2,-3)$ y $\vec{v} = (-4,6)$.

g) $\vec{u} = (1,3)$ y $\vec{v} = (-1,-3)$.

h) $\vec{u} = (1,3)$ y $\vec{0} = (0,0)$.

6. a) Calcular las coordenadas del vector cuyo origen es A(1,2) y cuyo extremo es B(5,7), y comprobarlo gráficamente.

b) Ídem con C(–1,2) y D(4,4).

c) Ídem con E(–3,0) y F(5,–3).

d) Ídem con G(2,–1) y H(–3,–3).

e) Ídem con I(3,2) y J(3,–5).

f) Ídem con 0(0,0) y K(4,5).

7. Dibujar el triángulo de vértices A(1,1), B(3,3) y C(6,0), y calcular las componentes de sus tres lados, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.

8. a) Dado $\vec{a} = (1,2)$, hallar analíticamente $2\vec{a}$, $4\vec{a}$, $-\vec{a}$ y $-3\vec{a}$, y comprobar gráficamente.

b) Ídem con $\vec{v} = (-1,2)$.

c) Ídem con $\vec{a} = (2,-3)$.

d) Ídem con $\vec{x} = (-1,-3)$.

9. **a)** Comprobar, analítica y gráficamente, si los vectores $\vec{a}=(1,2)$ y $\vec{b}=(3,6)$ son paralelos.

b) Ídem con $\vec{u}=(4,2)$ y $\vec{v}=(-1,2)$.

c) Ídem con $\vec{a}=(2,-3)$ y $\vec{b}=(-4,6)$.

d) Ídem con $\vec{x}=(1,3)$ y $\vec{y}=(-1,-3)$.

10. Considerar el vector $\vec{a}=(1,2)$. Obtener dos vectores paralelos y con el mismo sentido, y otro paralelo pero de sentido opuesto. Comprobar todo gráficamente.

11. Dados los vectores $\vec{a}=(x,8)$ y $\vec{b}=(2,x)$, hallar **x** para que sean paralelos. ¿Cuántas soluciones se obtienen? Comprobar todo gráficamente. *(Soluc: x=±4)*

12. **a)** Determinar, analíticamente, si los puntos $A(3,1)$, $B(5,2)$ y $C(1,0)$ están alineados.

b) Ídem para $A(1,1)$, $B(3,4)$ y $C(4,6)$ (Nota: un dibujo puede ser útil)

c) Hallar **k** para que los puntos $A(1,7)$, $B(-3,4)$ y $C(k,5)$ estén alineados. *(Soluc: SÍ; NO; k=-5/3)*

13. Dados los vectores libres $\vec{a}+\vec{b}$ de la figura, calcular gráfica –los cuatro primeros apartados, en los mismos ejes– y analíticamente (en función de la base ortonormal de $\mathcal{V}^2$):

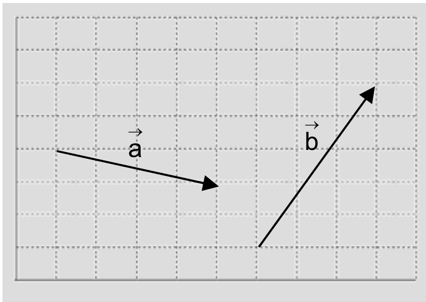
a) $\vec{a}+\vec{b}$

b) $\vec{a}-\vec{b}$

c) $3\vec{a}$

d) $3\vec{a}+2\vec{b}$

e) $2\vec{a}-3\vec{b}$



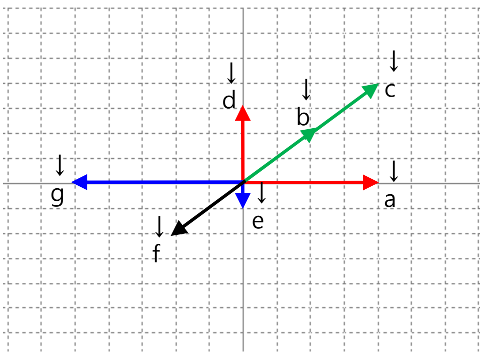
14. **a)** Dados $\vec{u}=(1,-2)$ y $\vec{u}=(2,5)$, hallar analítica y gráficamente, $2\vec{u}+3\vec{v}$

b) Ídem con $\vec{x}=(3,6)$ e $\vec{y}=(1,4)$, haciendo $-2\vec{x}+3\vec{y}$

15. Calcular el módulo de los siguientes vectores, y dibujarlos (los siete primeros en los mismos ejes):

$$\vec{a}=(4,3),\quad \vec{b}=(3,-4),\quad \vec{c}=(1,1),\quad \vec{d}=(5,5),\quad \vec{e}=(-4,-3),\quad \vec{f}=(6,0),\quad \vec{u}=(0,-3)\ \text{ y }\ \vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

16. Calcular las coordenadas y el módulo de los siguientes vectores fijos (puede hacerse en este cuaderno):



17. Dados los puntos $0(0,0)$ y $P(3,-4)$, hallar:

a) El vector $\overrightarrow{0P}$ que definen.

b) Su módulo.

c) El vector opuesto.

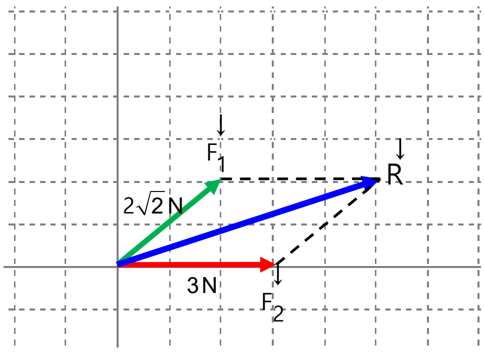
d) Dos vectores paralelos y de módulo triple.

e) Representación gráfica de todo lo anterior.

18. Comprobar que los puntos $A(2,2)$, $B(5,2)$ y $C(2,6)$ forman un triángulo rectángulo, y calcular su área y perímetro. *(Soluc: 6 u²; 12 u)*

19. Los vértices de un rombo son los puntos $A(1,4)$, $B(0,2)$, $C(-1,3)$ y $C(-2,4)$. Hallar su área y perímetro. *(Soluc: 4 u²; 4√5 u)*

20. De una masa tiran dos fuerzas, $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$, de módulo $2\sqrt{2}\,N$ y $3\,N$ respectivamente, en la dirección y sentido que muestra la figura. Indicar las componentes de $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ y, a partir de ellas, obtener a continuación la resultante, $\vec{R}$, y el valor de dicha fuerza resultante. *(Soluc: √29 N)*



21. a) Calcular el valor de **m** para que el vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},m\right)$ sea unitario. Razonar gráficamente por qué se obtienen dos soluciones. $\left(\textit{Soluc: } m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) Ídem para $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},m\right)$ $\left(\textit{Soluc: } m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

22. a) Hallar **x** para que el módulo del vector $\vec{u}=(x,5)$ sea igual a 13. *(Soluc: x=12)*

b) Hallar **x** para que se cumpla que $\vec{u}+\vec{i}=5\,\vec{j}$. Comprobar gráficamente el resultado. *(Soluc: x=-1)*

c) Dado el vector $\left(x,\frac{1}{2}\right)$, hallar **x** para que sea unitario, y también para que tenga módulo 5 (resultados racionalizados y simplificados). *(Soluc: x=±√3/2; x=±3√11/2)*

23. Dibujar los siguientes pares de puntos y hallar su distancia:

a) $P(1,2)$ y $Q(5,-1)$ **b)** $P(6,3)$ y $Q(-2,-3)$ **c)** $P(2,1)$ y $Q(2,5)$ **d)** $A(-1,3)$ y $B(5,3)$

e) $A(5,3)$ y el origen **f)** $P(1,5)$ y $Q(5,2)$ *(Soluc: a) 5; b) 10; c) 4; d) 6; e) $\sqrt{34}$; f) 5)*

24. **TEORÍA:** **a)** ¿Pueden ser paralelos los vectores $(2,a)$ y $(0,5)$?

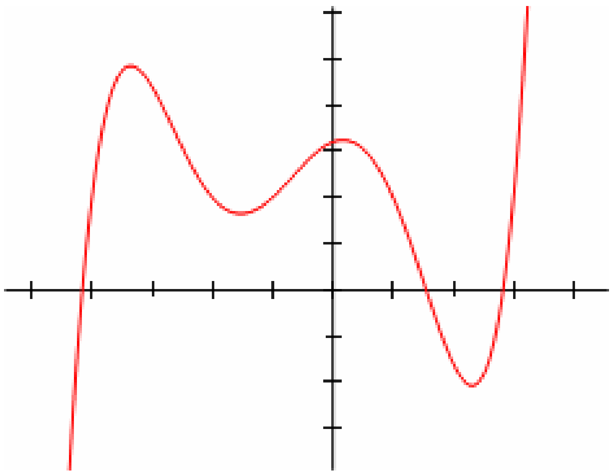
b) ¿Puede ser un unitario el vector $(2,a)$? (Razonarlo no analíticamente)

c) Razonar que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|$

d) Comprobar gráficamente que, dado un vector –por ejemplo (a,b)–, si permutamos sus componentes y una de ellas la cambiamos de signo –es decir, (–a,b) o (a,–b)– se obtiene un vector perpendicular.

e) Escribir un vector $\vec{u}$ con la misma dirección, sentido contrario y módulo la mitad de $\vec{v} = (2,6)$. Comprobar gráficamente.

FUNCIONES. RECTAS



MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO

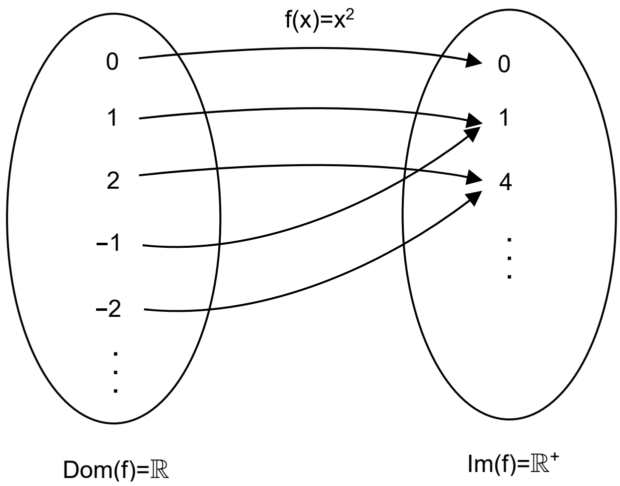
Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) CONCEPTO DE FUNCIÓN. DEFINICIONES

Ejemplo 1: Considerar la función $y=f(x)=x^2$

Podemos estudiar su comportamiento utilizando un diagrama de conjuntos o diagrama de Venn[1]:



Ahora bien, en la práctica lo anterior se suele indicar más bien mediante tabla de valores:

x	….	−2	−1	0	1	2	3	….
$f(x)=x^2$	….	4	1	0	1	4	9	….

(NOTA: más adelante veremos que esta función se trata de una parábola…)

Por ejemplo, se dice que la imagen de 3 a través de la función anterior es 9, y se designa como f(3)=9. La imagen f(x) también se denota como **y**, y se llama variable dependiente; en el ejemplo anterior, se diría $y=x^2$.

¡Muy importante!: **Para que una función esté bien definida, cada x no puede tener más de una imagen.**

Definiciones:

« Una función es una aplicación entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento –llamado x, o variable independiente– **del conjunto inicial le corresponde un único elemento a lo sumo** –llamado imagen de x, o f(x)– **del conjunto final ».**

Como acabamos de indicar, x se llama **variable independiente**, mientras que y es la **variable dependiente** (ya que, obviamente, depende de x).

f(x) se llama **imagen** de x, mientras que x se llama **antiimagen** de f(x). En el ejemplo anterior, la antiimagen de y=9 sería $x=\pm 3$.

Dominio de definición de la función: « Es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen»; se suele designar como Dom (f), o Dom f(x), etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, Dom (f)=ℝ, como se indica en el propio diagrama de conjuntos.

[1] Introducidos en 1880 por el matemático y filósofo británico *John Venn* (1834-1923)

Imagen o Recorrido de la función: «Es el conjunto formado por todas las imágenes f(x) posibles que recorre la función»; se puede designar como Im(f), o R(f), etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, Im(f)=$\mathbb{R}^+$, como también se indica en el diagrama del comienzo de esta sección.

Por tanto, la definición exhaustiva de esta función sería:

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow f(x)=x^2 \end{aligned}$$

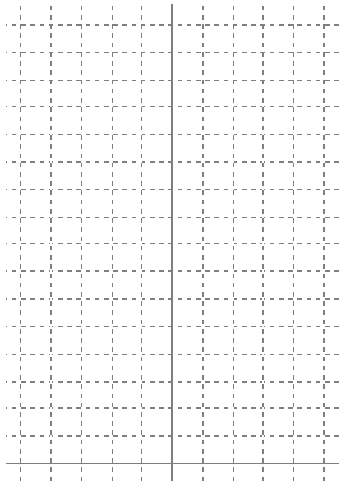
pero en la práctica, por comodidad, se suele abreviar diciendo simplemente $f(x)=x^2$

Ejercicios final tema: 1 y 2

II) GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Ejemplo 2: Construir la gráfica de $f(x)=x^2$ mediante tabla de valores.

x	…. -5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5 ….
$f(x)=x^2$	….										….



Definición: «La **gráfica** de una función y=f(x) está formada por los ∞ puntos (x,y) que verifican la expresión y=f(x)».

Observaciones:

1º) Podemos obtener gráficamente el Dom(f) si nos desplazamos imaginariamente de izquierda a derecha a lo largo del eje **x** y vamos viendo –hacia arriba o hacia abajo– cuándo existe imagen, es decir, cuándo hay gráfica.

De la misma forma, podemos obtener el Im(f) a partir de la gráfica si nos vamos desplazando imaginariamente a lo largo del eje **y** de abajo a arriba y vamos viendo –a izquierda y derecha– cuándo existe antiimagen(es), es decir, cuándo hay gráfica.

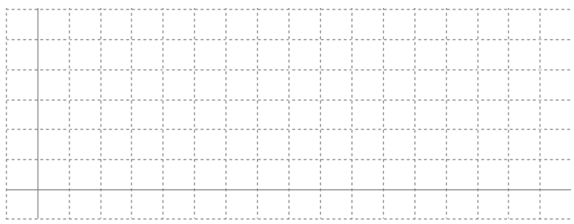
2º) El hecho de que un mismo **x** no pueda tener más de una imagen se traduce gráficamente en que «Toda recta **vertical** que se desplace imaginariamente a lo largo de la gráfica sólo puede cortar a ésta a lo sumo en un punto[2]».

Ejemplo 3: Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Representarla gráficamente.
b) Deducir su Dom(f) e Im(f) a la vista de lo anterior.

x																	
$f(x)=\sqrt{x}$																	

Dom(f)=

Im(f)=



Ejercicios final tema: 3 a 6

[2] En cambio, una recta **horizontal** que se desplace imaginariamente por la gráfica puede cortar a ésta en varios puntos, lo que corresponde al hecho de que un mismo f(x) puede tener varias antimágenes … (como ocurre en el ejemplo 2)

III) CÁLCULO DEL Dom(f) DE LAS FUNCIONES MÁS HABITUALES

Vamos a ver una serie de "recetas" para deducir el dominio de definición de una función a partir exclusivamente del tipo de expresión analítica, es decir, sin necesidad de dibujar su gráfica previamente.

III.1) Función polinómica: «Dom[f(x) polinómica]=ℝ»

La explicación es obvia: recordemos que el dominio de una función está formado por todos los x para los que existe imagen, y es evidente que, sea cual sea el polinomio, siempre va a existir imagen $\forall x \in \mathbb{R}$.

III.2) Función racional: Una función racional es toda aquella que se puede expresar como un cociente, es decir, una función del tipo $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$

Pues bien, es obvio que para una función tal existirá imagen siempre que el denominador no se anule; por lo tanto: **«El Dom(f) de una función racional está formado por todos los x para los que no se anula el denominador».** Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom}\left[f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\right]=\left\{x \,/\, h(x)\neq 0\right\}$$

En la práctica, esto se traduce en ver cuándo se anula la expresión del denominador, es decir, resolver una ecuación; aquellos x que sean raíces del denominador tendremos que excluirlos del dominio:

Ejemplo 4: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x-4}$ *(Sol: Dom(f)=IR-{4})*

b) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$ *(Sol: Dom(f)=IR-{±2})*

c) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4}$ *(Sol: Dom(f)=IR)*

III.3) Función irracional: Una función irracional es aquella en la que la x figura dentro de una raíz.

En este tipo de funciones es evidente que, si el índice de la raíz es par, entonces existirá imagen siempre que el radicando sea ≥ 0; ahora bien, si el índice es impar, no hay ningún problema en que el radicando sea negativo. Por lo tanto: **«El Dom(f) de una función irracional de índice par está formado por todos los x para los que su radicando es ≥ 0».** Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom}\left[f(x)=\sqrt[\text{par}]{g(x)}\right]=\left\{x \,/\, g(x)\geq 0\right\}$$

En la práctica, esto se traduce en resolver una inecuación:

Ejemplo 5: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x)=\sqrt{x-9}$ *(Sol: Dom(f)=[9,∞))*

b) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ *(Sol: Dom(f)=(-∞,-3]U[3,∞))*

c) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-4x+3}$ *(Sol: Dom(f)=(-∞,1]U[3,∞))*

d) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ *(Sol: Dom(f)=IR)*

e) $f(x)=\sqrt[3]{x-9}$ *(Sol: Dom(f)=IR)*

f) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ *(Sol: Dom(f)=IR)*

Ejercicios final tema: 7

IV) PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

IV.1) Continuidad: «Una función es continua si puede dibujarse su gráfica sin levantar el lápiz del papel[3]. En caso contrario, se dice que es discontinua»

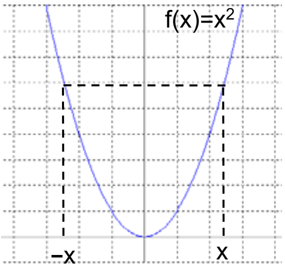
NOTA: La continuidad se indica siempre respecto al eje x.

Ejercicio final tema: 8

[3] En el próximo curso veremos una definición más formal de continuidad, que nos permitirá, además, obtener la continuidad de una función sin tener que representarla. De momento, nos contentaremos con esta definición "intuitiva", a partir de la gráfica.

IV.2) Simetría:

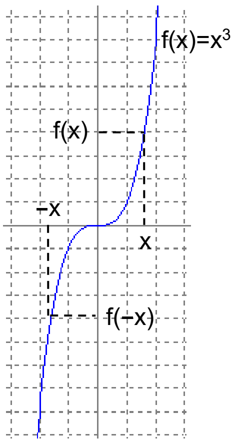
a) f(x) PAR:



f(–1)=f(1)=1
f(–2)=f(2)=4
.
.
.
en general:

$\boxed{f(-x)=f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica respecto al eje y } [f(x) \text{ SIMÉTRICA PAR}]}$

b) f(x) IMPAR:



f(–1)=–1; f(1)=1
f(–2)=–8; f(2)=8
.
.
.
en general:

$\boxed{f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica respecto al origen } [f(x) \text{ SIMÉTRICA IMPAR}]}$

Observaciones:

1º) En la práctica, para ver si una función es simétrica a priori, es decir, sin necesidad de representarla gráficamente, tenemos que hallar f(–x), es decir, reemplazar x por –x (¡utilizando, cuando sea necesario, paréntesis!), y simplificar la expresión resultante; a continuación, tenemos que ver si f(–x) corresponde a alguno de los siguientes tres casos:

$$\boxed{f(-x)=\begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{PAR} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{IMPAR} \\ \text{ninguno de los anteriores} & \Rightarrow \text{no es simétrica} \end{cases}}$$

2º) Existen más tipos de simetría, pero nosotros este curso sólo vamos a ver estos dos.

3º) Una función no tiene por qué ser siempre simétrica; de hecho, la mayoría de las funciones no lo son.

4º) **Utilidad de advertir** a priori –sin necesidad de hacer previamente una tabla de valores para dibujar su gráfica– **si una función es simétrica:** en caso de ser simétrica, podemos dedicar nuestros esfuerzos a la parte positiva del eje x, y dibujar cómodamente su mitad negativa sabiendo que será simétrica...

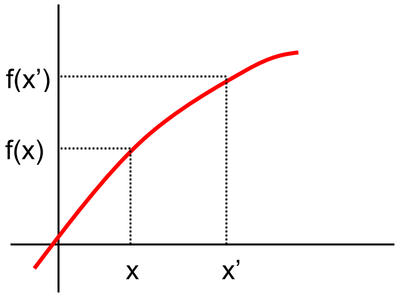
Por ejemplo, si una función es par y presenta un M(2,5), necesariamente tendrá otro en M(–2,5); ahora bien, si fuera impar, lo que presentaría es un m(–2,–5).

5º) Se utiliza el adjetivo "par" porque la función simétrica par típica es $y=x^2$, es decir, con exponente par (también tendría la misma simetría $y=x^4$, $y=x^2-2x^6$, etc.). De la misma forma, la función impar por antonomasia es $y=x^3$.

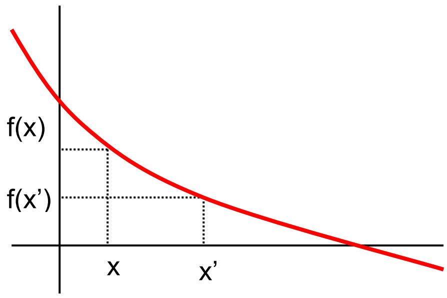
Ejercicios final tema: 8

IV.3) Crecimiento y decrecimiento. M y m:

Idea intuitiva:



FUNCIÓN CRECIENTE



FUNCIÓN DECRECIENTE

Def: « Una función es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, aumentan también las imágenes f(x) correspondientes».

« Una f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, disminuyen las imágenes f(x) correspondientes».

Más formalmente:

f(x) es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

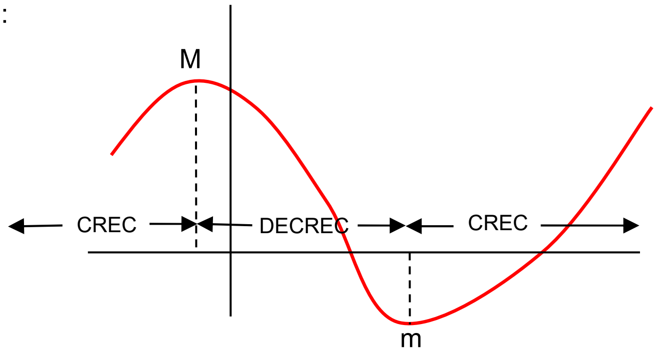
f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

Observaciones:

1º) Para indicar que una función es creciente utilizaremos el símbolo ↗, y ↘ si es decreciente.

2º) En el caso de una función constante, la definición sería: $x < x' \Rightarrow f(x) = f(x')$

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento o monotonía:



Def: « Una función presenta un **máximo** (M) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de creciente (↗) a decreciente (↘) ».

« Una función presenta un **mínimo** (m) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de decreciente (↘) a creciente (↗) ».

