

Differentiaaliyhtälöt

Differentiaaliyhtälö (myöh. DY) on yhtälö, jossa tuntemattoman luun sijaan etsitään tuntematonta funktiota.

Esimerkiksi auton matkan lauseke: $v(t) = \sqrt{3\frac{t}{5}} \text{ m/s}$
 $s'(t) = \sqrt{3\frac{t}{5}} \text{ m/s}$
 $\rightarrow s(t) = ?$

D:n ratkaisu on sellainen funktio, joka yhtälöön sijoitettuna antaa yhtälön molemmille puolille saman lausekkeen.

$$3x^2 + 2x - 3 = 0 \rightsquigarrow$$

$$3f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = 0$$

$$3s'' + 2s' - 3s = 0$$

$$3a + 2v - 3s = 0$$

$$ma = -F_{\mu} + F_{\text{spring}}$$

$$v(0) = 5 \text{ m/s}$$

$$s(0) = 0 \text{ m}$$

Esim. Onko funktio $y(x) = Ce^{2x} + x^2$ DY:n

a) $y' - y = x^2$ b) $y' - 2y = 2x - 2x^2$ ratkaistu?

Ratk. a) $y = Ce^{2x} + x^2$

$$y' = 2Ce^{2x} + 2x$$

$$\underbrace{2Ce^{2x} + 2x}_{y'} - \underbrace{(Ce^{2x} + x^2)}_{-y} = 2Ce^{2x} + 2x - Ce^{2x} - x^2$$

$$= Ce^{2x} + 2x - x^2 \stackrel{?}{=} x^2 \text{ Ei de!}$$

→ Ei ole ratkaistu.

$$b) y = Ce^{2x} + x^2$$

$$y' = 2Ce^{2x} + 2x$$

$$DY: y' - 2y = \underline{\underline{2x - 2x^2}}$$

$$2Ce^{2x} + 2x - 2(Ce^{2x} + x^2)$$

$$= \cancel{2Ce^{2x}} + 2x - \cancel{2Ce^{2x}} - 2x^2$$

$$= \underline{\underline{2x - 2x^2}} \rightarrow \underline{\underline{On\ ratkaistu!}}$$

Yleensä DY:llä on äärettömästi ratkaisuja, joista haluttu funktio rajataan alkuehdon avulla.

Esim Mikä ratkaisusta toteuttaa alkuehdon $y(1)=4$?

Ratk. $y(1)=4$ | $C = \frac{3}{e^2} = 3e^{-2} (\approx 0,406)$

$$Ce^{2 \cdot 1} + 1^2 = 4$$

$$Ce^2 + 1 = 4 \quad || -1$$

$$Ce^2 = 3 \quad || : e^2$$

$$\rightarrow y(x) = \frac{3}{e^2} e^{2x} + x^2$$

$$= 3e^{-2} e^{2x} + x^2$$

$$= \underline{\underline{3e^{2x-2} + x^2}}$$

$$\begin{aligned} & 3e^{2 \cdot 1 - 2} + 1^2 \\ &= 3e^0 + 1 \\ &= 3 \cdot 1 + 1 \\ &= \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

Separoituvat DY:t

Esim. Ratkaise DY $y' = xy$, $y(2) = 4$.

Ratk 1) Muuta $y' \rightarrow \frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = xy$

2) Separointi: $\frac{dy}{dx} = xy \quad || \cdot dx$

$$dy = xy dx \quad || : y$$

$$\frac{1}{y} dy = x dx$$

3) Integrati: $\frac{1}{y} dy = x dx \quad || \int$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

$$\ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

4) Ratkaise y:n lauseke: $\ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad || e^()$

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^C}_{= C} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot C = C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$y(x) = C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$[\text{Tarkistus:}] \quad y(x) = C e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad y' = xy$$

$$\underline{\underline{y'(x)}} = C e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \underbrace{D\left(\frac{1}{2}x^2\right)}_x = x \cdot \underbrace{C e^{\frac{1}{2}x^2}}_{=y} = \underline{\underline{xy}}$$

On ratkaisu!

$$5) \text{ Käytä mahdollista alkuehtoa: } y(2) = 4$$

$$C e^{\frac{1}{2} \cdot 2^2} = 4 \quad | \quad C = 4 e^{-2}$$

$$C e^2 = 4 \quad || : e^2 \quad | \rightarrow y(x) = \underline{\underline{4 e^{\frac{1}{2}x^2 - 2}}}$$