Más formalmente:

f(x) tiene un M en x=**a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)<f(a)

f(x) tiene un m en x=**a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)>f(a)

Observaciones:

1º) Los intervalos de crecimiento, también llamados de monotonía, se indican respecto al eje x.

2º) Los M y m que hemos definido se llaman extremos relativos[4].

3º) El próximo curso veremos una forma rápida y cómoda de obtener los intervalos de crecimiento y los extremos relativos, no gráfica sino analíticamente, mediante lo que se conoce como derivada.

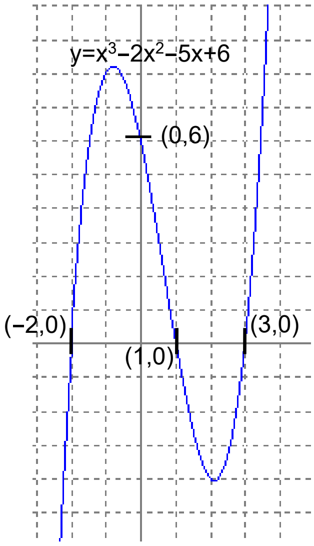
4º) Puede haber varios **M** o **m**, no haber, o infinitos.

5º) Si la f(x) es continua, entre dos **M** siempre hay un **m**, y viceversa.

Ejercicio final tema: 8

IV.4) Cortes con los ejes:

Observando la siguiente gráfica ejemplo:



es fácil entender la forma de obtener analíticamente –es decir, sin necesidad de dibujar previamente su gráfica– los puntos donde una función corta a los ejes de coordenadas, y que se resume en la siguiente tabla:

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	Haciendo y=0 (Supone resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	Sustituyendo x=0	uno o ninguno

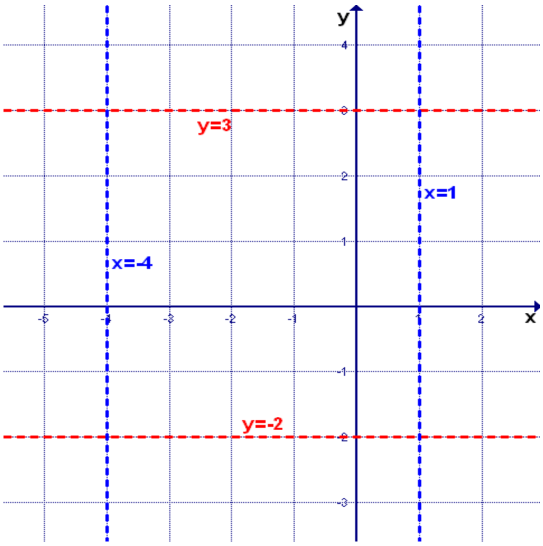
Ejercicios final tema: 9 y 10 (cortes con los ejes)
11, 12 y 13 (estudio completo de una función)
14, 15 y 16 (interpretación de gráficas)

[4] El máximo y mínimo que estamos definiendo se llaman extremos relativos o locales; el próximo curso los definiremos más formalmente, mediante la derivada, y también veremos que hay extremos absolutos…

V) REPASO de RECTAS

V.1) Función constante y=m

Su gráfica, lógicamente, es una recta horizontal, que corta al eje vertical a la altura de **m** unidades; ejemplos:

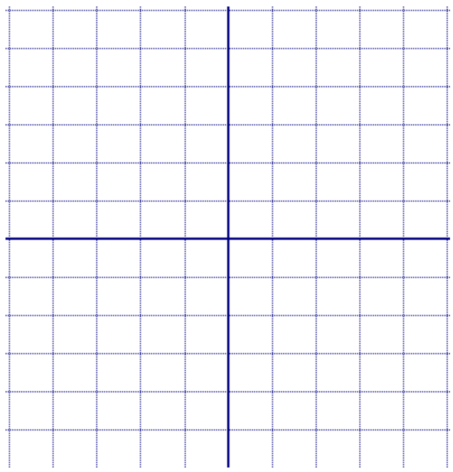


De forma parecida, **x=K** representa una recta vertical, la cual corta al eje x a la altura de **k** unidades; en el gráfico anterior puede verse un par de ejemplos de este caso. ¿Qué ecuación tendrán entonces los ejes de coordenadas?

V.2) Función de proporcionalidad directa y=mx

La gráfica de una función de 1er grado es siempre una recta. Ya vimos en los ejercicios del comienzo del tema que para representar una recta basta con dos valores.

Ejemplo 6: Representar $\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -3x \end{array}\right\}$ sobre los mismos ejes.



Consecuencias: 1º) $y = mx$ es una recta que pasa por el origen.

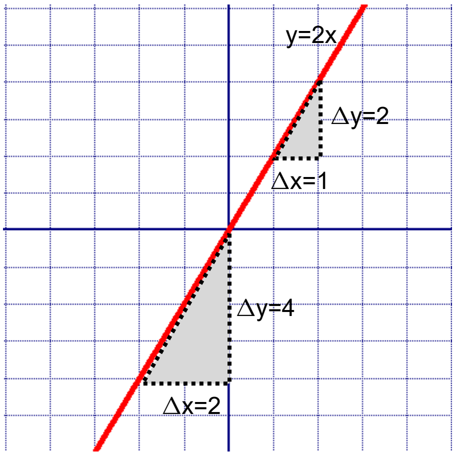
2º) m (el coeficiente de las x) se llama **pendiente**, e indica la inclinación de la recta:

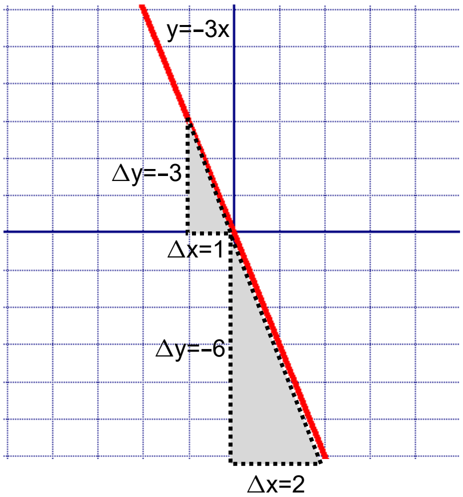
$m>0 \Rightarrow$ recta CRECIENTE
$m<0 \Rightarrow$ recta DECRECIENTE

(Si m=0 –es decir, si la recta carece de término en x– obtenemos la recta y=0, es decir, el eje x, recta horizontal, esto es, constante, como vimos en el subapartado anterior)

3º) Se llama función de proporcionalidad directa porque a medida que aumenta la **x** aumenta en la misma proporción la **y**, como veíamos en cursos anteriores.

Por tanto, en función del signo de **m**, existen dos posibilidades:





Por cada unidad que aumenta la x la y **aumenta** 2 unidades ⇒ m=2

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=...=2$$

Por cada unidad que aumenta la x la y **disminuye** 3 unidades ⇒ m=–3

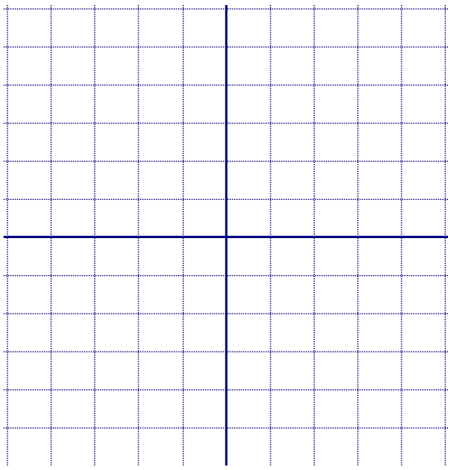
$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3}{1}=\frac{-6}{2}=...=-3$$

Ejercicios final tema: 17 a 25

V.3) Función afín y=mx+n

Por ser de 1er grado, es decir, una recta, ya sabemos que para representarla basta con dos valores; habitualmente se suele dar x=0 e y=0, correspondientes a los cortes con los ejes:

Ejemplo 6: Representar $\left.\begin{array}{l} y=2x+3 \\ y=2x-5 \\ y=-3x-5 \end{array}\right\}$ sobre los mismos ejes.



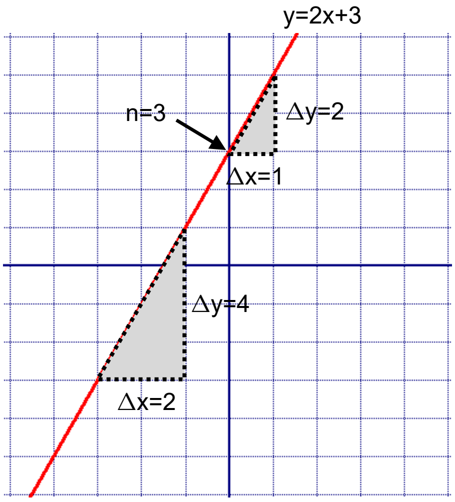
Consecuencias: 1º) m (el coeficiente de las x) se llama **pendiente**, e indica la inclinación de la recta:

m>0 ⇒ recta CRECIENTE
m<0 ⇒ recta DECRECIENTE

(Si m=0 –es decir, si la recta carece de término en x– significa que la recta y=n será horizontal, es decir, constante, como vimos en el primer subapartado)

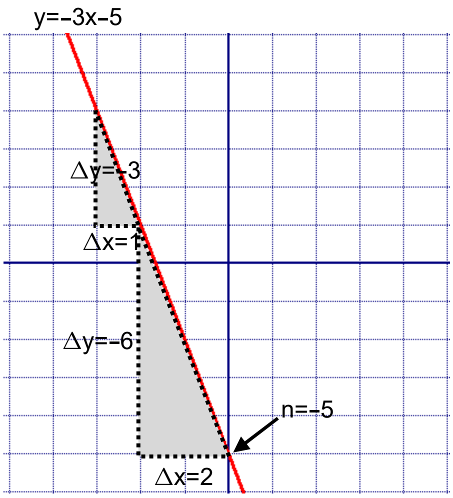
y=mx+n se llama forma explícita o **ecuación explícita** de la recta. En el próximo apartado veremos otras dos formas.

2º) n (el tº indpte.) se llama **ordenada en el origen**, e indica dónde corta la recta al eje y (Si n=0 –es decir, si la recta carece de tº indpte.– significa que la recta y=mx necesariamente pasará por el origen, es decir, es función de proporcionalidad directa).



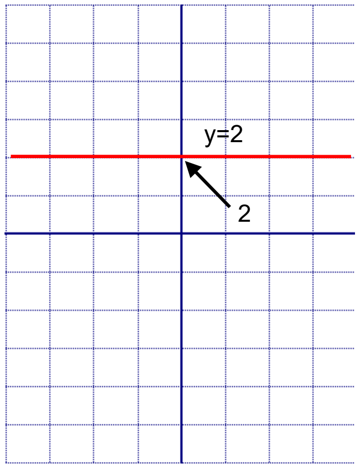
Por cada unidad que aumenta la x la y **aumenta** 2 unidades ⇒ m=2

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\ldots=2$$



Por cada unidad que aumenta la x la y **disminuye** 3 unidades ⇒ m=–3

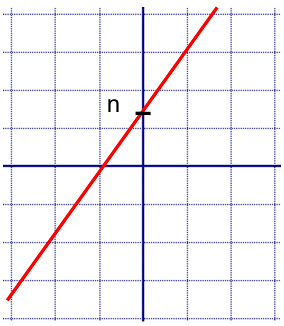
$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3}{1}=\frac{-6}{2}=\ldots=-3$$



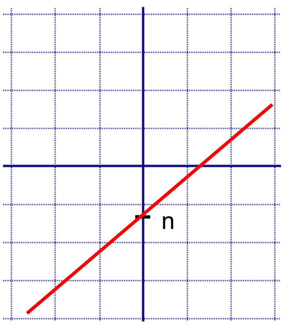
FUNCIÓN CONSTANTE

m=0

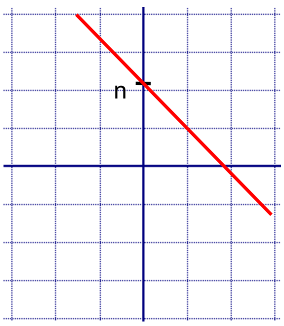
Por lo tanto, en función del signo de m y n, existen 4 casos:



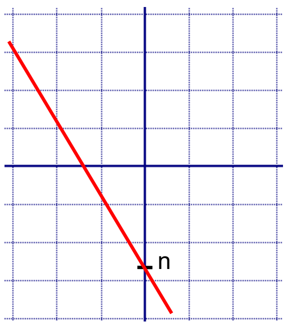
m>0
n>0



m>0
n<0



m<0
n>0

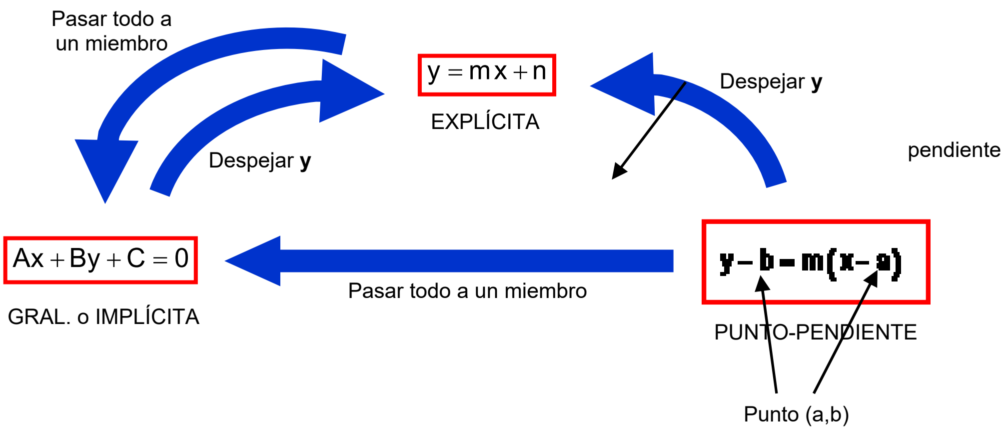


m<0
n<0

Ejercicios final tema: 26 a 37

V.4) Otras formas de expresar una recta: forma implícita y punto-pendiente

Además de la f**orma explícita**, y=mx+n, vista anteriormente, también existen otras dos formas de expresar una recta: **general o implícita**, y **punto-pendiente**. En qué consisten y cómo se pasa de una a otra se resume en el siguiente cuadro:



Observaciones:

1º) Al igual que la forma explícita, la forma general o implícita es única (salvo simplificación de las constantes A, B y C), lo cual es una ventaja.

2º) Sin embargo, una misma recta tiene infinitas formas punto-pendiente. ¿Por qué?

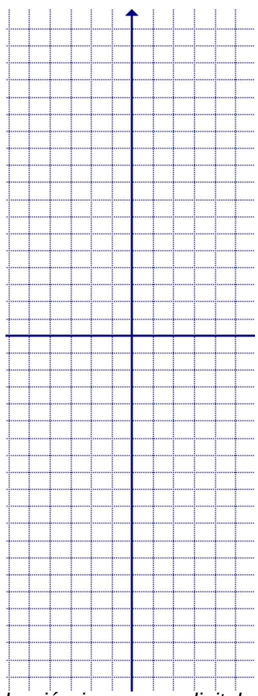
3º) El próximo curso veremos más formas de expresar una recta.

4º) Mediante rectas también se puede resolver cómodamente varias cuestiones: la resolución de inecuaciones de 1er grado con dos incógnitas, los sistemas de inecuaciones de 1er grado con dos incógnitas, y los sistemas de ecuaciones de 1er grado con dos incógnitas.

Ejercicios final tema: 38 a 42 (Forma explícita, implícita y punto-pendiente)
43 a 48 (Problemas de aplicación de rectas)
49 a 51 (inecuaciones y sistemas de 1er grado con dos incógnitas, y sistemas de ecuaciones)

VI) PARÁBOLA $y=ax^2+bx+c$

VI.1) Parábola $y=ax^2$



Ejemplo 7: Representar $\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 \\ y = -5x^2 \end{array}\right\}$ sobre los mismos ejes, y extraer consecuencias.

Consecuencias: 1º) $y=ax^2$ es una parábola con vértice en el origen.

2º) El eje de simetría de la parábola es el eje y.

3º)

$$\boxed{\begin{array}{l} a>0 \Rightarrow \cup \\ a<0 \Rightarrow \cap \end{array}}$$

4º) Cuanto mayor es **|a|**, más próximas se encuentran entre sí las ramas de la parábola.

Todas estas consecuencias que hemos extraído (salvo la 2ª) son aplicables al caso general, que veremos en el siguiente subapartado.

Ejercicios final tema: 52

VI.2) Caso general: $y=ax^2+bx+c$

La gráfica de una función de 2º grado es siempre una parábola. Recordar de cursos anteriores que la forma rápida de representarla, mejor que mediante tabla de valores, es hallar los siguientes elementos:

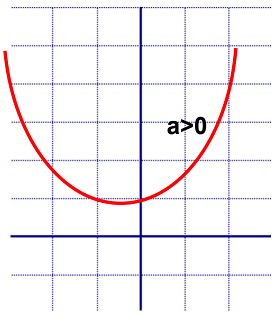
1º) Vértice: Su abscisa viene dada por $x_V = -\dfrac{b}{2a}$; la ordenada $\mathbf{y_v}$ se obtiene sustituyendo $\mathbf{x_v}$ en la ecuación de la parábola.

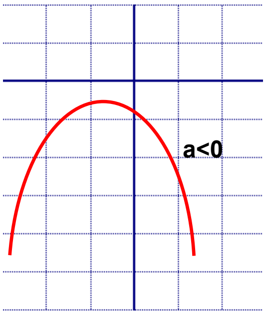
2º) Cortes con los ejes: El corte con el eje x se obtiene haciendo y=0, es decir, resolviendo la ecuación de 2º grado asociada a la parábola; nótese que la parábola no tiene por qué cortar necesariamente a dicho eje.

El corte con el eje y se obtiene simplemente sustituyendo x=0 en la ecuación de la parábola. Siempre va a cortar a dicho eje.

3º) Normalmente es necesario además dar algún valor extra para completar lo anterior.

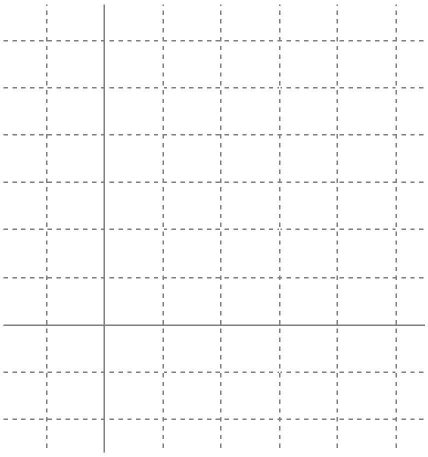
Observaciones: ■ El signo del coeficiente cuadrático, **a**, nos indica la orientación de la parábola:





■ Las ramas de la parábola son simétricas respecto a un eje vertical que pase por su vértice.

Ejemplo 8: Representar la parábola $y=x^2-4x+3$



Ejercicios final tema: 53 a 69

VII) HIPÉRBOLAS

Son curvas cuya expresión es de la forma $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\text{, donde } c\neq 0}$

Ejercicio final tema: 70

A la vista del ejercicio anterior, para representar una hipérbola ya no es necesario hacer una tabla de valores, sino seguir los siguientes pasos:

1º) ASÍNTOTAS: A.H: $\boxed{y=\dfrac{a}{c}}$

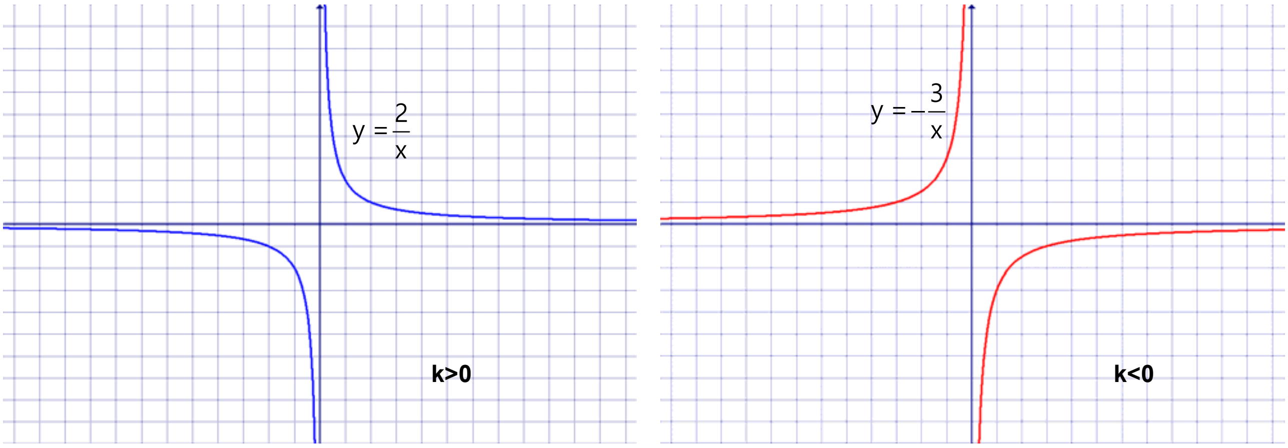
A.V: Anular el denominador: cx+d=0 $\Rightarrow$ $\boxed{x=-\dfrac{d}{c}}$

2º) CORTES EJES: Corte eje x: y=0 $\Rightarrow$ $\dfrac{ax+b}{cx+d}=0 \Rightarrow$ $\boxed{x=-\dfrac{b}{a}}$

Corte eje y: Sustituir x=0 $\Rightarrow$ $\boxed{y=\dfrac{b}{d}}$

Caso particular: Función de proporcionalidad inversa $\mathbf{y=\dfrac{k}{x}}$

Si en la hipérbola $y=\dfrac{ax+k}{cx+d}$ hacemos a=d=0 y c=1, obtenemos $y=\dfrac{k}{x}$, es decir, la llamada «**Función de proporcionalidad inversa**», ya vista en cursos anteriores. Recordar su gráfica, en función del signo de k (Comprobarlo mediante sendas tablas de valores):



Ejercicios final tema: 71 a 76

VIII) FUNCIONES A TROZOS

Para obtener la gráfica de una función definida a trozos, también llamada definida por ramas, hay que representar cada rama en su dominio particular de definición, como puede observarse en el siguiente ejercicio:

Ejercicios final tema: 77

NOTA: *En el anexo final se puede ver una serie de ejemplos de gráficas representativas.*

77 EJERCICIOS de FUNCIONES 4º ESO Acad.

Concepto de función:

1. Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Razonar que se trata de una función.

b) Calcular f(4), f(1), f(0), f(−9), f(1/4), f(2) y f(√2)

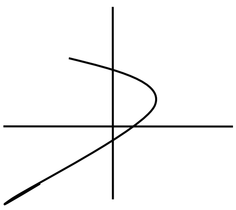
c) Hallar la antiimagen de 3, de 25 y de −4

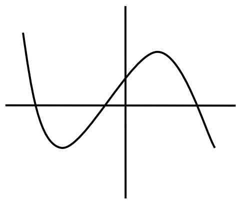
d) Razonar cuál es su Dom(f) e Im(f)

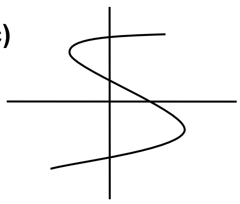
2. Ídem para f(x)=2x+1

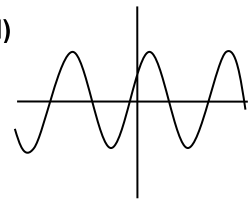
Gráfica de una función:

3. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):

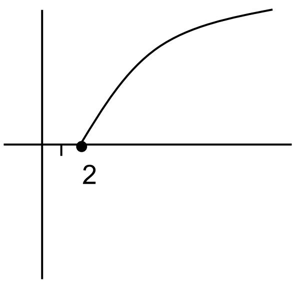
a)


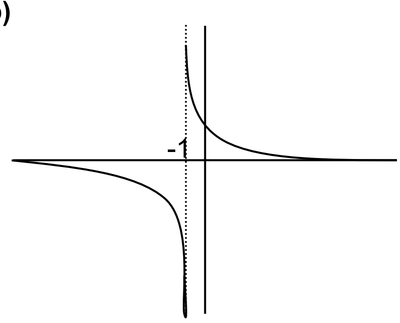
b)


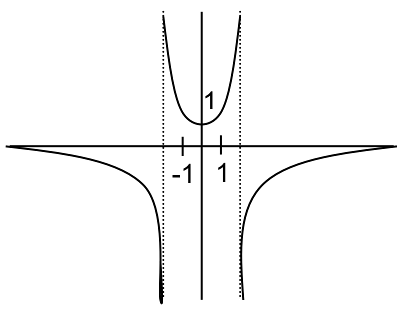
c)


d)


4. ¿Cuál es el Dom(f) e Im(f) de cada una de estas funciones?:

a)


b)


c)


5. Dada $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, se pide: **a)** Representarla gráficamente.

b) Razonar, a la vista de la gráfica, cuál es su Dom(f) e Im(f)

6. Para cada una de las funciones que figuran a continuación se pide:

i) Tabla de valores apropiada y representación gráfica.

ii) Dom(f) e Im(f) a la vista de la gráfica.

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

a) $f(x)=3x+6$

b) $f(x)=x^2-4x+3$ ¿vértice?

c) $f(x)=x^3$

d) $f(x)=x^4$

e) $f(x)=2$

f) $f(x)=\sqrt{x-9}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ¿asíntotas?

h) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$?

i) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$?

Dominio de una función:

7. Sin necesidad de representarlas, hallar analíticamente el Dom(f) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{8x}{x+5}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$

c) $f(x)=\dfrac{2}{4x-x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-16}$

e) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+16}$

f) $f(x)=\sqrt{x+5}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

h) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

i) $f(x)=\sqrt{4-x}$

j) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

k) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$

l) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+4}$

* **m)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-16}}$

n) $f(x)=\dfrac{x+1}{(2x-3)^2}$

o) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$

p) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-12}}$

q) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4}$

r) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+2x+1}$

s) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+4}$

t) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

(*Soluc:* ***a)*** *$\mathbb{R}-[-5]$;* ***b)*** *$\mathbb{R}-\{-2,4\}$;* ***c)*** *$\mathbb{R}-\{0,4\}$;* ***d)*** *$\mathbb{R}-\{\pm4\}$;* ***e)*** *$\mathbb{R}$;* ***f)*** *$[-5,\infty)$;* ***g)*** *$(-5,\infty)$;* ***h)*** *$[5/2,\infty)$;* ***i)*** *$(-\infty,4]$;* ***j)*** *$(-\infty, -3]U[3,\infty)$;* ***k)*** *$(-\infty,-4]U[2,\infty)$;* ***l)*** *$(-\infty,-4]U[-1,\infty)$;* ***m)*** *$(-4,0]U(4,\infty)$;* ***n)*** *$\mathbb{R}-\{3/2\}$;* ***o)*** *$\mathbb{R}-\{2,3\}$;* ***p)*** *$(4,\infty)$;* ***q)*** *$\mathbb{R}$;* ***r)*** *$\mathbb{R}-\{-1\}$;* ***s)*** *$\mathbb{R}$;* ***t)*** *$\mathbb{R}$*)

Propiedades que se deducen de la gráfica:

8. A la vista de sus gráficas, indicar la continuidad, posible simetría, intervalos de crecimiento y posibles M y m de las funciones del ejercicio 6

9. Hallar analíticamente los posibles cortes con los ejes de las funciones del ejercicio 6, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

10. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones; con esa única información, hacer además la gráfica de las señaladas con **(G)**:

(G) a) $y=2x-6$

(G) b) $f(x)=x^2+2x-3$

c) $f(x)=x^2+x+1$

d) $f(x)=x^3-x^2$

e) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

f) $f(x)=\sqrt{2x+4}$

g) $f(x)=\sqrt{2x}+4$

h) $y=\dfrac{x+4}{2x+2}$

i) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$

j) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

k) $y=\sqrt{x^2+9}$

(G) l) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

m) $y=\dfrac{x^2+4}{x+2}$

n) $f(x)=\dfrac{4}{x-4}$

o) $f(x)=x^4-1$

*(Soluc: **a)** (3,0),(0,-6); **b)** (−3,0),(1,0),(0,−3); **c)** (0,1); **d)** (0,0),(1,0); **e)** (−2,0),(2,0),(0,−2); **f)** (−2,0),(0,2); **g)** (0,4); **h)** (−4,0),(0,2); **i)** ($\sqrt{3}$,0),(−$\sqrt{3}$,0),(0,3); **j)** (−2,0),(1,0); **k)** (0,3); **l)** (1,0),(2,0),(3,0),(0,−6); **m)** (0,2); **n)** (0,−1); **o)** (−1,0),(1,0),(0,−1))*

11. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Razonar cuál es su Dom(f). **ii)** Posibles cortes con los ejes. **iii)** Indicar su posible simetría. **iv)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **v)** ¿Es continua? **vi)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f). **vii)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **viii)** Ecuación de las posibles asíntotas. **ix)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$ **x)** Hallar la antiimagen de y=−1, o la indicada expresamente.

12. Ídem: **a)** $f(x)=x^3-3x$ antiimagen de y=2 **b)** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ **c)** $y=x^4-2x^2$ **d)** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=x^3-3x^2$

f) $y=2x^3-9x^2$ **g)** $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ **h)** $f(x)=x^3-6x^2+9x$ antiimagen de y=2 **i)** $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ **j)** $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$

k) $y=x^4-4x$ antiimagen de y=−3 **l)** $y=2x^3-3x^2$ **m)** $y=x^3-12x$ **n)** $y=\sqrt{x^2-9}$ antiimagen de y=4 **o)** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

p) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$ **q)** $y=\sqrt{x^2+16}$ **r)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$ antiimagen de y=1 **s)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **t)** $y=\sqrt{9-x^2}$

13. Representar, utilizando la calculadora:

a) $y=\operatorname{sen} x$ **b)** $y=\cos x$ | **c)** $y=2^x$ **d)** $y=0{,}5^x$ | **e)** $y=e^x$ **f)** $y=\log x$ | **g)** $y=\operatorname{Ln} x$

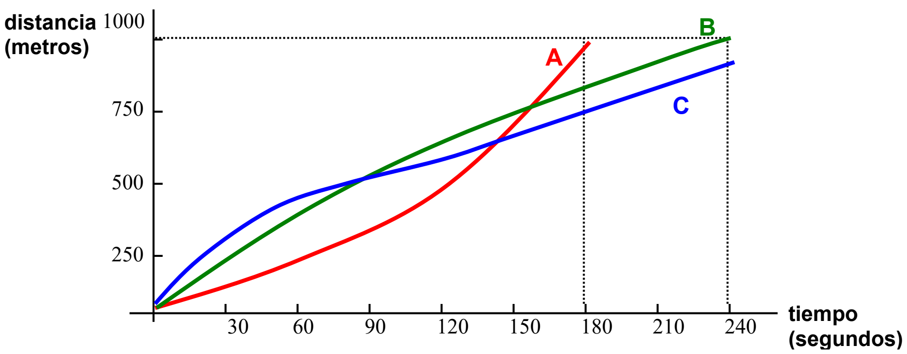
Interpretación de gráficas:

14. Un estudio de un ginecólogo muestra cómo crece un bebé antes de nacer según el mes de gestación en que se encuentre su madre, de acuerdo con la siguiente tabla:

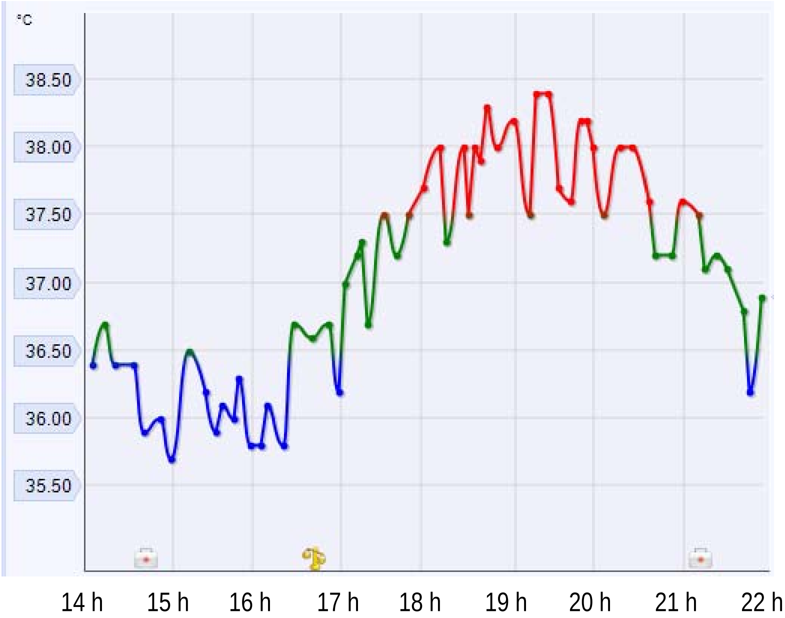
Edad (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (cm)	4	8	15	24	29	34	38	42

Representar la función "longitud" en función de la edad del bebé. Comentar dicha gráfica.

15. Tres alumnos, que nombraremos **A**, **B** y **C**, participan en una carrera de 1000 m. La presente gráfica muestra de forma aproximada su comportamiento en la prueba. ¿Cómo podría describirse dicha carrera?



16. El siguiente gráfico describe la evolución de la temperatura corporal de una persona durante varias horas. Teniendo en cuenta que se considera fiebre por encima de 37,5º, describir dicha evolución.



Función de proporcionalidad directa *(y=mx)*:

17. **a)** Hallar la ecuación de una función de proporcionalidad directa sabiendo que pasa por el punto P(1,7)

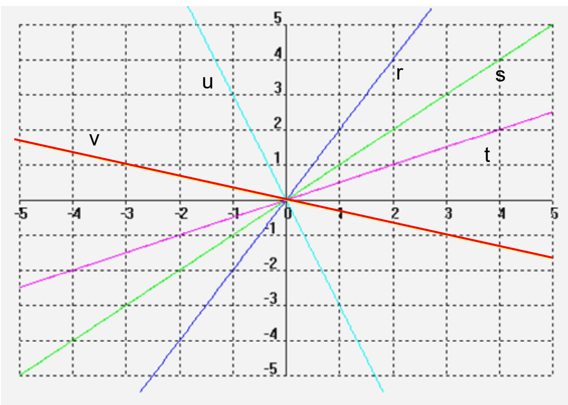
b) Ídem para P(−1,3)

c) Ídem para P(2,5)

A continuación, dibujarlas y comprobar gráficamente su pendiente.

18. Si se sabe que una función lineal pasa por el punto P(1,2), calcular su ecuación, y, a partir de ésta, hallar el valor de dicha función para x=3, x=5 y x=−8. Comprobar gráficamente todo lo anterior. *(Soluc: y=2x; 6, 10, −16)*

19. Calcular la pendiente y la ecuación de las funciones de proporcionalidad directa que aparecen en el siguiente gráfico:



(Soluc: r: y=2x
s: y=x
t: y=x/2
u: y=−3x
v: y=−x/3)

20. Un kg de patatas cuesta 55 céntimos. Obtener y a continuación representar la función que define el coste de las patatas (**y**) en función de los kg comprados (**x**). ¿Cuál es su Dom(f)? ¿Cuánto costarán 3,5 kg? ¿Qué cantidad podremos comprar si sólo disponemos de un billete de 5 €? *(Soluc: 1,93 €; 9,09 kg)*

21. Un grifo vierte agua a un depósito dejando caer cada minuto 25 litros. Formar una tabla de valores apropiada para representar la función "capacidad" en función del tiempo. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar una piscina de 50 m^3? *(Soluc: 33 h 20 min)*

22. Los paquetes de folios que compra un determinado instituto constan de 500 folios y cuestan 3 €.

a) Formar una tabla que nos indique el precio de 1, 2, ..., 10 folios.

b) Dibujar la gráfica correspondiente ¿Qué tipo de función se obtiene? ¿Cuál es la ecuación?

c) ¿Cuál es su Dom(f)?

23. Pasada la Navidad, unos grandes almacenes hacen en todos los artículos un 20% de descuento.

a) ¿Cuál será el precio rebajado de unas zapatillas de deporte que costaban 45 €? ¿Y de un chándal que costaba 60 €?

b) Si llamamos **x** al antiguo precio del artículo e **y** al precio rebajado, ¿qué función se obtiene? *(Soluc: y=0,8x)*

24. El IVA es un impuesto que en muchos productos supone un recargo del 16%. Si un fontanero hace una reparación de 240 €, ¿a cuánto ascenderá con el IVA? ¿Y si la reparación costara 50 €? Obtener la expresión algebraica general correspondiente al precio del trabajo del fontanero y la cantidad que se paga. *(Soluc: 278,4 €; 58 €; y=1,16x)*

25. Se quiere abrir un pozo de forma cilíndrica de diámetro 2 m. Expresar el volumen de agua que cabe en él en función de la profundidad *h*. ¿Qué tipo de función se obtiene?

Función afín *(y=mx+n)*:

26. Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos A(1,3) y B(3,7). Representarla gráficamente, y comprobar gráficamente su pendiente y su ordenada en el origen. Hallar también, analítica y gráficamente, un tercer punto de ella. *(Soluc: y=2x+1)*

27. Ídem para: **a)** A(1,–1) y B(4,8) **b)** A(–2,4) y B(1,1) **c)** A(–4,–1) y B(2,–4) **d)** A(–1,–1) y B(2,–7) **e)** A(3,1) y B(–6,–2) **f)** A(1,1) y B(3,7) **g)** A(2,3) y B(5,3) **h)** A(2,5) y B(4,–1)

(Sol: a) y=3x–4; b) y=–x+2; c) y=–x/2–3; d) y=–2x–3; e) y=x/3; f) y=3x–2; g) y=3; h) y=–3x+11)

28. Hallar la ecuación explícita de la recta que tiene pendiente 5 y pasa por el punto P(–1,–2) *(Soluc: y=5x+3)*

29. Hallar la ecuación explícita de la recta paralela a y=2x+5 que pasa por el punto P(2,1). ¿Cuál es su pendiente? *(Soluc: y=2x–3)*

30. Hallar la ecuación explícita de la recta paralela a y=–3x+7 y que corta al eje de ordenadas en el mismo punto que lo hace y=5x+3.

31. **a)** Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos (1,–2) y (3,4). **b)** Hallar también una recta paralela a la anterior y que pase por el punto (–2,3) *(Soluc: y=3x–5; y=3x+9)*

32. En cada apartado, representar las siguientes rectas sobre los mismos ejes:

a) y=3x
y=3x+2
y=3x–7

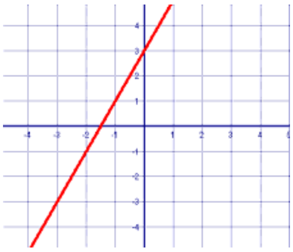
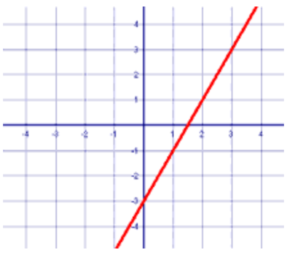
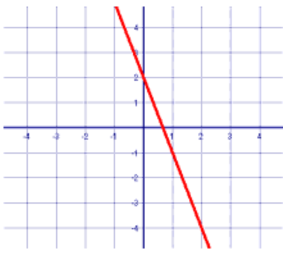
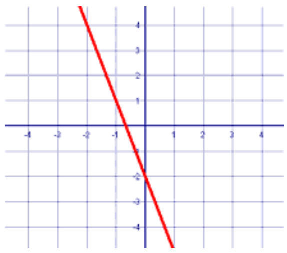
b) y=–3x
y=–3x+2
y=–3x–7

c) $y=\frac{1}{3}x$
$y=\frac{1}{3}x+2$
$y=\frac{1}{3}x-7$

d) y=0
y=x
y=–x

33. Emparejar, razonadamente, cada gráfica (a, b, c, d) con su función afín correspondiente:

$y=2x-3$ $\quad$ $y=-3x+2$ $\quad$ $y=-3x-2$ $\quad$ $y=2x+3$

a)  **b)**  **c)**  **d)** 

34. Hallar la ecuación de la recta: **a)** Paralela al eje **x** y que pasa por P(1,3). Dibujarla.

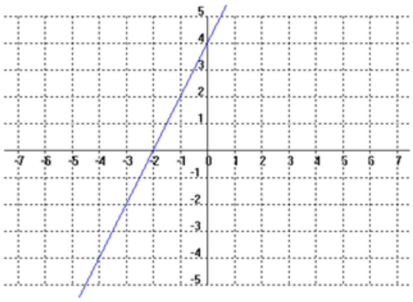
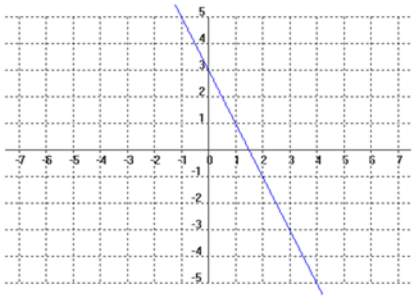
b) "" " " " " " " " Q(−1,4). ""

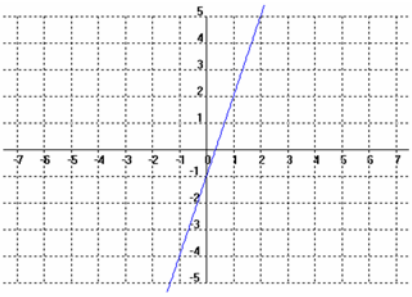
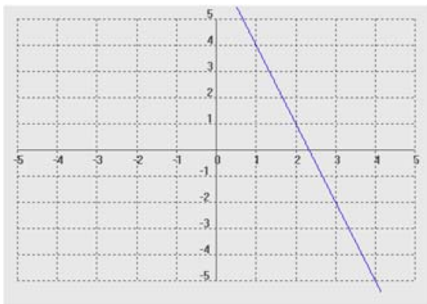
c) "" " eje **y** " " " " " ""

d) Indicar la ecuación del eje **x**.

e) Indicar la ecuación del eje **y**.

35. Hallar, razonadamente, la ecuación explícita de las siguientes rectas:

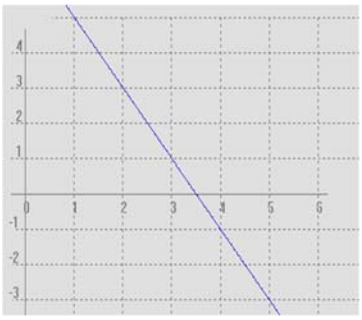
a)  **b)** 

c)  **d)** 

(Soluc: a) $y=2x+4$; b) $y=-2x+3$; c) $y=3x-1$; d) $y=-3x+7$)

36. Comprobar analíticamente si los siguientes puntos están alineados (¡no vale gráficamente!):

a) A(−1,−5), B(2,1) y C(6,9) **b)** A(−1,2), B(4,−3) y C(10,−8) *(Soluc: a) SÍ; b) NO)*

37. 

Dada la recta de la figura, se pide:

a) Hallar su expresión analítica. *(Soluc: $y=-2x+7$)*

b) Comprobar gráficamente el valor de la pendiente obtenido en el apartado anterior.

c) Deducir, analíticamente, dónde corta a los ejes.

Distintas formas de expresar una recta: ec. explícita, punto-pendiente y general

38. Para cada una de las rectas del ejercicio 27, hallar una ecuación punto-pendiente y la ecuación general.

39. **a)** Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por A(–1,–7) y B(3,1) *(Sol: y=2x-5)*

b) Pasar a la forma general o implícita. *(Sol: 2x-y-5=0)*

c) Hallar una posible ecuación punto-pendiente.

40. Pasar la recta dada a las otras dos formas:

a) $y = 2x - 3$

b) $3x + 2y + 4 = 0$

c) $y - 4 = 2(x - 1)$

d) $y = \frac{x}{3} + 4$

e) $x - 5y = 0$

f) $y + 7 = 5x$

41. Dada la recta cuya forma general o implícita es 3x+y–1=0, se pide:

a) Pasarla a forma explícita. *(Sol: y=-3x+1)*

b) Hallar su pendiente y un punto cualquiera de ella, y plantear una posible ecuación punto-pendiente.

42. **a)** Hallar una ecuación punto-pendiente de la recta // a y=4x–3 y que pasa por P(1,3)

b) Hallar la ecuación explícita y la ecuación general de la recta obtenida anteriormente. *(Sol: y=4x-1; 4x-y-1=0)*

Problemas de planteamiento de rectas:

43. Colgado de una alcayata tenemos un muelle de 5 cm de largo; en él hemos colgado diferentes pesos y hemos medido la longitud que alcanza el muelle en cada caso, obteniendo los siguientes resultados:

Pesos (kg)	0	1	2	3	4
Longitud (cm)	5	7	9	11	13

Obtener la gráfica y contestar: **a)** ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

b) ¿Se trata de una función afín? ¿Por qué?

c) Hallar su pendiente. ¿Cuál es su expresión algebraica? *(Soluc: y=2x+5)*

d) ¿Qué significa en este caso la ordenada en el origen?

44. La siguiente tabla corresponde a una función afín:

x	0	10	20	30	40	50
f(x)	-3					97

Completar la tabla y obtener f(x) algebraicamente. *(Soluc: f(x)=2x–3)*

45. Midiendo la temperatura a diferentes alturas se han obtenido los datos de la tabla:

Altura (m)	0	360	720	990
Temperatura (ºC)	10	8	6	4,5

a) Representar la temperatura en función de la altura.

b) Obtener su expresión algebraica. *(Soluc: y=−x/180+10)*

c) ¿A partir de qué altura la temperatura será menor de 0ºC? *(Soluc: x=1800 m)*

46. La tarifa de una empresa de mensajería con entrega domiciliaria es de 12 € por tasa fija más 5 € por cada kg o fracción.

a) Hallar la expresión analítica de la función "Precio del envío" en función de su peso en kg. *(Soluc: y=5x+12)*

b) Representarla gráficamente.

c) ¿Cuánto costará enviar un paquete de 750 gr? *(Soluc: 15,75 €)*

d) Si disponemos sólo de un billete de 50 €, ¿cuál es el peso máximo que podremos enviar? *(Soluc: 7,6 kg)*

47. Los beneficios de una empresa desde el momento de su creación son los que figuran en la siguiente tabla:

MESES TRANSCURRIDOS	0	3	6	9
BENEFICIOS (millones de €)	4	3		1

a) Representar el beneficio en función del tiempo transcurrido. ¿Qué tipo de función se obtiene?

b) Obtener gráficamente la pendiente y la ordenada en el origen, e indicar a continuación su expresión algebraica. *(Soluc: y=−x/3+4)*

c) Hallar **analíticamente** el dato que falta en la tabla. *(Soluc: 2)*

d) Hallar **analíticamente** a partir de qué mes la empresa no tendrá beneficios. *(Soluc: x=12)*

48. Una empresa de fotografía cobra, por el revelado de un carrete, un precio fijo de 1,5 €, y por cada foto, 50 céntimos.

a) Representar la función "Coste del revelado" en función del nº de fotos. Indicar su expresión algebraica.

b) ¿Cuánto costará revelar un carrete de 36 fotografías?

c) ¿Cuántas fotos podremos revelar con 100 €?

Resolución gráfica de inecuaciones y sistemas de inecuaciones:

49. Determinar la representación gráfica de la solución de cada una de las siguientes inecuaciones de 1er grado con dos incógnitas:

a) $x+2y\geq 3$

b) $x+2y<3$

c) $2x-y\leq 4-x$

d) $3x+2y>7-3y$

e) $y<x+2$

f) $x+y\geq 5$

g) $2x-y<6$

h) $6x+5y\leq 30$

50. Representar gráficamente la solución de cada uno de estos sistemas de inecuaciones de 1er grado con dos incógnitas:

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y>-3 \\ 3x+y\leq 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y\geq 6 \\ 3x+5y<10 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} y<2-x \\ y\geq x+2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x-y>6 \\ 3x+5y<10 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y\leq 6 \\ -6x-4y\leq -12 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 5 \\ -2x+3y\geq 6 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 5 \\ 2x+2y<10 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} x\leq 6 \\ y>4 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} 2x-y\leq 6 \\ 2x-y>10 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} 2x-y>6 \\ 2x-y<10 \end{array}\right\}$

k) $\left.\begin{array}{r} x-y>-5 \\ x+y>-3 \\ x+y\leq 10 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{l} y<3x \\ y>-x \end{array}\right.$

m) $\left.\begin{array}{l} y>-x+2 \\ y\leq\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2} \end{array}\right\}$

n) $\left.\begin{array}{l} 3y-2x>6 \\ 2x+y\leqslant 10 \end{array}\right\}$

51. Resolver **gráficamente** los siguientes sistemas de ecuaciones de 1<u>er</u> grado; resolverlos a continuación analíticamente (por el método deseado), y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=7, y=5)*

b) $\left.\begin{array}{l} x+3y=6 \\ 2x-y=-2 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=0, y=2)*

c) $\left.\begin{array}{l} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=1)*

d) $\left.\begin{array}{l} x+2y=0 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=2, y=-1)*

e) $\left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=3, y=1)*

f) $\left.\begin{array}{l} x+3y=1 \\ 2x-y=2 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=0)*

Ejercicios de parábolas:

52. Representar sobre los mismos ejes las siguientes parábolas. ¿Qué conclusiones podemos extraer?:

a) $y=x^2$ **b)** $y=2x^2$ **c)** $y=x^2/2$ **d)** $y=-x^2$ **e)** $y=-4x^2$

53. Dadas las siguientes parábolas, hallar:
i) Vértice
ii) Puntos de corte con los ejes
iii) Representación gráfica

*(Ayuda: **c)** Sale invertida; **d)** No corta al eje x; **e)** Pasa por el origen; **f)** No corta al eje x; **g)** parábola invertida)*

a) $y=x^2-6x+8$
b) $y=x^2-2x-3$
c) $y=-x^2-4x-3$
d) $y=x^2-4x+7$
e) $y=x^2-6x$
f) $y=x^2+x+1$
g) $y=-x^2+5x-6$
h) $y=3x^2+15x+18$
i) $y=-x^2-2x-2$
j) $y=x^2+2x-1$
k) $y=x^2-4$
l) $y=x^2+4$
m) $y=x^2+4x+5$
n) $y=x^2+4x+3$
o) $y=-x^2-8x-4$
p) $y=2x^2+4x+6$
q) $y=-x^2-1$
r) $y=(x+5)^2-8$
s) $y=2(x-1)^2-8$
t) $y=(x-5)^2+8$
u) $y=-2(x-1)^2+8$
v) $y=\dfrac{1}{2}(x+2)^2-5$
w) $y=x^2-2x+1$
x) $y=x^2-4x+2$
y) $y=2x^2-8x+6$
z) $y=-3x^2-6x+12$
α) $y=x^2-2x+3$
β) $y=x^2-6x+5$
γ) $y=\dfrac{1}{4}x^2+x-2$
δ) $y=2x^2-10x+8$
ε) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{3}{2}$
ζ) $y=x^2-8x+7$
η) $y=\dfrac{3}{2}(2x-4)^2+1$

*(Sol: **a)** V(3,-1); (2,0) y (4,0); (0,8) **b)** V(1,-4); (-1,0) y (3,0); (0,-3) **c)** V(-2,1); (-3,0) y (-1,0); (0,-3) **d)** V(2,3); ∄ corte eje x; (0,7) **e)** V(3,-9); (0,0) y (6,0) **f)** V(-1/2,3/4); ∄ corte eje x; (0,1) **h)** V(-5/2,-3/4); (-3,0) y (-2,0); (0,18) **i)** V(-1,-1); ∄ corte eje x; (0,-2) **j)** V(-1,-2); (-1+√2,0) y (-1-√2,0); (0,-1) **k)** V(0,-4); (-2,0) y (2,0); (0,-4) **l)** V(0,4); ∄ corte eje x; (0,4) **m)** V(-2,1); ∄ corte eje x; (0,5) **n)** V(-2,-1); (-3,0) y (-1,0); (0,3) **o)** V(-4;12); (-4+2√3,0) y (-4-2√3,0); (0,-4) **p)** V(-1,4); ∄ corte eje x; (0,6) **q)** V(0,-1); ∄ corte eje x; (0,-1) **r)** V(-5,8); ∄ corte eje x; (0,33) **β)** V(3,-4); (1,0) y (5,0); (0,5) **ξ)** V(4,-9); (1,0) y (7,0); (0,7))*

54. A partir de las gráficas obtenidas en el ejercicio anterior, indicar la solución de las siguientes inecuaciones de 2º grado:

a) $x^2-6x+8\geq 0$	**f)** $x^2+x+1\leq 0$	**k)** $x^2+4\geq 0$	**p)** $-x^2-1<0$
b) $x^2-2x-3<0$	**g)** $3x^2+15x+18>0$	**l)** $x^2+4x+5<0$	
c) $-x^2-4x-3\geq 0$	**h)** $-x^2-2x-2>0$	**m)** $x^2+4x+3<0$	
d) $x^2-4x+7>0$	**i)** $x^2+2x-1\geq 0$	**n)** $-x^2-8x-4\geq 0$	
e) $x^2-6x\leq 0$	**j)** $x^2-4<0$	**o)** $2x^2+4x+6\leq 0$	

55. Resolver gráficamente las siguientes inecuaciones de 2º grado:

a) $x^2-3x-4>0$ **b)** $2x^2+x-3\leq 0$ **c)** $-x^2+x+6\geq 0$ **d)** $x^2+x+5<0$ **e)** $2x^2+x+1\geq 0$ **f)** $-x^2+6x-5<0$

56. **a)** Se sabe que la función $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos (1,1), (0,0) y (−1,1). Calcular **a**, **b** y **c**. *(Soluc: $y=x^2$)*

b) Ídem para los puntos (1,4), (0, −1) y (2,15) *(Soluc: $y=3x^2+2x-1$)*

57. Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y=ax^2+ax+a$ y pasa por el punto P(1,9). Calcular el valor de **a**. ¿Cuál sería su vértice?

58. Calcular **b** para que la parábola $y=x^2+bx+3$ pase por el punto P(2,−1). ¿Cuál sería su vértice?

59. Calcular **m** para que la parábola $y=x^2+mx+10$ tenga el vértice en el punto V(3,1). ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

60. ¿Cuánto debe valer **k** para que la parábola $y=4x^2-20x+k$ tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas? ¿Para qué valores de **k** no cortará al eje x?

61. La parábola $y=ax^2+bx+c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá **c**? Si además sabemos que pasa por los puntos (1,3) y (4,6), ¿cómo calcularíamos **a** y **b**? Hallar a y b y representar la parábola.

62. Una parábola corta al eje de abscisas en los puntos x=1 y x=5. La ordenada del vértice es y=−2. ¿Cuál es su ecuación?

63. Calcular la expresión de una función cuadrática cuya intersección con el eje x son los puntos (2,0) y (3,0)

64. **a)** Una parábola tiene su vértice en el punto V(1,1) y pasa por P(0,2). Hallar su ecuación. *(Soluc: $y=x^2-2x+2$)*

b) Ídem para la parábola de vértice V(−2,3) que pasa por P(1,−3) *(Soluc : $y=-\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}$)*

65. En cada apartado, representar las parábolas sobre los mismos ejes:

a) $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=(x-4)^2 \\ y=(x+5)^2 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x^2+4 \\ y=x^2-5 \end{array}\right\}$ **c)** A la vista de lo anterior, ¿cómo sería la parábola $y=(x-4)^2+5$? ¿Cuál es su vértice?

66. La longitud de la circunferencia y el área del círculo se expresan en función del radio. ¿Qué tipo de funciones son? Dibujar las gráficas sobre unos mismos ejes cartesianos. ¿Para qué valor del radio coinciden numéricamente la longitud y el área?

67. Con un listón de madera de 4 m de largo queremos fabricar un marco para un cuadro.

a) Indicar la expresión analítica de la función "Superficie" en función de la longitud *x* de la base.

b) Representar gráficamente la función anterior. ¿Cuál es su Dom(f)?

c) A la vista de la gráfica, ¿para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie? Interpretar el resultado.

68.

Con 100 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared de 60 metros de largo, como indica la figura.

a) Llamando **x** a uno de los lados contiguos al muro (ver fig.), expresar los otros dos lados en función de **x**

b) Obtener la función que expresa el área del recinto en función de x.

c) Representar la función anterior. ¿Cuál es su Dom(f)?

d) ¿Cuándo se hace máxima el área del recinto? ¿Cuánto vale dicha área?

69. Un labrador tiene 72 m de valla para hacer un corral de gallinas de forma rectangular. ¿Cómo cambiará el área del corral al variar la longitud *x* de uno de los lados? Representar gráficamente la función anterior.

Hipérbolas. Función de proporcionalidad inversa:

70. Representar las siguientes hipérbolas:

a) $y = \dfrac{2x-4}{x-2}$ **b)** $y = \dfrac{3x-3}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x-1}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x-1}$ **e)** $y = \dfrac{x+1}{x}$

71. Supongamos que un pintor tarda 120 minutos en pintar él solo un muro. Es evidente que, por tanto, dos obreros trabajando a la vez tardarían 60 minutos, y así sucesivamente. Con estos datos, se pide:

a) Completar la siguiente tabla:

nº de pintores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
tiempo empleado en pintar el muro (en minutos	120	60														

b) ¿Cuál es la expresión algebraica de la función correspondiente?

c) Representarla gráficamente. ¿Qué pasa a medida que el número de pintores aumenta? ¿Cómo se llama, por tanto, una función así?

d) Indicar otros tres ejemplos de situaciones de la vida real en las que se da una función de proporcionalidad inversa.

72. **a)** Hallar la ecuación de la función de proporcionalidad inversa que pasa por el punto (1,5). **b)** Ídem para (3,4) **c)** Ídem para (–5,1) **d)** Ídem para (2,–1) *(Soluc: **a)** y=5/x; **b)** y=12/x; **c)** y=–5/x; **d)** y=–2/x)*

73. En la realización de un experimento se han obtenido los valores de la tabla adjunta.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	28	14	9,3	7	5,6	4,6	4	3,5

a) Construir una gráfica.

b) ¿Se trata de una función de proporcionalidad inversa?

c) En caso de ser así, hallar su fórmula *(Sol: y=28/x)*

74. En una empresa constructora han realizado un estudio correspondiente a los días de trabajo necesarios para hacer una obra en función del número de obreros contratados, según muestra la tabla adjunta.

Nº de obreros	10	16	20	25	40
Días de trabajo	80	50	40	32	20

a) ¿Se puede ajustar la tabla a una función de proporcionalidad inversa? ¿Por qué?

b) En caso afirmativo, hallar su expresión algebraica y su gráfica. *(Sol: y=800/x)*

c) ¿Cuántos obreros tendrán que contratar para hacer una obra en un plazo de dos semanas? *(Sol: 58 obreros)*

75. Un depósito de 1000 l se puede llenar con un sólo grifo en 10 horas ¿En cuánto tiempo se llenarán dos grifos del mismo caudal? ¿Y 4? ¿Y 10? Construir una tabla y dibujar la gráfica correspondiente ¿Cuál es su fórmula? *(Sol: t=10/nº grifos)*

76. Queremos encontrar todos los rectángulos que tengan por área 20 cm^2. Si llamamos **b** a la base y **h** a la altura del rectángulo, se pide:

a) Obtener una relación entre **b** y **h**.

b) Dibujar la gráfica de la función obtenida.

Funciones definidas por ramas:

77. Representar las siguientes **funciones definidas a trozos** e indicar: Dom(f) e Im(f), continuidad, intervalos de crecimiento, posibles M y m, y ecuación de las posibles asíntotas:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x & \text{si } x\in[2,\infty) \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-1 \\ 1-2x & \text{si } -1\le x<1 \\ 3x-1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x-2 & \text{si } x\in[2,4] \\ 5 & \text{si } x\in(4,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si } x\le 1 \\ -2 & \text{si } x=2 \\ x/2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } -5\le x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\in(1,\infty) \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x<0 \\ -2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } x\in(-\infty,2] \\ x^2-4x & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-5} & \text{si } x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si } x>3 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x-x^2 & \text{si } 0\le x<3 \\ x-4 & \text{si } 3\le x<6 \\ 0 & \text{si } x>6 \end{cases}$

ESTADÍSTICA

MATEMÁTICAS 4º ESO Académicas

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES

La **Estadística** es la rama de las Matemáticas que utiliza conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades. Es una ciencia relativamente reciente, pues sus orígenes se remontan al siglo XVIII. Pero su implantación hoy en día es muy acusada:

- Se diseñan encuestas para recopilar información previa al día de elecciones y así predecir el resultado de las mismas.
- Se seleccionan al azar consumidores para obtener información con el fin de predecir la preferencia con respecto a ciertos productos y/o servicios.
- Los economistas consideran varios índices de la situación económica durante cierto período y utilizan la información para predecir la situación económica futura.
- Su utilidad es evidente también para los asesores financieros que han de evaluar las oportunidades de inversión a través de las bolsas de valores.
- Los portales de apuestas deportivas online recurren a la Estadística para, de acuerdo con todos los datos hasta la fecha, determinar el nivel de confianza de cada una de los posibles resultados.

Para todo lo anterior, la Estadística trabaja con una serie de aspectos, cualidades o propiedades de los individuos de la población, llamados **caracteres**; los valores que recorre un determinado carácter se llaman **variables** estadísticas. Pueden ser de varios tipos:

variables
- **cuantitativas**: son medibles, es decir, se describen mediante números
  - **discretas**: sólo toman valores puntuales (p. ej. número de hijos, talla de ropa, etc.)
  - **continuas**: puede tomar cualquier valor entre dos cualesquiera (p. ej. estatura, peso, edad, etc.)
- **cualitativas**: no son medibles, por lo que se describen mediante “modalidades” (p. ej. color del pelo, sexo, estado civil, etc.). También se llaman **atributos**.

Población es el conjunto de elementos que se investigan, **muestra** es una parte representativa de la población, e **individuo** es cada uno de los elementos que forman la población.

Ejemplo 1: Una población puede ser los 90 individuos de los tres grupos de 4º de ESO de un centro. Para estudiarla con mayor comodidad, podemos tomar una muestra formada por los 5 primeros de la lista de cada grupo. Ejemplos de variables que podemos analizar son su nivel de inglés (variable cualitativa), número de hermanos (cuantitativa discreta) y edad (cuantitativa continua).

Ejercicios final tema: 1 y 2

II) FRECUENCIAS y TABLAS

Ejemplo 2: En un instituto hay una clase cuyos 20 alumnos presentan las siguientes edades:

16	16	16	16	16	16	16	16	17	16
16	16	19	18	18	18	16	16	17	17

La variable que vamos a estudiar en esta distribución es la edad (variable cuantitativa), que llamaremos $\mathbf{x_i}$. Para ello, vamos a construir la siguiente tabla[1]:

Edad (años)	f_i	h_i
16	13	0,65
17	3	0,15
18	3	0,15
19	1	0,05
	Σ=20	Σ=1

La 2ª columna recoge la **frecuencia absoluta**, $\mathbf{f_i}$, que es el **número de veces que aparece cada valor de la variable**.

En la 3ª columna tenemos la **frecuencia relativa**, $\mathbf{h_i}$, que es la **frecuencia absoluta dividida por el nº de datos**, N:

$$\boxed{h_i = \frac{f_i}{N}} \qquad (1)$$

Obviamente, la suma de las frecuencias absolutas es N, y la de las relativas es 1:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = N \qquad \sum_{i=1}^{n} h_i = 1 \qquad (2)$$

Esto último es muy útil a la hora de detectar posibles errores en los datos de una tabla. Las h_i pueden verse como un tanto por uno. Por ejemplo, el dato 0,15 de la 3ª fila nos dice que el 15% de la clase tiene 18 años.

Ejemplo 3: En la misma clase del ejemplo anterior los 20 alumnos presentan las siguientes estaturas (en cm):

164	175	165	170	168	<u>157</u>	167	172	177	160
168	160	164	174	170	182	161	171	173	<u>194</u>

Nótese que hemos indicado los valores mínimo y máximo subrayados. La variable que vamos a estudiar ahora es la estatura (variable cuantitativa). Para confeccionar la tabla utilizaremos intervalos de amplitud 10 –llamados **intervalos de clase**–, comenzando por 155:

Estatura (cm)	f_i	h_i
[155–165)	6	0,30
[165–175)	10	0,50
[175–185)	3	0,15
[185–195]	1	0,05
	Σ=20	Σ=1

Adviértase que <u>en cada intervalo de clase se incluye el extremo inferior pero no el superior, salvo en el último</u>. El punto medio de cada intervalo se llama **marca de clase**, y lo denotaremos por $\mathbf{x_i}$.

[1] La idea de utilizar una tabla es que así un gran número de datos se pueden visualizar más cómodamente. Por tanto, cuando la distribución esté formada por pocos datos, no tiene sentido hacer una tabla, sino que basta con presentarlos ordenados.

¿Cuándo utilizar un tipo de tabla u otro?:

1º) **Tablas con los valores de la variable individualizados** (como en el ejemplo 2): **cuando**, ya sean pocos o muchos datos, **la variable toma pocos valores diferentes** (es decir, los valores se repiten mucho).

2º) **Tablas con los valores de la variable agrupados en intervalos** de clases (como en el ejemplo 3): **cuando el número de datos y de valores diferentes que toma la variable son grandes**. Con ello perderemos algo de información pero ganaremos en claridad…

En este último caso, ¿cuántos intervalos de clase utilizar? Existe un criterio orientativo según el cual el nº de clases debe ser aproximadamente igual a la √ del número de datos:

$$\text{nº clases} = \sqrt{N} \qquad (3)$$

En el ejemplo anterior sería $\sqrt{20} \cong 4{,}47$, es decir, 4 intervalos vendrían bien. A continuación, se determina la amplitud de los intervalos teniendo en cuenta los valores mínimo (157 cm) y máximo (194 cm) de la distribución:

$$\frac{194\,\text{cm} - 157\,\text{cm}}{4\,\text{intervalos}} = \frac{37\,\text{cm}}{4\,\text{intervalos}} \cong 9{,}25\,\text{cm / intervalo} \qquad (4)$$

de modo que 10 cm por intervalo es lo apropiado. A la hora de decidir dónde comienza el primer intervalo **se recomienda que**, finalmente, **los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos**.

Nótese que en la práctica el elegir un tipo de tabla u otro puede ser relativo: ¿qué se entiende por "pocos datos"? Veremos que una misma distribución se puede estudiar con dos tablas no necesariamente iguales, y las dos pueden ser perfectamente válidas.

También, téngase en cuenta que en ciertos casos los intervalos no tienen por qué ser necesariamente de igual amplitud (véase el ejemplo 4)

Ejercicios final tema: 3 y 4

III) REPRESENTACIONES GRÁFICAS

III.1) Diagrama de barras/Histograma

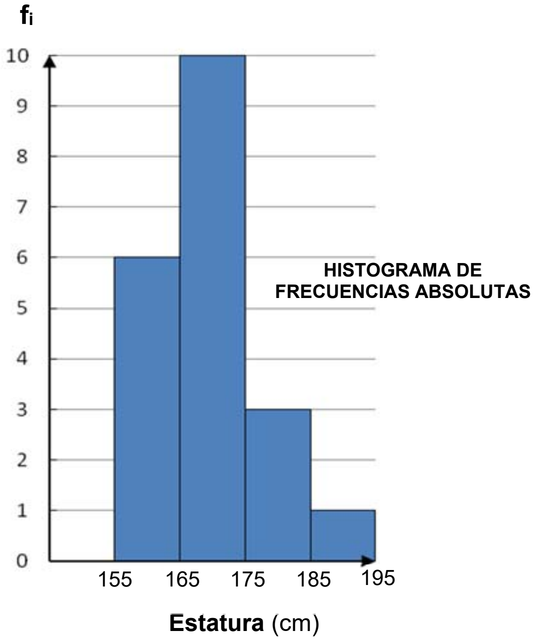
Consideremos la distribución del ejemplo 2. En unos ejes cartesianos situamos en el eje horizontal las edades y en el vertical la frecuencia absoluta f_i. Levantamos, a continuación, barras cuya altura es la frecuencia. Obtendremos así un **diagrama de barras**[2]:

Edad (años)	f_i
16	13
17	3
18	3
19	1
	Σ=20

[2] Obviamente, la idea de representar gráficamente los datos de la distribución es poder visualizar mejor ésta. Por tanto, si se trata de pocos datos, no tiene sentido ni tabularlos ni hacer una gráfica: basta con presentarlos ordenados.

Si hacemos lo propio con el ejemplo 3 pero, esta vez, dando a las barras el ancho de los intervalos, obtendremos un **histograma**:

Estatura (cm)	f_i
[155–165)	6
[165–175)	10
[175–185)	3
[185–195]	1
	Σ=20



¿Cuál es la diferencia entre el diagrama de barras y el histograma?

- **El diagrama de barras** visualiza las frecuencias como alturas, y se utiliza **para variables discretas** (y también para cualitativas)
- En el **histograma** el área de cada rectángulo representa la frecuencia correspondiente, y se utiliza **para datos agrupados en intervalos**.

En el histograma anterior, y puesto que los intervalos tenían la misma amplitud, los rectángulos tienen la altura correspondiente a la f_i. Ahora bien, si son de distinta amplitud, entonces habrá que ajustar la altura $\mathbf{a_i}$ de cada rectángulo mediante la siguiente fórmula:

$$\text{área} = f_i = \text{amplitud} \cdot a_i \Rightarrow \boxed{a_i = \frac{f_i}{\text{amplitud}}} \qquad (5)$$

Veámoslo en el siguiente ejemplo:

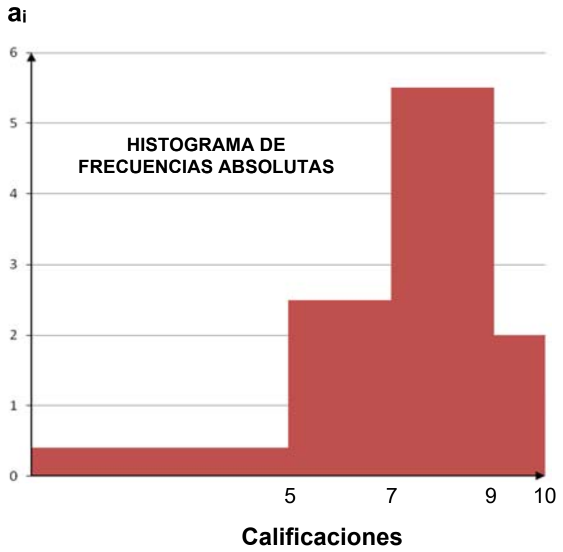
Ejemplo 4: Las calificaciones de una evaluación de los 20 alumnos de 4º ESO A son:

10	8	7	5	5	7	7	7	5	7
10	7	4	6	6	8	7	8	7	4

Confeccionar la correspondiente tabla agrupando los datos en intervalos de suspensos (0 a 5), aprobados (5 a 7), notables (7 a 9) y sobresalientes (9 a 10). Construir el histograma de frecuencias absolutas.

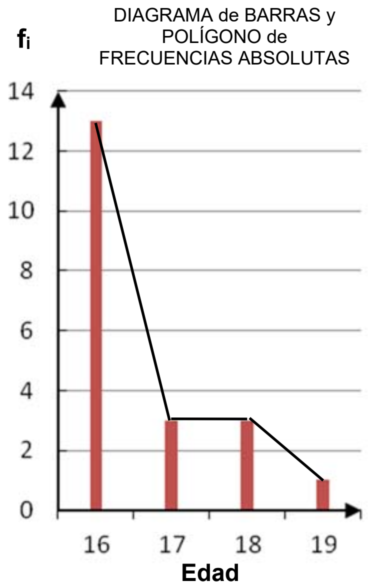
Calificación	f_i	$a_i=f_i$/amplitud	h_i
[0–5)	2	2/5=**0,4**	0,10
[5–7)	5	5/2=**2,5**	0,25
[7–9)	11	11/2=**5,5**	0,55
[9–10]	2	2/1=**2**	0,10
	Σ=20		Σ=1

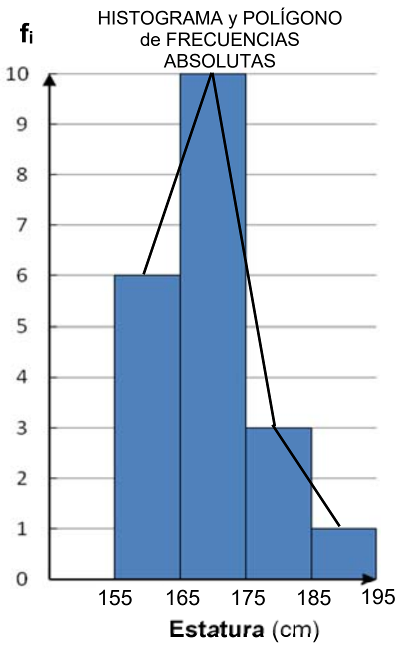
Adviértase que en la 3ª columna se ha tenido que ajustar la altura $\mathbf{a_i}$ de cada rectángulo, de acuerdo con la fórmula (5), de forma que su área sea igual a su f_i. De esta forma, el histograma quedaría de la siguiente forma:

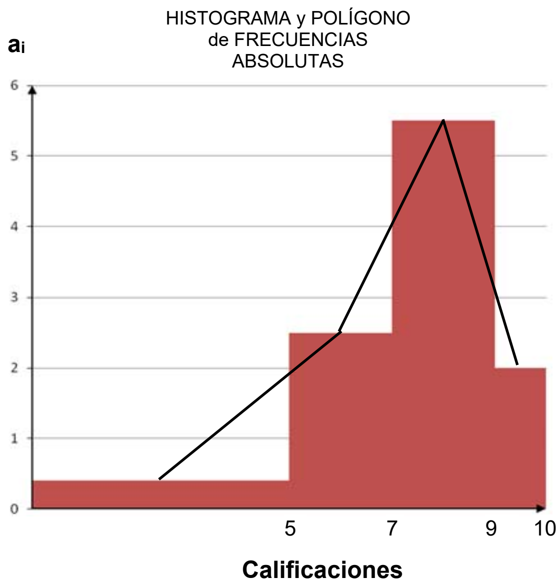


III.2) Polígono de frecuencias

Uniendo los extremos superiores de las barras de un diagrama de barras, o los puntos medios del lado superior de cada rectángulo de un histograma, obtenemos el llamado **polígono de frecuencias**. Veámoslo para los ejemplos anteriores:





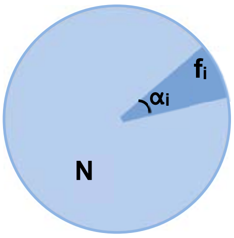


NOTA: En los ejemplos anteriores lo que se representaba era la frecuencia absoluta. Pero, evidentemente, también existen diagramas de barras o histogramas de frecuencias relativas.

III.3) Gráfico de sectores

Si **dividimos un círculo en sectores circulares de área[3] proporcional a cada frecuencia absoluta $\mathbf{f_i}$**, obtendremos un **gráfico de sectores**. Vamos a obtener, mediante regla de tres, la fórmula que nos indique cuántos grados α_i corresponden a cada sector:

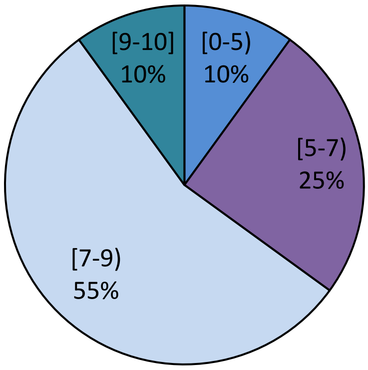
[3] Lógicamente, si el área del sector circular es proporcional a fi, también lo será su amplitud.



$$\left.\begin{array}{l} 360^\circ \rightarrow N \\ \alpha_i \rightarrow f_i \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha_i = \frac{f_i}{N} \cdot 360^\circ = h_i \cdot 360^\circ} \qquad (6)$$

Vamos a aplicarla al caso concreto del ejemplo 4:

Calificación	f_i	h_i	$\alpha_i = h_i \cdot 360^\circ$
[0-5)	2	0,10	36º
[5-7)	5	0,25	90º
[7-9)	11	0,55	198º
[9-10]	2	0,10	36º
	Σ=20	Σ=1	Σ=360º



Nótese que, si la tabla está bien confeccionada, obviamente todos los α_i sumarán 360º. Además, se suele indicar el % que corresponde a cada sector.

Por último, conviene indicar que, en el caso de variables cualitativas, existen otros tipos alternativos de representaciones gráficas (si bien, las dos primeras obedecen más a fines de tipo publicitario que a consideraciones de tipo matemático…):

- **pictograma**: en lugar de una barra se utiliza una figura alusiva de altura o tamaño proporcional a la frecuencia. P. ej. para indicar la producción de automóviles de distintos países. Tiene el inconveniente de ser poco preciso.
- **cartograma**: es un mapa coloreado en distintos tonos y colores con una leyenda al margen que indica su significado.
- **diagramas de columnas apiladas**: p. ej. la misma columna se divide en porcentaje de hombres y mujeres.
- **pirámide de población**: es un tipo de gráfico muy conocido pues se utiliza mucho en Ciencias Sociales para cuestiones demográficas.

CUADRO-RESUMEN:

variable
- **cuantitativa**:
  - **discreta**: diagrama de barras ↔ polígono de frecuencias
    diagrama de sectores
  - **continua**: histograma ↔ polígono de frecuencias
    diagrama de sectores
- **cualitativa**: diagrama de barras ↔ polígono de frecuencias
  diagrama de sectores
  pictogramas, cartogramas, pirámides de población…

Ejercicios final tema: 5 y 6

IV) MEDIDAS de TENDENCIA CENTRAL (media, mediana, moda)

IV.1) Media aritmética

Se define como la **suma de todos los valores x_i dividida por el número de valores, N**. Se designa como $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} \qquad (7)$$

Esta es la típica fórmula que se utiliza, por ejemplo, para calcular la nota media de una serie de exámenes. Ahora bien, en general, cada valor x_i se repetirá con una frecuencia f_i. En ese caso, la fórmula sería:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}} \qquad (8)$$

Observaciones:

1º) En el caso de valores agrupados en intervalos, x_i indica la marca de clase, es decir, el punto intermedio de cada intervalo.

2º) Obviamente, no existe la media si los datos son cualitativos. Ni tampoco si los datos están agrupados y alguna clase está abierta (p. ej. si en una encuesta el último grupo fuera "mayores de 60 años")

3º) La media es el centro de gravedad de la distribución; es decir, si las barras tuvieran peso representaría el punto donde habría que sostener la base del diagrama para que no se venciera.

Vamos a ver cómo se calcula la media en los ejemplos 2 y 3:

Edad (x_i)	f_i	$f_i x_i$
16	13	208
17	3	51
18	3	54
19	1	19
	Σ=20	Σ=332

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} f_i x_i}{N} = \frac{332}{20} = 16{,}6 \text{ años}$$

Estatura (cm)	x_i	f_i	$f_i x_i$
[155-165)	160	6	960
[165-175)	170	10	1700
[175-185)	180	3	540
[185-195]	190	1	190
		Σ=20	Σ=3390

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} f_i x_i}{N} = \frac{3390}{20} = 169{,}5 \text{ cm}$$

Obsérvese que es fundamental no olvidarse de indicar las unidades.

IV.2) Mediana

Es un **valor tal que la mitad de los valores son menores o iguales que él, y la otra mitad mayores o iguales**. Se representa como **Me**. Para calcularla, cabe distinguir tres posibles situaciones:

1º) Distribuciones con pocos valores, es decir, series estadísticas: Se ordenan crecientemente dichos valores, y la mediana será el valor central (si el número de datos es par, se toma la semisuma de los dos centrales).

Ejemplo 5: Los sueldos mensuales (en €) de 7 trabajadores de una empresa son los siguientes:

3000 915 650 825 700 775 1580

Si calculamos la media (1206,43 €) observamos que no es muy representativa de los datos de esta distribución, ya que éstos se encuentran muy dispersos. Obtengamos la mediana:

650 700 775 $\boxed{825}$ 915 1580 3000

El valor obtenido, 825 €, sí es representativo de la mayoría de los datos.

2º) Variable discreta (como en el ejemplo 2): calculamos N/2, y en la tabla de frecuencias absolutas, f_i, vamos sumando los valores de f_i hasta encontrar en qué fila dicha suma sobrepasa a N/2. **La mediana será entonces el valor x_i de dicha fila**:

NOTA: Si coincide dicha suma con N/2, se toma $M_e = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ (9)

Ejemplo 2:

Edad (años)	f_i	$\sum f_i$
$M_e \rightarrow$ 16	13	13 $\leftarrow \frac{N}{2}=10$
17	3	16
18	3	19
19	1	20
	$\sum$=20	

Me=16 años

3º) Variable agrupada en intervalos (como en el ejemplo 3): como en el caso anterior, calculamos N/2, y en la tabla de frecuencias absolutas, f_i, vamos sumando los valores de f_i hasta encontrar en qué fila dicha suma sobrepasa a N/2. **El intervalo mediano** –es decir, en el que está la mediana– **será entonces el correspondiente a dicha fila**:

NOTA: Si coincide dicha suma con N/2, se toma como antes $M_e = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

Ejemplo 3:

Estatura (cm)	f_i	$\sum f_i$
[155–165)	6	6
Intervalo mediano $\rightarrow$ [165–175)	10	16 $\leftarrow \frac{N}{2}=10$
[175–185)	3	19
[185–195]	1	20
	$\sum$=20	

Ahora bien, ¿cómo saber el valor exacto de la mediana? Existe un método gráfico, y también una fórmula general para calcular la mediana en estos casos, pero ambas escapan a las pretensiones de este curso.

Observaciones:

1º) Curiosamente, la mediana depende del orden de los datos y no de su valor.

2º) La mediana se puede calcular, evidentemente, en distribuciones de tipo cuantitativo, pero también en las de tipo cualitativo cuyas modalidades se pueden ordenar.

IV.3) Moda

«Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia». Se representa como **Mo**. Representa el valor dominante de la distribución; por ejemplo, en unas elecciones la moda sería el partido más votado.

Ejemplo 2:

	Edad (años)	f_i
M_o →	16	13
	17	3
	18	3
	19	1

Ejemplo 3:

	Estatura (cm)	f_i
	[155–165)	6
Intervalo modal →	[165–175)	10
	[175–185)	3
	[185–195]	1

Observaciones:

1º) La Mo existe siempre[4], en cualquier tipo de distribuciones (cualitativas o cuantitativas).

2º) Vemos que en las que presentan los datos agrupados en intervalos se habla de **intervalo modal** o **clase modal**. Para este caso existe una fórmula –que sobrepasa las pretensiones del presente curso–, del estilo de la existente para la mediana, para hallar en qué punto concreto del intervalo modal se halla la moda.

3º) En una distribución sólo hay una media y una mediana, pero **puede haber más de una moda**. Y no tiene por qué situarse en la zona central.

Ejercicios final tema: 7 a 10

V) MEDIDAS de DISPERSIÓN (recorrido, varianza, desviación típica)

Tienen por objeto dar una idea de la mayor o menor concentración de los valores de una distribución alrededor de los valores centrales.

[4] Salvo el inusual caso en el que todas las $\mathbf{f_i}$ sean iguales…

V.1) Recorrido

«Es la diferencia entre el mayor y el menor valor de una distribución».

Ejemplo 6: Las notas de los exámenes de Matemáticas de dos alumnos a lo largo del curso son:

Carlos:	5	7	7	7	9
Ana:	2	6	8	10	9

Puede comprobarse que ambos tienen la misma media, 7. Pero Ana tiene sus notas mucho más dispersas que Carlos:

$$R_{\text{notas Carlos}}=9-7=2$$

$$R_{\text{notas Ana}}=10-2=8$$

V.2) Varianza y desviación típica

Antes de definir la varianza, conviene considerar en una serie de datos su **desviación respecto a la media**, que sería la diferencia entre cada dato y la media, en valor absoluto (para que siempre sea >0):

$$di=\left|x_i-\overline{x}\right| \qquad (10)$$

Si sumamos los cuadrados de todas las desviaciones y los dividimos por el número de datos, N, obtenemos la **varianza, V**:

$$V=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{N} \qquad (11)$$

Observaciones:

1º) No es necesario el valor absoluto en las desviaciones $x_i-\overline{x}$, puesto que éstas están al cuadrado

2º) Las unidades de la varianza son al cuadrado, p.ej. cm^2, $años^2$, $€^2$, etc.

3º) La varianza siempre es positiva.

Como la varianza, por estar expresada en unidades cuadradas, no se puede comparar con la media, se utiliza la **desviación típica, s**, que se define como la **raíz cuadrada de la varianza**:

$$\boxed{s=\sqrt{V}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{N}}} \qquad (12)$$

Observaciones:

1º) La **s** tiene las mismas unidades que la variable x_i.

2º) La varianza y la desviación típica no tienen sentido en distribuciones en las que no se puede calcular la media aritmética.

3º) Es bastante habitual nombrar la varianza V como s^2.

4º) La s nos dice cómo de alejados de la media, es decir, cómo de dispersos se encuentran los datos: Cuanto más agrupados estén los datos en torno a la media, menor será s. De hecho, **para poder comparar varias distribuciones y ver cuál está más dispersa respecto a la media** se utiliza el llamado **coeficiente de variación** o dispersión:

$$\boxed{C.V. = \frac{s}{\bar{x}}} \qquad (13)$$

que habitualmente se expresa en %.

Ejemplo 6: Las notas de los exámenes de Matemáticas de dos alumnos a lo largo del curso son:

Carlos:	5	7	7	7	9
Ana:	2	6	8	10	9

Puede comprobarse que ambos tienen la misma media, $\bar{x} = 7$. Calculamos la varianza y, a partir de ella, su desviación típica:

$$V_{Carlos} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{(5-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (9-7)^2}{5} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2^2}{5} = \frac{4+4}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{Carlos} = \sqrt{1{,}6} \cong 1{,}26}$$

$$V_{Ana} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{(2-7)^2 + (6-7)^2 + (8-7)^2 + (10-7)^2 + (9-7)^2}{5} = \frac{(-5)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2}{5} = \frac{25+1+1+9+4}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{Ana} = \sqrt{8} \cong 2{,}83}$$

Vemos que $s_{Carlos} < s_{Ana}$, lo cual confirma lo que ya sabíamos…

Ejemplo 2:

Edad (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
16	13	208	-0,6	0,36	4,68
17	3	51	0,4	0,16	0,48
18	3	54	1,4	1,96	5,88
19	1	19	2,4	5,76	5,76
	Σ=20	Σ=332			Σ=16,8

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} f_i x_i}{N} = \frac{332}{20} = 16{,}6 \text{ años}$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{4} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{16{,}8}{20} = 0{,}84 \text{ años}^2$$

$$\boxed{s = \sqrt{0{,}84} \cong 0{,}92 \text{ años}}$$

Ejemplo 3:

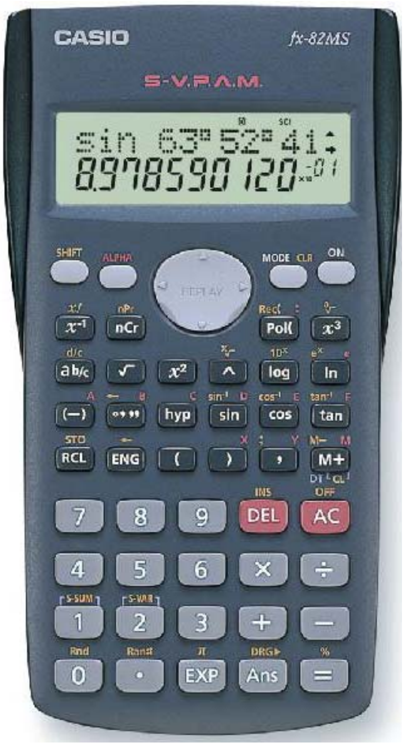
Estatura (cm)	x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
[155–165)	160	6	960	-9,5	90,25	541,5
[165–175)	170	10	1700	0,5	0,25	2,5
[175–185)	180	3	540	10,5	110,25	330,75
[185–195]	190	1	190	20,5	420,25	420,25
		Σ=20	Σ=3390			Σ=1295

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} f_i x_i}{N} = \frac{3390}{20} = 169{,}5 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{4} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{1295}{20} = 64{,}75 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{s = \sqrt{64{,}75} \cong 8{,}05 \text{ cm}}$$

V.3) Obtención de los parámetros estadísticos con la calculadora



Vamos a explicarlo para una Casio fx-82 MS, uno de los modelos más extendidos entre los estudiantes[5]. Para cualquier otro modelo se suele proceder de forma bastante análoga. Utilizaremos los datos del **ejemplo 3**:

1º) Ponemos la calculadora en modo SD (estadístico): $\boxed{\text{MODE}}$ 2

2º) Borramos, por precaución, los datos previos de la memoria:

$\boxed{\text{SHIFT}}$ CLR 1 $\boxed{=}$

3º) Introducimos los datos:

160 $\boxed{x}$ 6 DT   170 $\boxed{x}$ 10 DT   180 $\boxed{x}$ 3 DT   190 $\boxed{x}$ 1 DT

$\uparrow x_i$ $\uparrow f_i$

NOTA: Podemos utilizar ▲ y ▼ para ver los datos ya introducidos. Incluso podemos modificar alguno y luego pulsar $\boxed{=}$, o borrar pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ CL

4º) $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-SUM}}$ 1 $\longrightarrow \Sigma x_i^2=575\,900$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ 1 $\longrightarrow \bar{x}=169{,}5$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-SUM}}$ 2 $\longrightarrow \Sigma f_i x_i=3\,390$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-VAR}}$ 2 $\longrightarrow s=8{,}0467385$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S-SUM}}$ 3 $\longrightarrow N=20$

Ejercicios final tema: 11 y ss.

[5] Puede descargarse el manual en https://www.dropbox.com/s/nr5qlmhcupv7t8s/manual_casio_fx_82_ms.pdf

15 EJERCICIOS de ESTADÍSTICA 4º ESO Acad.

Conceptos. Definiciones:

1. De los siguientes caracteres de una población, indicar **razonadamente** los que son cualitativos y los que son cuantitativos:

a) Sexo
b) Nacionalidad
c) Edad
d) Número de hermanos
e) Color del pelo
f) Nota de Matemáticas
g) Estatura
h) Número de calzado

2. De las siguientes variables, indicar **razonadamente** las que son discretas y las que son continuas:

a) Número de vecinos de un edificio
b) Número de horas que un determinado individuo ve la televisión
c) Nota de Matemáticas en un examen
d) Nota de Matemáticas en el boletín de notas
e) Contenido en cm^3 de una lata de conservas

Pasos a seguir a la hora de abordar un ejercicio de Estadística:

1º) ¿Cuál es la variable, x_i?
2º) ¿Qué tipo de variable es: cuantitativa (discreta o continua) o cualitativa?
3º) Agrupar los datos en función del tipo de variable y empezar a construir la tabla estadística, adjuntando, de momento, dos columnas: x_i y f_i.
4º) En función de lo que nos piden ($\bar{x}$, s, histograma, etc.) añadir las columnas necesarias: Σx_i, Σx_i^2, etc.

Frecuencias y tablas:

3. El número de hermanos de 40 alumnos es:

3	4	2	3	4	3	4	4	4	2
3	4	4	3	4	1	2	3	5	4
2	2	2	5	3	4	4	6	2	6
4	3	2	1	2	3	2	4	3	1

a) ¿De qué tipo de variable se trata? Construir una tabla estadística en la que figuren todas las frecuencias.

b) ¿Cuántos alumnos tienen 5 o más hermanos? ¿Cuántos 3 o menos?

4. Se aplica un test de inteligencia para averiguar el cociente intelectual de 40 alumnos de 4º de ESO, obteniéndose los siguientes resultados:

106	136	81	110	95	92	99	106	81	95
110	103	88	81	81	99	110	114	128	103
103	74	95	136	95	88	106	121	106	114
117	92	85	125	95	110	132	95	103	81

a) Razonar qué tipo de variable es. Construir una tabla estadística en la que figuren todas las frecuencias.

b) ¿Cuántos alumnos tienen un CI por debajo de 100?

c) Si se consideran superdotados a los que tienen CI>130, ¿hay alguno en clase?

d) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene de CI 110 o más?

Representaciones gráficas:

5. Construir el diagrama de barras y polígono de frecuencias absolutas, y el diagrama de sectores, de la distribución del ejercicio 3.

6. Construir el histograma y polígono de frecuencias relativas, y el diagrama de sectores, de la distribución del ejercicio 4.

Parámetros de centralización:

7. En la figura adjunta aparecen los resultados de la última jornada de la Liga de fútbol 2013-2014. Se pide:

Málaga	1 - 0	Levante
Real Madrid	3 - 1	Espanyol
Barcelona	1 - 1	Atlético
Valencia	2 - 1	Celta
R. Sociedad	1 - 2	Villarreal
Almería	0 - 0	Athletic
Osasuna	2 - 1	Betis
Rayo	1 - 2	Getafe
Valladolid	0 - 1	Granada
Sevilla	3 - 1	Elche

a) Formar con los goles/partido una tabla estadística apropiada para responder a los apartados siguientes.

b) Dibujar el diagrama de barras, polígono y diagrama de sectores, todos ellos de frecuencias absolutas

c) Calcular la media de goles/partido, moda y mediana.

8. El número de horas de sol registradas en un determinado mes en 50 estaciones meteorológicas es:

83	82	78	72	107	107	93	72	85
98	71	76	75	83	72	126	102	76
112	99	155	118	150	129	119	148	181
151	167	156	180	173	149	80	131	121
110	200	162	214	176	186	187	186	141
212	186	199	198	219				

a) Razonar de qué clase de variable se trata. Confeccionar una tabla estadística de cara a los siguientes apartados.

b) Dibujar el histograma de frecuencias relativas y el polígono de frecuencias absolutas.

c) Calcular la media de horas de sol, el intervalo modal y el intervalo mediano.

9. En la tabla figuran los datos de las pulsaciones de un equipo de atletismo después de una carrera:

Pulsaciones	70–74	75–79	80–84	85–89	90–94	95–99
Nº de atletas	3	3	7	10	12	8

a) ¿Qué tipo de variable es? Construir una tabla apropiada para lo que se pide a continuación.

b) Hallar la media. *(Sol: ≅88,2 pulsaciones)*

c) Hallar el intervalo mediano y el intervalo modal.

d) Construir el histograma y el polígono de frecuencias absolutas.

10. A un conjunto de cinco notas cuya media es 7,31 se le añaden las calificaciones siguientes: 4,47 y 9, 15 ¿Cuál es la nueva media?

Parámetros de dispersión:

Medida del tórax (cm)	**Nº de hombres**
[80,85)	4
[85,90)	10
[90,95)	24
[95,100)	32
[100,105)	22
[105,110]	8

11. Los datos de la tabla adjunta corresponden a las medidas del tórax, en cm, de cien hombres adultos. Construir la tabla estadística necesaria para responder a las siguientes cuestiones:

a) Hallar la media.

b) Calcular el intervalo mediano y el intervalo modal.

c) Obtener la desviación típica.

d) Dibujar el histograma y el polígono de frecuencias absolutas.

12. En un centro militar se ha tomado una muestra de 16 jóvenes, obteniéndose las siguientes estaturas (en cm):

160	172,4	168	167	175	179	180	198
164	166	174	177	182,5	185	191	173,5

a) Construir una tabla estadística apropiada.

b) Obtener el histograma y el polígono de frecuencias absolutas.

c) Calcular la media, intervalo modal, intervalo mediano y desviación típica. *(Sol: $\bar{x}\cong$176,25 cm; s$\cong$9,9 cm)*

13. Se han medido los pesos y las alturas de 6 personas, obteniéndose los datos siguientes:

Peso (kg)	65	60	65	63	68	68
Altura (cm)	170	150	168	170	175	180

a) ¿Qué medidas están más dispersas, los pesos o las alturas? Utilizar el coeficiente de variación.
(Sol: Las alturas, puesto que CV_a=5%>CV_p=4%)

b) Comprobar lo anterior gráficamente.

14. La tabla siguiente nos da las puntuaciones obtenidas por un grupo de 20 alumnos en un test:

Puntuaciones	0–20	20–40	40–50	50–60	60–80	80–100
Nº alumnos	3	6	5	3	–	3

Al mismo grupo de alumnos se le hace otra prueba y las puntuaciones obtenidas son:

10	11	20	5	10	8	11	12	5	9
14	11	3	9	11	12	11	8	9	11

a) ¿Qué datos se hallan más dispersos? Utilizar el coeficiente de variación.
(Sol: Las puntuaciones, ya que $CV_1\cong$54,7%>$CV_2\cong$34,6%)

b) Comprobar lo anterior gráficamente.

15. Las calificaciones de los 25 alumnos de 4º ESO A son:

6	6	7	6	7	5	5	6	7	5	4	5	4
9	3	3	5	5	5	9	5	4	5	4	8	

mientras que las de los 20 alumnos de 4º ESO B son:

6	6	7	3	10	3	5	5	2	5	4	3	9
4	9	5	6	6	6	7						

Calcular en qué grupo las notas están más dispersas. *(Sol: En el B, puesto que $CV_a \cong 28,6\% < CV_p \cong 38,9\%$)*

PROBABILIDAD

MATEMÁTICAS 4º ESO Académicas

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) DEFINICIONES

Experimentos

- **Deterministas:** al repetirlos en análogas condiciones podemos predecir su resultado de antemano (p.ej. dejar caer un objeto desde una determinada altura y medir el tiempo de caída)
- **Aleatorios:** no podemos predecir su resultado de antemano (p.ej. tirar una moneda o un dado)

Vamos a dedicar este tema precisamente a los sucesos aleatorios[1].

■ **Espacio muestral de un experimento aleatorio:** conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento. Se designa como **E**. Cada uno de los elementos que lo forman se llama **suceso elemental**, y se designan entre llaves: { }.

Ejercicio 1: Indicar el espacio muestral de cada uno de los siguientes experimentos aleatorios (Véase el primer ejemplo resuelto):

a) Lanzar una moneda y anotar el resultado: E={C,X}

b) Lanzar dos monedas y anotar el resultado (puede ser útil construir un árbol):

c) Lanzar tres monedas y anotar el resultado (puede ser de nuevo útil construir un árbol):

d) Lanzar un dado y observar el resultado:

e) Lanzar dos dados[2] y observar el resultado:

[1] Los sucesos aleatorios también se llaman estocásticos.

[2] Para evitar malentendidos, podemos imaginar ambos dados de colores distintos, con lo cual queda suficientemente claro que, por ejemplo, los casos (1,2) y (2,1) son distintos.

f) Lanzar dos dados y anotar la suma obtenida:

■ **Suceso aleatorio**: cada uno de los posibles subconjuntos del espacio muestral E.

Ejercicio 2: Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado. Indicar los sucesos elementales que componen los sucesos aleatorios indicados (El primero está resuelto):

Salir par: A={2,4,6}

Salir impar:

Salir $\dot{3}$:

Salir $\dot{5}$:

Salir nº primo:

Salir $\dot{7}$: (suceso imposible)

Salir nº comprendido entre 1 y 6: (suceso seguro)

■ Algunos sucesos reciben nombres especiales:

Suceso elemental: ya definido

Suceso compuesto: es aquel suceso formado por dos o más sucesos elementales (p.ej. que al lanzar un dado salga nº par)

Suceso seguro: es aquel suceso que siempre se verifica; se designa como **E**, ya que, evidentemente, coincide con el espacio muestral (p.ej. que al lanzar una moneda salga cara o cruz)

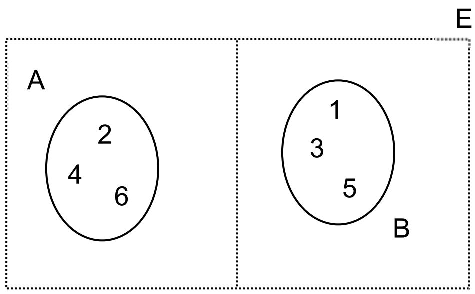
Suceso imposible: es aquel suceso que nunca se verifica; se designa como $\varnothing$ (p.ej. que al lanzar un dado salga $\dot{7}$)

■ **Suceso contrario** (o complementario) del suceso A: suceso que se realiza cuando no se realiza A, y viceversa; se designa como $\overline{A}$ (o también, a veces, como A^c o A')

Ejercicio 3: En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, los sucesos

$$\left.\begin{array}{l} A=\text{salir par}=\{2,4,6\} \\ \\ B=\text{salir impar}=\{1,3,5\} \end{array}\right\} \text{son contrarios (o complementarios), es decir, } \overline{A}=B \text{ (o, también, } \overline{B}=A)$$

Lo cual es fácil de entender con el siguiente gráfico, llamado Diagrama de Venn[3]:



[3] Ideados por *John Venn* (1834-1923), matemático y lógico británico.

■ **Observaciones:** Es obvio que:

1. El suceso $\overline{A}$ está formado por todos los sucesos elementales de E que no pertenecen a A

2. El contrario del suceso seguro es el imposible, y viceversa: $\boxed{\overline{E}=\phi}$ y $\boxed{\overline{\phi}=E}$

II) OPERACIONES CON SUCESOS

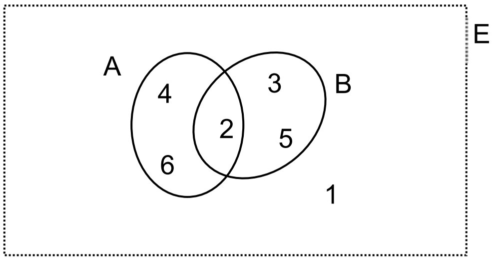
1. Unión de sucesos:

Suceso A U B: «Suceso que se realiza cuando se realiza A **o** B; se forma reuniendo los sucesos elementales de A y los de B».

Ejercicio 4: En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, considerar los sucesos

$$\left.\begin{array}{l}A=\text{salir par}=\{2,4,6\}\\ B=\text{salir nº primo}=\{2,3,5\}\end{array}\right\}\text{ entonces, } A \cup B=\text{"salir nº par o primo"}=\{2,3,4,5,6\}$$

Lo cual es fácil de entender con un diagrama de Venn: (sombrea tú la unión)



NOTA: La conjunción "o" suele significar la utilización de la U

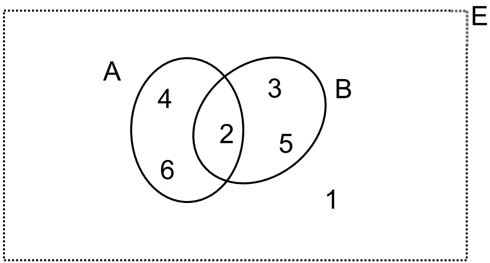
2. Intersección de sucesos:

Suceso A ∩ B: «Suceso que se realiza cuando se realiza A **y** B a la vez; se forma escogiendo los sucesos elementales comunes a A y B».

Ejercicio 5: En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, considerar los sucesos

$$\left.\begin{array}{l}A=\text{salir par}=\{2,4,6\}\\ B=\text{salir nº primo}=\{2,3,5\}\end{array}\right\}\text{ entonces, } A \cap B=\text{"salir nº par y primo"}=\{2\}$$

Lo cual es fácil de entender con un diagrama de Venn: (sombrea tú la intersección)



NOTA: La conjunción "y" o "a la vez" suele implicar la ∩.

■ **Observación:** Es obvio que $\boxed{A \cup \overline{A}=E}$ y $\boxed{A \cap \overline{A}=\varnothing}$ (trivial su justificación mediante diagramas de Venn)

Ejercicio 6: Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado. Indicar la U e ∩ de los siguientes sucesos:

A={1,2,5} y B={2,3,5}

C={2,4,6} y D={2,5}

F={1,3} y G={1,3,6}

H={3} e I={5}

J={2,5} y K={1,3,6}

L={2,4} y M={1,6}

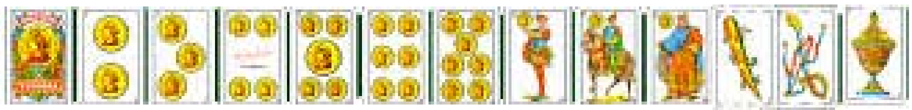
Ejercicio 7: Sea el experimento aleatorio consistente en extraer una carta de una baraja española[4]. Considerar los siguientes sucesos:

A="salir oro"

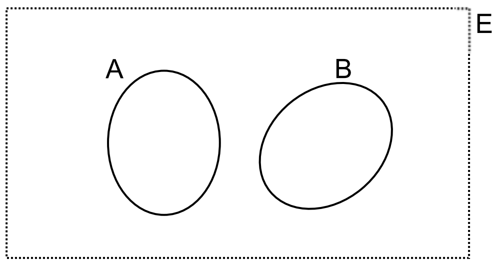
B="salir as"

C="salir rey de copas o as de espadas"

Interpretar los sucesos A U B, A U C, B U C, A ∩ B, A ∩ C, B ∩ C (véase el 1er ejemplo).

AUB="salir oro o as"= {  }

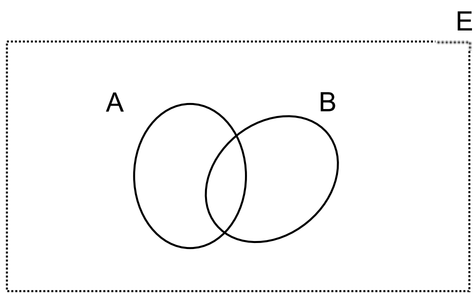
■ **Sucesos incompatibles:** «Dos sucesos son incompatibles si, al verificarse uno, no puede verificarse el otro, es decir, no se pueden verificar a la vez; por lo tanto, no tiene ningún elemento común».



Es decir: $\boxed{A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing}$

Lo cual de nuevo es fácil de entender con un diagrama de Venn:

De la misma forma, se dice que «dos **sucesos** son **compatibles** si pueden verificarse a la vez»:



$\boxed{A \text{ y } B \text{ compatibles} \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing}$

Es obvio, por lo tanto, que un suceso y su contrario, A y $\overline{A}$, son siempre incompatibles.

[4] Consideraremos 40 cartas (faltan los ochos y nueves), correspondientes a cuatro palos (oros, copas, espadas, bastos)

Propiedades de las operaciones con sucesos:

Son fácilmente deducibles mediante diagramas de Venn (como haremos en el ejercicio 8):

	Con respecto a la U	Con respecto a la ∩
CONMUTATIVA	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
ASOCIATIVA	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
DISTRIBUTIVA	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup \varnothing = A$ $A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap E = A$
LEYES de MORGAN[5]	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Ejercicio 8: Justificar mediante diagramas de Venn una de las dos propiedades distributivas, o bien una de las leyes de Morgan (Las demás demostraciones serían análogas).

III) DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

Se define la probabilidad de que ocurra un suceso A, y se designa como P(A), mediante el siguiente cociente, conocido como **regla de Laplace**[6]:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}} \qquad (1)$$

nº casos favorables=nº de elementos que componen A

nº casos posibles=nº de elementos de E, es decir, todos los sucesos elementales

[5] *Augusto De Morgan* (1806-1871), matemático inglés que demostró tales leyes.

[6] *Pierre Simon Laplace* (1749-1827), físico y matemático francés. Ver la justificación de esta fórmula en Internet.

Observación importante: Esta fórmula **sólo es válida si todos los sucesos** elementales que componen el espacio muestral **son equiprobables**[7] (piénsese, p.ej., en un dado trucado en vez de un dado perfecto…)

Ejercicio 9: En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, hallar la probabilidad de que ocurran los siguientes sucesos: **a)** salir nº impar **b)** salir nº primo **c)** salir 3 **d)** salir 5 **e)** Salir nº comprendido entre 1 y 6 **f)** salir 7

a)

(Sol: 1/2)

b)

(Sol: 1/2)

c)

(Sol: 1/3)

d)

(Sol: 1/6)

e)

(Sol: 1)

f)

(Sol: 0)

Ejercicio 10: En el experimento aleatorio consistente en extraer una carta de una baraja española, hallar la probabilidad de obtener: **a)** un oro **b)** un as **c)** la sota de espadas.

a)

(Sol: 1/4)

b)

(Sol: 1/10)

c)

(Sol: 1/40)

Ejercicio 11: En el experimento aleatorio consistente en lanzar a la vez dos monedas, hallar la probabilidad de obtener: **a)** dos caras **b)** dos cruces **c)** una cara y una cruz **d)** al menos una cruz. Comprobar que **se obtiene lo mismo haciendo un árbol y multiplicando las probabilidades de cada rama**.

a)

(Sol: 1/4)

b)

(Sol: 1/4)

[7] Es decir, que tengan la misma probabilidad.

c)

(Sol: 1/2)

d)

(Sol: 3/4)

Ejercicio 12: En el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados[8], hallar la probabilidad de obtener: **a)** suma 11 **b)** suma 8 **c)** suma ≤ 4 **d)** ¿Cuál es la suma más probable?

a)

(Sol: 1/18)

b)

(Sol: 5/36)

c)

(Sol: 1/6)

d)

Ejercicios final tema: 1 y 2

IV) PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

1. **«La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1»**

   Esto es obvio, pues el numerador de (1) no supera al denominador.

   Por lo tanto: la probabilidad no puede ser negativa

   " " no puede ser mayor que 1

2. **«La probabilidad del suceso seguro es 1:** $\boxed{P(E)=1}$**»**

   También obvio, pues en (1) coincidirían numerador y denominador.

3. **«La probabilidad del suceso imposible es 0:** $\boxed{P(\varnothing)=0}$**»**

   Igualmente obvio, pues en (1) el numerador sería 0.

[8] Se recuerda que, para evitar malentendidos, podemos imaginar ambos dados de colores distintos, con lo cual queda suficientemente claro que, por ejemplo, los casos (1,2) y (2,1) son distintos.

4. Probabilidad de la U de dos sucesos incompatibles:

$$\boxed{\text{A y B incompatibles} \Leftrightarrow P(A \cup B)=P(A)+P(B)} \qquad (2)$$

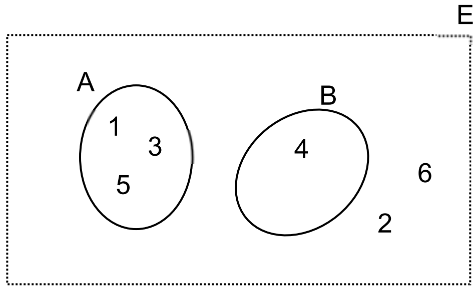
La justificación de esta fórmula es sencilla mediante el siguiente ejercicio:

Ejercicio 13: En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, considerar los siguientes sucesos:

A="salir impar"

B="salir $\dot{4}$"

Claramente A y B son incompatibles. Comprobar con ellos la validez de la fórmula anterior. Interpretar el resultado mediante un diagrama de Venn.



■ **NOTA:** La fórmula anterior se puede generalizar a más de dos sucesos incompatibles:

$$\boxed{\text{A, B y C incompatibles} \Leftrightarrow P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)}$$

5. Probabilidad del suceso contrario: $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$ (3)

Dem: Como hemos visto en el apartado II, $A \cup \overline{A}=E$; por lo tanto, $P(A \cup \overline{A})=P(E)=1$ (*****)

Por otra parte, como obviamente A y $\overline{A}$ son incompatibles, se cumplirá, según la propiedad 2, que $P(A \cup \overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$ (******)

De (*****) y (******) deducimos que $P(A)+P(\overline{A})=1 \Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)$ (C.Q.D.)

Aunque esta demostración debería ser suficiente, vamos a ver a continuación un ejercicio justificativo.

Ejercicio 14: Se extrae una carta de una baraja española[9]. Comprobar con el suceso A="salir figura" la validez de la fórmula anterior.

■ **Observaciones: 1º)** La fórmula anterior se puede poner también en la forma $\boxed{P(A)=1-P(\overline{A})}$;

2º) A la hora de calcular P(A) en un problema en el que aparece la frase "al menos", suele funcionar calcular $P(\overline{A})$ y aplicar dicha fórmula. Veamos un ejemplo.

[9] Las figuras de la baraja española, correspondientes a los números 10, 11 y 12, son la sota, el caballo y el rey.

Ejercicio 15: Se lanzan a la vez cuatro monedas. Hallar la probabilidad de obtener al menos una cara.

(Sol: 15/16)

6. Probabilidad de la U de dos sucesos compatibles:

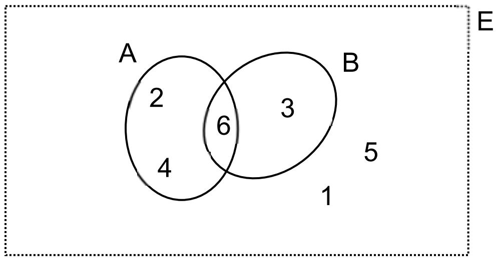
$$\boxed{\text{A y B compatibles} \Rightarrow P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)} \qquad (4)$$

La justificación de esta fórmula es sencilla mediante el siguiente ejercicio-ejemplo:

Ejercicio 16: En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado, considerar los siguientes sucesos:

A=”salir par”
B=”salir $\dot{3}$”

Comprobar la validez de la fórmula anterior. Interpretar el resultado mediante un diagrama de Venn.



Ejercicio 17: Una bolsa contiene bolas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bola al azar. Considerar los siguientes sucesos:

A=”salir par” B=”salir impar” C=”salir $\dot{4}$”

Calcular P(AUB), P(AUC) y P(BUC) mediante la correspondiente fórmula. Comprobar a continuación por conteo directo los resultados obtenidos.

Ejercicio 18: Se extrae una carta de una baraja española. Considerar los siguientes sucesos:

A="obtener un oro" B="obtener un rey" C="salir el as de espadas""

Calcular P(AUB) y P(AUC) mediante la correspondiente fórmula. Comprobar a continuación por conteo directo los resultados obtenidos. *(Sol: 13/40; 11/40)*

Ejercicio 19: Una urna contiene 20 bolas rojas, 15 azules y 7 verdes. Hallar: **a)** La probabilidad de que sea roja o verde. **b)** La probabilidad de que no sea azul. **c)** La probabilidad de que sea verde o azul.

a)

(Sol: 9/14)

b)

(Sol: 9/14)

c)

(Sol: 11/21)

Observaciones:

1. Una consecuencia evidente de (2) y (4) es la siguiente:

$$\boxed{\text{A y B incompatibles} \Leftrightarrow P(A\cap B)=0} \qquad (5)$$

2. Nótese que la fórmula (4) es una generalización de (2), o al revés, (2) es un caso particular de (4).
3. La fórmula (4) se generaliza a tres sucesos de la siguiente forma:

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

que de nuevo se puede justificar fácilmente mediante diagramas de Venn.

Ejercicios final tema: 3 a 15

V) EXPERIMENTOS COMPUESTOS. DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Una experiencia aleatoria es compuesta cuando está formada por varias pruebas. En estos casos, se recomienda utilizar un diagrama de árbol. **En un diagrama de árbol, la probabilidad de un determinado recorrido es igual al producto de la probabilidad de cada rama**[10], como ya hemos visto en el ejercicio 5, y confirmaremos con los siguientes dos ejercicios ejemplo:

Ejercicio 20: Lanzamos tres veces una moneda. Hallar la probabilidad de obtener tres caras, de dos formas distintas: **a)** Construyendo el espacio muestral. **b)** Mediante un diagrama de árbol. (Utilizar correctamente el lenguaje de sucesos). *(Sol: 1/8)*

a)

b)

Ejercicio 21: Lanzamos un dado dos veces. Hallar la probabilidad de obtener las dos veces un 5, de dos formas distintas: **a)** Construyendo el espacio muestral. **b)** Mediante un diagrama de árbol. (Utilizar correctamente el lenguaje de sucesos). *(Sol: 1/36)*

a)

b)

[10] Además, si sumamos las probabilidades de todos los recorridos finales posibles, observamos que suman 1. Ello es debido a que todos juntos forman el espacio muestral E. Este resultado, que puede comprobarse en los ejercicios ejemplo de este apartado, es una consecuencia del llamado Teorema de la Probabilidad Total, que veremos en próximos cursos.

■ Por lo tanto, a partir de este momento, en las experiencias compuestas nos ayudaremos de un diagrama de árbol, y calcularemos las distintas probabilidades multiplicando las de cada rama determinada; veamos dos ejercicios ejemplo:

Ejercicio 22: Hallar la probabilidad de obtener dos reyes al extraer consecutivamente dos cartas de una baraja española **a)** con devolución de la primera carta **b)** sin devolución de la primera carta.

a)

(Sol: 1/100)

b)

(Sol: 1/130)

Ejercicio 23: En una bolsa hay 15 bolas negras y 10 blancas. Extraemos dos bolas. Hallar la probabilidad de que las dos sean negras **a)** devolviendo la primera bola extraída **b)** sin devolverla.

a)

(Sol: 9/25)

b)

(Sol: 7/20)

Ejercicio 24: **a)** Supongamos que nos reparten dos cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de que las dos sean oros y de que ninguna sea un oro **b)** Hallar lo mismo, pero suponiendo que, una vez vista la primera carta, la devolvemos al mazo. (Se recomienda construir un árbol).

a)

(Sol: 3/52; 29/52)

b)

(Sol: 1/16; 9/16)

Ejercicio 25: Se lanzan dos dados. Hallar la probabilidad de que ambos no sean pares (Piénsese en lo complicado que sería resolver este problema por conteo directo sobre el espacio muestral E).

(Sol: 1/4)

Ejercicio 26: Extraemos de una baraja tres cartas. Hallar la probabilidad de que sean tres ases **a)** con devolución después de cada extracción **b)** sin devolución.

a)

(Sol: 1/1000)

b)

(Sol: 1/2470)

Ejercicios final tema: 16 a 24

24 EJERCICIOS de PROBABILIDAD 4º ESO Acad.

En los siguientes ejercicios se recomienda:

- *Considerar previamente, cuando proceda, el espacio muestral.*
- *Utilizar siempre el lenguaje de sucesos convenientemente.*
- *Siempre que proceda, dar los resultados en forma de fracción (no es necesario pasarlos a forma decimal).*

Probabilidad elemental:

1. Una bolsa contiene 12 bolas verdes y 4 rojas, y otra bolsa contiene 20 bolas verdes y 10 rojas. ¿En qué bolsa es más probable extraer una bola verde? *(Soluc: en la 1ª bolsa)*

2. En una bolsa se introducen 4 bolas azules, 4 rojas y 2 verdes. Se agita la bolsa y seguidamente se extraen tres bolas, de las que dos son rojas y una azul. A continuación, se extrae otra bola. ¿Qué color es el que tiene mayor probabilidad de ser elegido? *(Sol: el azul)*

3. Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Determinar la probabilidad de que: **a)** Sea roja o verde. **b)** No sea roja. *(Sol: 3/4; 3/5)*

4. Se extrae al azar una carta de una baraja española. Hallar la probabilidad de que salga:

a) Un as o una copa. *(Sol: 13/40)*

b) Una figura o una copa. *(Sol: 19/40)*

5. Considerar el experimento aleatorio consistente en extraer una bola de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20.

a) Indicar los sucesos elementales que componen el suceso A="extraer nº impar". Hallar la probabilidad de dicho suceso. *(Soluc: 1/2)*

b) Ídem para el suceso B="extraer nº primo". (NOTA: Considerar el 1 primo) *(Soluc: 9/20)*

c) Ídem para el suceso "extraer nº impar y primo". ¿Cómo es este suceso respecto a A y B? *(Soluc: 2/5)*

d) Sea el suceso "extraer nº impar o primo". Utilizando la fórmula adecuada y lo obtenido en los apartados anteriores (¡no mediante la regla de Laplace!), calcular la probabilidad de dicho suceso, razonando el porqué de la fórmula utilizada. *(Soluc: 11/20)*

6. En el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda 4 veces, se pide:

a) Formar el espacio muestral E (se recomienda utilizar un árbol). ¿De cuántos elementos consta? *(Soluc: 16 elementos)*

b) Hallar la probabilidad de obtener exactamente una cara. Hallar también la probabilidad de obtener justo dos caras. Con los dos resultados anteriores, y utilizando la fórmula adecuada (¡no mediante la regla de Laplace!), hallar la probabilidad de obtener una o dos caras. Razonar qué fórmula se ha utilizado. *(Soluc: 1/4, 3/8, 5/8)*

c) Hallar la probabilidad de obtener siempre cruz. *(Soluc: 1/16)*

d) Hallar, utilizando la fórmula de la probabilidad del suceso contrario (¡no mediante la regla de Laplace!), la probabilidad de obtener al menos una cara. *(Soluc: 15/16)*

7. Se lanzan al aire tres monedas. Determinar la probabilidad de que se obtenga al menos dos cruces. *(Sol: 1/2)*

8. Considerar el experimento aleatorio consistente en extraer una carta de una baraja española.

a) Describir su espacio muestral E. ¿Cuántos sucesos elementales lo componen? *(Soluc: 40)*

b) Sea el suceso A="extraer un oro". Definirlo y hallar su probabilidad. *(Soluc: 1/4)*

c) Ídem para el suceso B="extraer una figura". *(Soluc: 3/10)*

d) Utilizando el resultado anterior y la fórmula adecuada (¡no mediante la regla de Laplace!), calcular la probabilidad de no extraer una figura. *(Soluc: 7/10)*

e) Definir el suceso "extraer una figura y que sea además oro"; hallar su probabilidad. ¿Cómo es este suceso respecto a A y B? *(Soluc: 3/40)*

f) Sea el suceso "extraer figura u oro". Utilizando la fórmula adecuada y lo obtenido en los apartados anteriores (¡no mediante la regla de Laplace!), calcular la probabilidad de dicho suceso, razonando el procedimiento utilizado. *(Soluc: 19/40)*

9. Se lanzan dos dados y se suma la puntuación obtenida. Se pide:

a) Indicar el espacio muestral. ¿Cuántos casos posibles hay? *(Soluc: 36)*

b) Hallar la probabilidad de obtener exactamente un 4 *(Soluc: 1/12)*

c) Hallar la probabilidad de obtener puntuación ≤ 4 *(Soluc: 1/6)*

d) Hallar la probabilidad de no sacar un 12 *(Soluc: 35/36)*

e) Hallar la probabilidad de sacar un 4 o un 12 *(Soluc: 1/9)*

f) ¿Cuál es el número más probable de obtener? ¿Y el menos?

10. Se lanzan dos dados. Considerar los siguientes sucesos:

A="la suma de puntos es 5"
B="en uno de los dados ha salido 4"
C="en los dos dados salió el mismo resultado"

Se pide:

a) P(A), P(B) y P(C) *(Soluc: 1/9; 11/36; 1/6)*

b) $P(A\cap B)$ *(Soluc: 1/18)*

c) $P(A \cup B)$, por conteo directo y mediante fórmula. *(Soluc: 13/36)*

d) $P(A\cap C)$ *(Soluc: 0)*

e) $P(A \cup C)$, por conteo directo y mediante fórmula. *(Soluc: 5/18)*

f) $P(B\cap C)$ *(Soluc: 1/36)*

g) $P(B \cup C)$, por conteo directo y mediante fórmula. *(Soluc: 4/9)*

11. Se lanzan tres dados al aire. Calcular la probabilidad de que se obtenga:

a) 3 seises *(Soluc: 1/216)*

b) Una suma de puntos total igual a 8 *(Soluc: 7/72)*

12. En un juego tenemos que elegir una tarjeta de cada una de las dos cajas que hay sobre la mesa. En una de ellas hay tres tarjetas con las letras S, S, N, y en la otra tres con las letras O, O, I ¿Cuál es la probabilidad de formar SÍ? ¿Y la palabra NO? ¿Cuál es la probabilidad de no formar ninguna de estas dos palabras? *(Soluc: 2/9; 2/9; 5/9)*

13. Hallar la probabilidad de que la suma de los puntos de las caras visibles de un dado que se lanzó al azar sea múltiplo de 5. *(Soluc: 1/3)*

14. Supongamos una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara es triple que la de cruz. Hallar la probabilidad de obtener cara y la de obtener cruz. *(Soluc: 3/4 y 1/4)*

15. Se ha trucado un dado de tal forma que la probabilidad de obtener número par es doble que impar. Hallar:

a) Probabilidad de obtener un número par, y probabilidad de obtener impar. *(Soluc: 2/3 y 1/3)*

b) Probabilidad de cada suceso elemental. *(Soluc: 1/9 cualquier número impar y 2/9 cualquier par)*

c) Probabilidad de obtener puntuación ≤ 3 *(Soluc: 4/9)*

Experimentos compuestos. Diagramas de árbol:

16. Hallar la probabilidad de obtener dos ases al extraer dos cartas de una baraja, **a)** si una vez extraída la primera se devuelve al mazo. *(Soluc: 1/100)* **b)** Ídem suponiendo que la primera carta extraída no se devuelve al mazo.

17. En una población la probabilidad de nacer varón es de 0,46. De una familia con tres hijos, calcular la probabilidad de que (se recomienda hacer un árbol):

a) Los tres sean varones. *(Soluc: 0,097)*

b) Ninguno sea varón. *(Soluc: 0,15)*

c) Al menos haya un varón. *(Soluc: 0,84)*

d) Al menos haya una mujer. *(Soluc: 0,90)*

18. En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos/as de esa clase. Calcular la probabilidad de que (se recomienda hacer un árbol):

a) Los dos sean chicos. *(Soluc: 8/35)*

b) Sean dos chicas. *(Soluc: 9/35)*

c) Sean un chico y una chica. *(Soluc: 18/35)*

19. Después de tirar muchas veces un modelo de chincheta, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38. Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma? *(Soluc: 0,47)*

20. En un centro escolar hay 1000 alumnos/as repartidos como indica la tabla adjunta. Se elige al azar uno de ellos. Hallar la probabilidad de que:

a) Sea chico.

b) No use gafas.

c) Sea una chica con gafas.

d) No use gafas sabiendo que es chica.

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	147	135
NO USAN GAFAS	368	350

e) Sea chica sabiendo que no usa gafas.

f) Use gafas sabiendo que es chica.

21. En una empresa hay 200 empleados, la mitad de cada sexo. Los fumadores son 40 hombres y 35 mujeres. Si elegimos un empleado/a al azar, calcular la probabilidad de que sea hombre y no fume (Se recomienda hacer un árbol, como en el ejercicio anterior). Si sabemos que el elegido/a no fuma, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

22. Javier tiene en su bolsillo 4 monedas de cinco céntimos, 3 de 20 céntimos y 2 de 50 céntimos. Saca dos monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos (se recomienda hacer un árbol):

a) Que las dos sean de 5 céntimos. *(Soluc: 1/6)*

b) Que ninguna sea de 50 céntimos. *(Soluc: 2/3)*

c) Que sumen 70 céntimos. *(Soluc: 1/6)*

23. En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones. Calcular la probabilidad de que el número formado por las tres bolas, y en el orden de extracción, sea el 121, suponiendo que:

a) La bola se reintegra a la bolsa. *(Soluc: 1/8)*

b) La bola no se devuelve a la bolsa. *(Soluc: 1/6)*

24. Un jugador de baloncesto suele acertar el 75 % de los tiros libres. Supongamos que si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo. Calcular la probabilidad de que haga dos puntos, de que haga un punto, y de que no anote ningún punto. *(Soluc: 9/16; 3/16; 1/4)*

PRINCIPALES SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

	SÍMBOLO	SIGNIFICADO
1	!	[1]factorial
2	$\mid$	[2]divide
3	$\lvert\ldots\rvert$	valor absoluto de
4	$\pm$	más-menos
5	$\mp$	menos-más
6	$\forall$	para todo
7	$\exists$	existe al menos un
8	$\exists!$	existe un único
9	$\nexists$	no existe
10	/	tal que
11	:	
12	=	igual a
13	$\neq$	distinto de
14	$\cong$	aproximadamente
15	$\simeq$	
16	$\approx$	
17	$\equiv$	es idénticamente[3]
18	$<$	menor que
19	$>$	mayor que
20	$\leq$	menor o igual que
21	$\geq$	mayor o igual que
22	$\ll$	mucho menor que
23	$\gg$	mucho mayor que
24	∞	infinito
25	$\circ$	composición de funciones[4]
26	$\propto$	proporcional a
27	$\perp$	perpendicular a
28	$\parallel$	paralelo a
29	$\cap$	intersección
30	$\cup$	unión
31	$\subset$	contenido en
32	$\supset$	contiene
33	$\in$	pertenece a
34	$\notin$	no pertenece a
35	$\{\ ,\ ,\ldots\}$	conjunto

[1] Por ejemplo, $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

[2] Por ejemplo, $3\mid15$ y $5\mid15$

[3] A veces también se utiliza $\equiv$ para expresar "congruencia".

[4] $(f\circ g)(x)$ se lee "**g** compuesta con **f** de **x**" o "**f** de **g** de **x**" y significa $f(g(x))$.

36	**(a,b)**	el punto **a b**
37	**(a,b)**	intervalo abierto **a b**
38	**[a,b]**	intervalo cerrado **a b**
39	**(a,b]**	intervalo **a** abierto **b** cerrado
40	$\varnothing$	conjunto vacío
41	$\Rightarrow$	implica
42	$\Leftrightarrow$	si y solo si (sii)
43	$\neg$	no (negación lógica)
44	$\wedge$	y
45	$\vee$	o
46	$\sum_{m=1}^{n} m^2$	(sumatorio) "suma desde m=1 hasta n de n^2"
47	$\prod$	(productorio) "producto desde … hasta … de … "
48	$\mathbb{N}$	números naturales
49	$\mathbb{Z}$	números enteros[5]
50	$\mathbb{Q}$	números racionales
51	$\mathbb{I}$	números irracionales[6]
52	$\mathbb{R}$	números reales
53	$\mathbb{C}$	números complejos
54	$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$	límite cuando **x** tiende **a** ∞ de $f(x)=L$
55	$x \to a^+$	**x** tiende a **a** por la derecha

	Nombre	símbolo griego minúsc.	símbolo griego mayúsc.
1	Alfa	α	A
2	Beta	β	B
3	Gamma	γ	Γ
4	Delta	δ	Δ
5	Épsilon	ε	E
6	Zeta	ζ	Z
7	Eta	η	H
8	Theta	θ, ϑ	Θ
9	Iota	ι	I
10	Kappa	κ	K
11	Lambda	λ	Λ
12	Mu	μ	M
13	Nu	ν	N
14	Xi	ξ	Ξ
15	Ómicron	o	O
16	Pi	π	Π
17	Rho	ρ	P
18	Sigma	σ, ς	Σ
19	Tau	τ	T
20	Upsilon	υ	Y
21	Phi	ϕ, φ	Φ
22	Chi	χ	X
23	Psi	ψ	Ψ
24	Ómega	ω	Ω

[5] Como curiosidad, $\mathbb{Z}$ viene de *zahlen*, que en alemán significa "número".

[6] No hay un símbolo universalmente aceptado para los irracionales. De forma rigurosa, el conjunto de los irracionales se define como el conjunto de todos los reales "menos" el de los racionales, es decir, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

CUADRO-RESUMEN de FRACCIÓN GENERATRIZ

DECIMAL EXACTO	PERIÓDICO PURO	PERIÓDICO MIXTO
$\dfrac{\text{nº sin coma decimal}}{1\underbrace{0...0}_{\text{tantos 0 como cifras decimales}}}$	$\dfrac{\text{nº sin coma decimal} - \text{parte entera}}{\underbrace{9...9}_{\text{tantos 9 como cifras periódicas}}}$	$\dfrac{\text{nº sin coma decimal} - \text{parte entera y anteperíodo}}{\underbrace{9...9}_{\text{tantos 9 como cifras periódicas}}\underbrace{0...0}_{\text{tantos 0 como cifras anteperiódicas}}}$

<u>Ejemplos</u>:

$$2,24 = \frac{224}{100} = \frac{56}{25} \qquad 2,\overset{\frown}{24} = \frac{224-2}{99} = \frac{222}{99} = \frac{74}{33} \qquad 2,2\overset{\frown}{4} = \frac{224-22}{90} = \frac{202}{90} = \frac{101}{45}$$

CUADRO-RESUMEN de POTENCIAS

1º) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2º) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3º) $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

4º) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5º) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

1º) $a^0 = 1$

2º) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\qquad \left(\text{Caso part.: } a^{-1} = \dfrac{1}{a}\right)$

3º) $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$

4º) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ $\qquad \left(\text{Caso part.: } \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}\right)$

También es importante saber que:

$1^{\text{algo}} = 1$ $\qquad (\text{base negativa})^{\text{par}} = +$

$(-1)^{\text{par}} = 1$ $\qquad (\text{base negativa})^{\text{impar}} = -$

$(-1)^{\text{impar}} = -1$

IDENTIDADES NOTABLES

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

CUADRO-RESUMEN de RADICALES

- Definición de raíz n-ésima: $\sqrt[n]{a}=x \Leftrightarrow x^n=a$

  Consecuencia: $\sqrt[\cancel{n}]{x^{\cancel{n}}}=x$, y también $\left(\sqrt[\cancel{n}]{x}\right)^{\cancel{n}}=x$ $\leftarrow$ simplificacion sencilla
- Equivalencia con una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{x^m}=x^{m/n}$
- Simplificación de radicales/índice común: $\sqrt[n\cancel{p}]{x^{m\cancel{p}}}=\sqrt[n]{x^m}$

- 5 Propiedades de las raíces:
  ① $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$
  ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
  ③ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$
  ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$
  ⑤ $x\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{x^n\cdot a}$ $\leftarrow$ Introducir/extraer factores

CUADRO-RESUMEN de LOGARITMOS

Definición de logaritmo: $\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$ (donde a>0, a≠1)

Sistemas de logaritmos más utilizados:

NOMBRE	BASE	NOTACIÓN	DEFINICIÓN
Logaritmo decimal	a=10	log	$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$
Logaritmo neperiano[1]	a=e	Ln, ln	$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$

donde e ≅ 2,718281828459… se llama cte. de Euler; es un número irracional.

Fórmulas del cálculo logarítmico:

$\boxed{\log(p\cdot q)=\log p+\log q}$

$\boxed{\log\dfrac{p}{q}=\log p-\log q}$

$\boxed{\log p^n = n\cdot\log p}$ $\boxed{\log\sqrt[n]{p}=\dfrac{1}{n}\log p}$ (todas son válidas en cualquier base)

Casos particulares: $\boxed{\log_a a^x = x}$ $\boxed{a^{\log_a x}=x}$ $\boxed{\ln e^x = x}$ $\boxed{e^{\ln x}=x}$

$\boxed{\log_a a = 1}$ $\boxed{\log_a 1 = 0}$ $\boxed{\ln e = 1}$ $\boxed{\ln 1 = 0}$

Fórmula del cambio de base: $\boxed{\log_a x = \log x : \log a}$

[1] En honor a John Napier (Neper, en latín), matemático inglés (1550-1617) inventor de los logaritmos.

FÓRMULAS de TRIGONOMETRÍA

REGLA DE TRES : $\dfrac{2\pi}{360^\circ}\cdot\alpha$

GRADOS → **RADIANES**

RADIANES → **GRADOS**

SUSTITUIR π rad $= 180^\circ$

$$\boxed{\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}} \quad (1)$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}} \quad (2)$$

$$\boxed{\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} \quad (3)$$

$$\boxed{\text{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}} \quad (4)$$

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}} \quad (5)$$

$$\boxed{\text{ctg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}} \quad (6)$$

	30º	**45º**	**60º**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \quad (7)$$

$$\boxed{1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha} \quad (8)$$

$$\boxed{1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \text{cosec}^2\alpha} \quad (9)$$

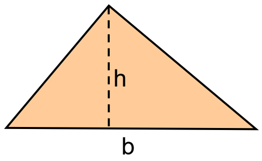
$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{sen}\ (90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \\ \cos\ (90^\circ - \alpha) = \text{sen}\ \alpha\end{array}\right\}\ \text{tg}\ (90^\circ - \alpha) = \text{ctg}\ \alpha} \quad (10)$$

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Cuadro-resumen de áreas y volúmenes

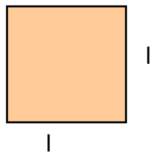
ÁREAS

Triángulo:



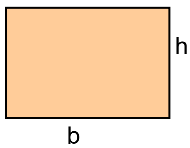
$$A=\frac{b\cdot h}{2}$$

Cuadrado:



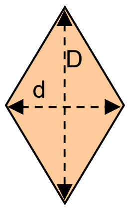
$$A=l^2$$

Rectángulo:



$$A=b\cdot h$$

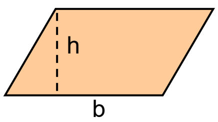
Rombo:



$$A=\frac{D\cdot d}{2}$$

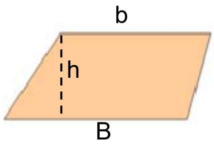
(semiproducto de las diagonales)

Paralelogramo: (Romboide[1])



$$A=b\cdot h$$

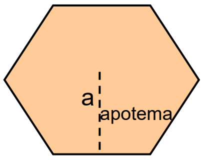
Trapecio:



$$A=\frac{B+b}{2}\cdot h$$

(semisuma de las bases por altura)

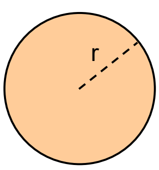
Polígonos regulares:



$$A=\frac{p\cdot a}{2}$$

(semiproducto de perímetro y apotema)

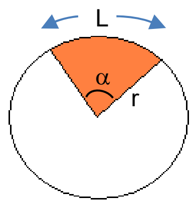
Circunferencia:



Área = πr^2

Longitud = $2\pi r$

Sector circular:



Área : $A=\frac{\pi r^2\alpha}{360}$

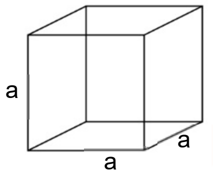
Longitud del arco : $L=\frac{2\pi r\alpha}{360}$

Perímetro : $p=L+2r$

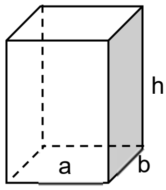
[1] En realidad, podemos considerar cuatro tipos de paralelogramos: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide; por lo tanto, en puridad un romboide sería un paralelogramos que no es ni cuadrado ni rectángulo ni rombo…

VOLÚMENES

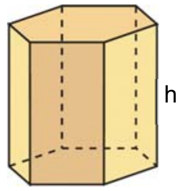
Prismas:



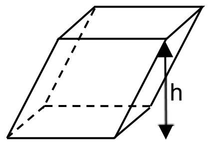
CUBO (HEXAEDRO REGULAR) $V=a^3$



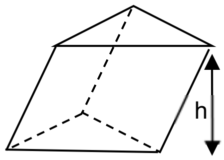
PRISMA CUADRANGULAR RECTO (ORTOEDRO) $V=a\,b\,h$



PRISMA HEXAGONAL RECTO



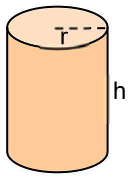
$\underbrace{\text{PRISMA CUADRANGULAR}}_{\text{PARALELEPÍPEDO}}$ OBLICUO



PRISMA TRIANGULAR OBLICUO

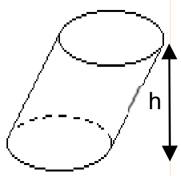
$$V = A_{base} \cdot h$$
$$A = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Cilindros:



CILINDRO (CIRCULAR) RECTO

$$V = A_{base} \cdot h = \pi r^2 h$$
$$A = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} =$$
$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$



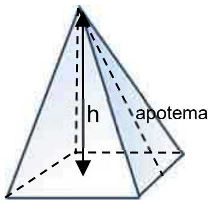
CILINDRO OBLICUO

$$V = A_{base} \cdot h$$

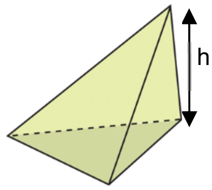
(La base puede ser un círculo o una elipse)

$$A = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Pirámides:



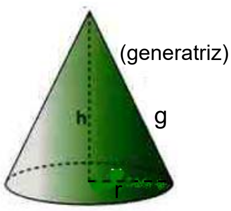
PIRÁMIDE CUADRANGULAR RECTA



PIRÁMIDE TRIANGULAR OBLICUA (TETRAEDRO)

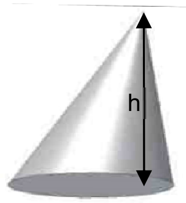
$$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$$
$$A = A_{lateral} + A_{base}$$

Conos:



CONO (CIRCULAR) RECTO

$$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$
$$A = A_{lateral} + A_{base} =$$
$$= \pi rg + \pi r^2$$



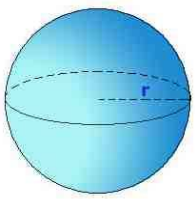
CONO OBLICUO

$$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$$

(La base puede ser un círculo o una elipse)

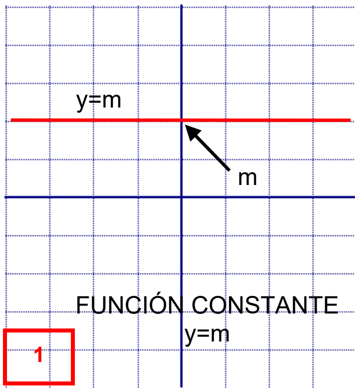
$$A = A_{lateral} + A_{base}$$

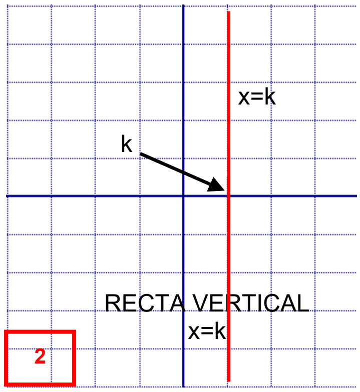
Esfera:



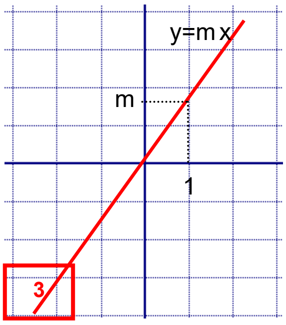
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$
$$A = 4 \pi r^2$$

Cuadro-resumen de rectas

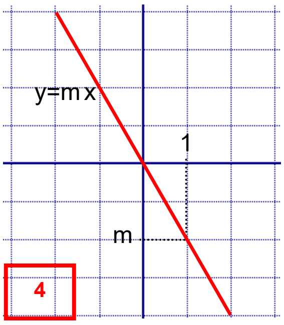




Función de proporcionalidad directa y=m x

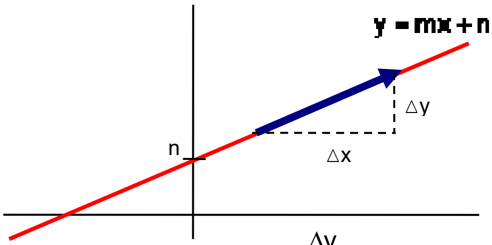


m>0

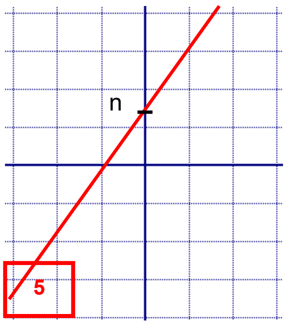


m<0

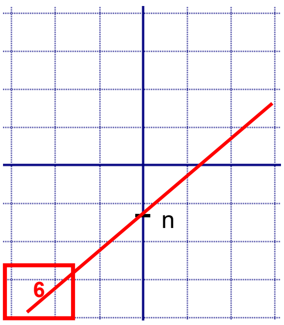
Función afín y=m x+n



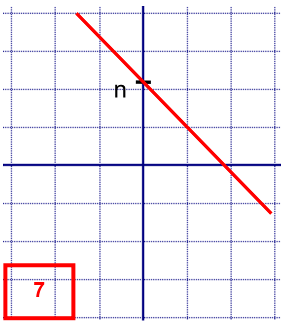
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



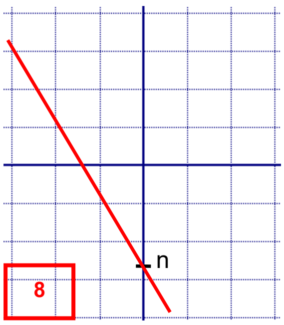
m>0
n>0



m>0
n<0



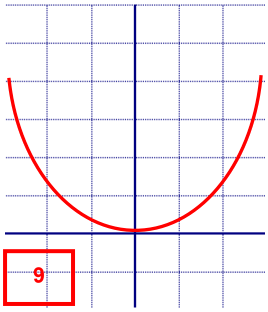
m<0
n>0



m<0
n<0

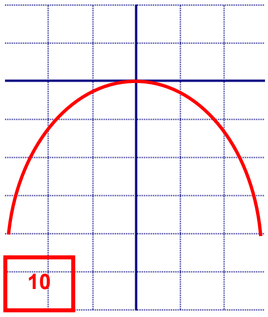
Cuadro-resumen de parábolas e hipérbolas

Parábola $y=a\,x^2$



9

a>0



10

a<0

Parábola $y=a\,x^2+b\,x+c$

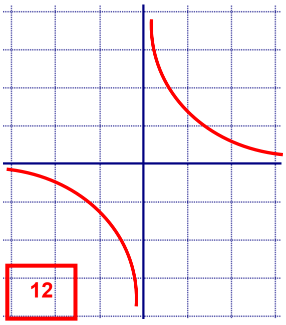
1º) Vértice: $x_V=-\dfrac{b}{2a}\longrightarrow$ y_v se obtiene sustituyendo la x_v anterior en la ecuación de la parábola

2º) Puntos corte eje x: y=0 $\Rightarrow$ resolver la ecuación $a\,x^2+b\,x+c=0$ (Puede haber 2, 1 o ningún corte)

3º) Puntos corte eje y: x=0 $\Rightarrow$ y=c

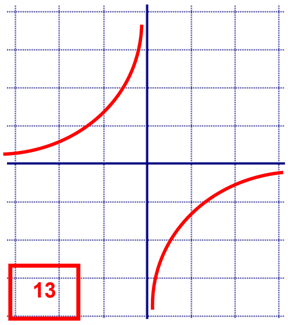
11

Función de proporcionalidad inversa $y=\dfrac{k}{x}$



12

k>0



13

k<0

Hipérbola $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

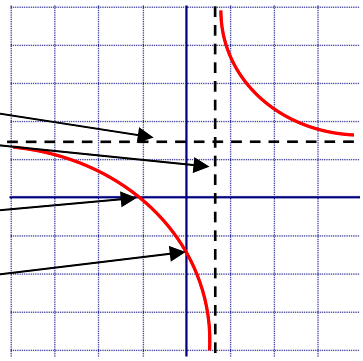
1º) Asíntota horizontal: $\boxed{y=\dfrac{a}{c}}$

Asíntota vertical: Anular el denominador: cx+d=0 $\Rightarrow$ $\boxed{x=-\dfrac{d}{c}}$

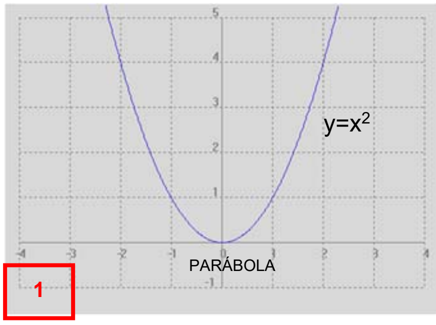
2º) Corte eje x: y=0 $\Rightarrow$ $\dfrac{ax+b}{cx+d}=0\Rightarrow$ $\boxed{x=-\dfrac{b}{a}}$

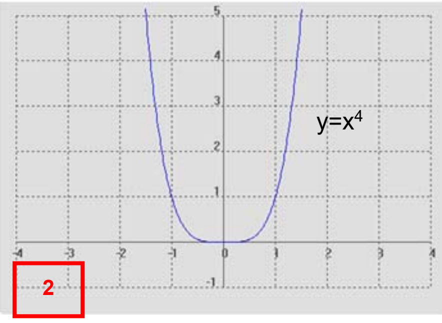
Corte eje y: Sustituir x=0 $\Rightarrow$ $\boxed{y=\dfrac{b}{d}}$

14



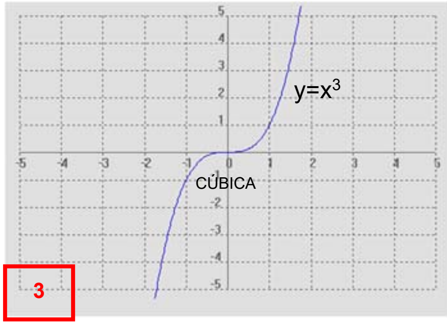
GRÁFICAS MÁS REPRESENTATIVAS

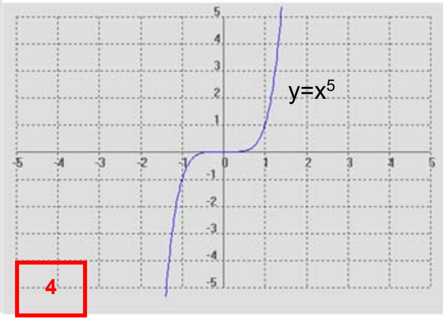




En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo par, tienen esta forma.

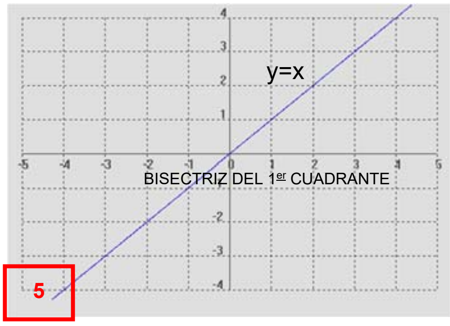
(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)

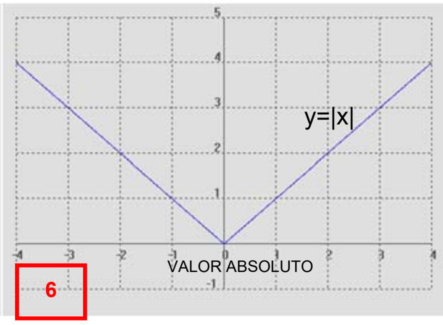




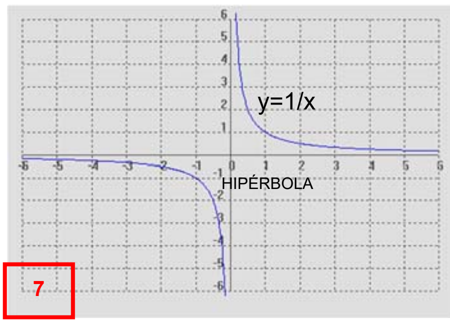
En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo impar ($\neq 1$), tienen esta forma.

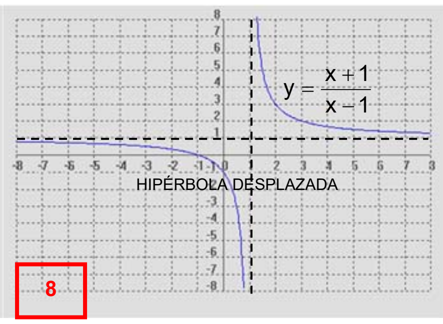
(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)





En general, la gráfica de $y=|f(x)|$ se obtiene reflejando la de f(x) respecto al eje OY en el semiplano superior.

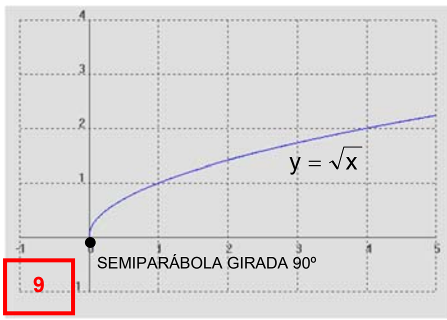


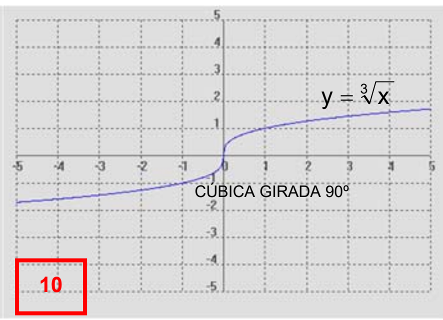


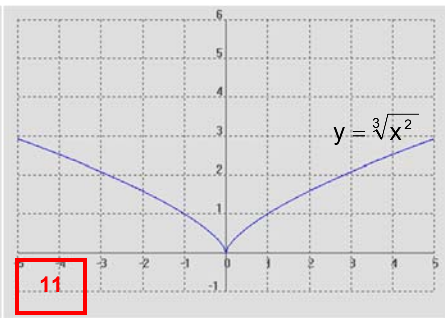
En general,

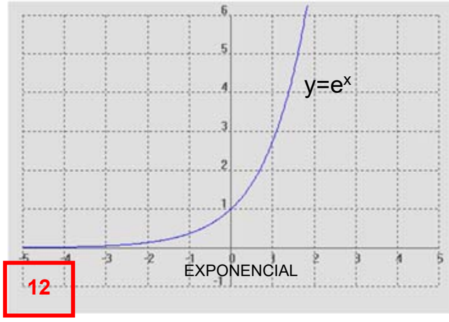
$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

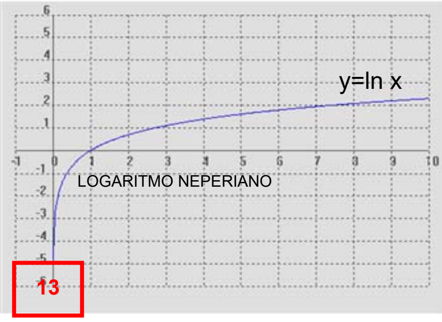
donde $c\neq 0$, es una hipérbola.

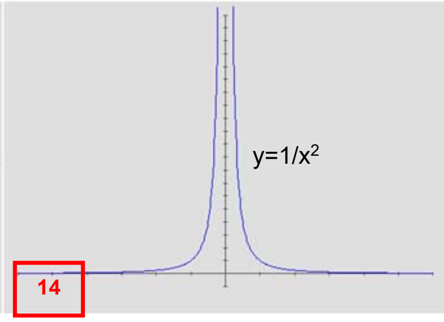


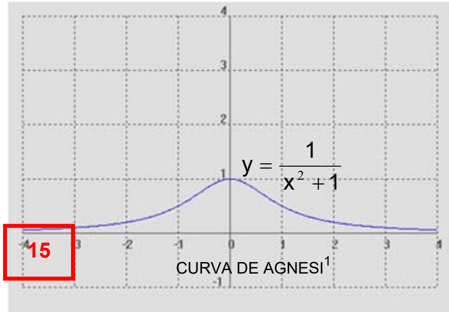


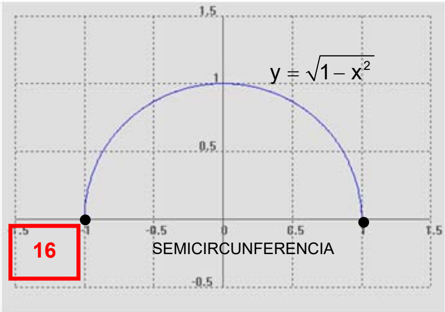


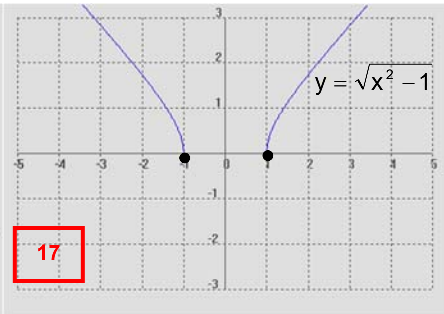


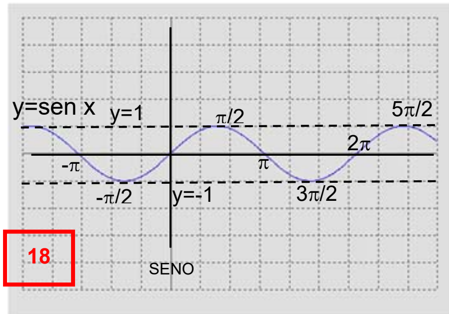


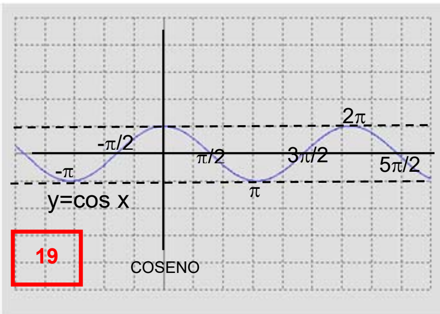


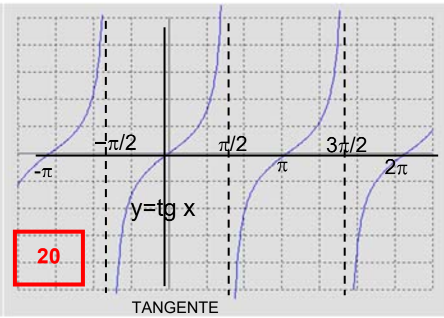












	Nombre	Símbolo	
		Minúscula	Mayúscula
1	Alfa	α	Α
2	Beta	β	Β
3	Gamma	γ	Γ
4	Delta	δ	Δ
5	Épsilon	ε	Ε
6	Zeta	ζ	Ζ
7	Eta	η	Η
8	Theta	θ,ϑ	Θ
9	Iota	ι	Ι
10	Kappa	κ	Κ
11	Lambda	λ	Λ

12	My	μ	Μ
13	Ny	ν	Ν
14	Xi	ξ	Ξ
15	Ómicron	ο	Ο
16	Pi	π	Π
17	Rho	ρ	Ρ
18	Sigma	σ, ς	Σ
19	Tau	τ	Τ
20	Ípsilon	υ	Υ
21	Fi	ϕ,φ	Φ
22	Ji	χ	Χ
23	Psi	ψ	Ψ
24	Omega	ω	Ω

1 En honor de *María Agnesi*, matemática italiana del siglo XVIII, que fue la primera en investigar las propiedades de las curvas de este tipo

PASOS A SEGUIR PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE PROBABILIDAD:

1. Leer atenta y completamente el enunciado.
2. Nombrar los sucesos con letras mayúsculas apropiadas.
3. Traducir la probabilidad que nos piden a lenguaje de sucesos (usando la U, ∩, probabilidad condicionada, suceso contrario, etc.).
4. Identificar qué fórmula hay que aplicar (puede ser útil un diagrama de árbol, tabla de contingencia, formar todo el espacio muestral, etc.).

   Este es, evidentemente, el paso crucial. Como ayuda, y dependiendo del problema, habrá que aplicar alguna de estas fórmulas:

"o" ⇒ U

- no se pueden verificar a la vez ⇒ INCOMPATIBLES ⇒ $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$ (1)
  $(A\cap B=\varnothing)$
- se pueden verificar a la vez ⇒ COMPATIBLES ⇒ $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$ (2)
  $(A\cap B\neq\varnothing)$

"y", "a la vez"

- con devolución ⇒ INDEPENDIENTES ⇒ $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$ (3)
- sin devolución ⇒ DEPENDIENTES ⇒ $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)}$ (4)
  (se recomienda hacer un árbol)

"al menos" ⇒ suele funcionar calcular antes la probabilidad del suceso contrario, y aplicar a continuación

$\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$ (5)

$\boxed{A \text{ y } B \text{ INCOMPATIBLES} \Leftrightarrow P(A\cap B)=0}$ (6)

Leyes de Morgan

- $\boxed{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$
- $\boxed{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$

$\boxed{P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}}$ (7)

Probabilidad condicionada

5. Sustituir cada una de las probabilidades que figuran en el desarrollo de la fórmula elegida.
6. Operar y simplificar (dejando el resultado, normalmente, en forma de fracción).

La **criba de Eratóstenes** es un procedimiento para hallar todos los números primos menores que un número natural dado. Se llama así en honor al astrónomo y geógrafo griego del siglo III a. C. que, parece ser, fue el primero en dar con este método. Nosotros aquí vamos a hallar los primos menores que 1000. Para ello, eliminamos de la lista sombreándolos los múltiplos de 2. Luego tomamos el primer número después del 2 que no fue eliminado (el 3) y eliminamos de la lista sus múltiplos, y así sucesivamente. Es fácil advertir que bastará continuar este proceso hasta $\sqrt{1000} \cong 31{,}62...$, es decir, hasta el 31. Los números que permanecen en blanco son los **primos**[1]:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256
257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288
289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352
353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384
385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416
417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448
449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512
513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544
545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576
577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608
609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672
673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704
705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736
737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768
769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832
833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864
865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896
897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928
929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	1000																								

[1] Teniendo en cuenta la definición de número primo –todo número natural que tiene únicamente dos divisores naturales distintos: él mismo y el 1–, el 2 es primo (de hecho, es el único número primo par). El 1, por convenio, no se considera ni primo ni compuesto.