Esim. $y' = y + 3$, $y(0) = 2$

Ratk. $y' = y + 3$

$$\frac{dy}{dx} = y + 3 \quad || \cdot dx$$

$$dy = (y + 3) dx \quad || : (y + 3)$$

$$\frac{1}{y + 3} dy = 1 dx \quad || \int$$

$$\int \frac{1}{y + 3} dy = \int 1 dx$$

$$\frac{\ln(y + 3)}{1} = x + C \quad || e^{(\quad)}$$

$$y + 3 = e^{x + C} = Ce^x \quad || - 3$$

$$y = Ce^x - 3$$

$$y(0)=2$$

$$Ce^0 - 3 = 2$$

$$C \cdot 1 - 3 = 2$$

$$C - 3 = 2 \quad || +3$$

$$C = 5$$

$$\rightarrow \underline{\underline{y(x) = 5e^x - 3}}$$

Esim $y' = -y^2(x+1)$, $y(0)=2$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2(x+1) \quad || \cdot dx = y^2$$

$$\frac{1}{y^2} dy = -(x+1) dx \quad || \int$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -(x+1) dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int -x - 1 dx$$

$$-y^{-1} = -\frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 - x + C \quad || \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + C \quad || \cdot y$$

$$1 = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + C \right) y \quad || : \left(\frac{1}{2}x^2 + x + C \right)$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + x + C} = \frac{2}{x^2 + 2x + C}$$

$$y(0) = 2, \quad y(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + C}$$

$$\frac{2}{0^2 + 2 \cdot 0 + C} = 2$$

$$\frac{2}{C} = 2 \quad || \cdot C$$

$$2 = 2C \quad || :2$$

$$\underline{\underline{C=1}} \rightarrow \underline{\underline{y(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 1}}}$$

Suoraan ja kääntäen verrannollisuus

Kaksi muuttujan x ja y ovat suoraan verrannollisia, jos on vakio k , jolle pätee $x = ky$

Kääntäen verrannollisuus: $x = \frac{k}{y} \Leftrightarrow xy = k$

Esim. Teho on suoraan verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin
 $P = kv^2$

- Ilmanvastus on suoraan verrannollinen nopeuteen $F_{\mu} = kv$
- Pinta-ala on suoraan verrannollinen mittakaavan neliöön $A = kd^2$

Lohenviljelyaltaaseen, jossa oli 1100 kalaa, levisi kalatauti. Taudin vaikutuksesta kalamäärä alkoi vähentyä siten, että muutosnopeus oli suoraan verrannollinen kalamäärän neliöjuureen, kun aika mitattiin viikkoina. Viikon jälkeen kaloja oli jäljellä 971 kappaletta. Kuinka monen viikon kuluttua kaikki kalat olivat kuolleet?

Ratk. $y(t)$ = kalojen lkm t viikon kuluttua

$$y(0) = 1100$$

$$y(1) = 971$$

$y'(t)$ = kalamäärän muutosnopeus

$$\boxed{y' = k\sqrt{y}}$$

$$\frac{dy}{dt} = k\sqrt{y} \quad || \cdot dt : \sqrt{y}$$

$\frac{1}{\sqrt{y}} dy = k dt \quad \int$	$\int y^{-1/2} dy = \int k dt$	$\sqrt{y} = \frac{1}{2}kt + C \quad (\cdot)^2$ $y(t) = \left(\frac{1}{2}kt + C\right)^2$
$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int k dt$	$\int y^{-1/2} dy = \int k dt$	
	$2y^{1/2} = kt + C \quad :2$	

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}kt + C \right)^2$$

$$y(0) = 1100$$

$$\left(\frac{1}{2}k \cdot 0 + C \right)^2 = 1100$$

$$C^2 = 1100 \quad || \sqrt{}$$

$$C = \pm \sqrt{1100}$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}kt + \sqrt{1100} \right)^2$$

$$y(1) = 971$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot k \cdot 1 + \sqrt{1100} \right)^2 = 971 \quad || \sqrt{}$$

$$\frac{1}{2}k + \sqrt{1100} = \sqrt{971} \quad || -\sqrt{1100}$$

$$\frac{1}{2}k = \sqrt{971} - \sqrt{1100} \quad || \cdot 2$$

$$k = 2(\sqrt{971} - \sqrt{1100}) \approx -4.01$$

$$\underline{\underline{y(t) \approx (-2.005t + \sqrt{1100})^2}}$$

$$y(t) = 0$$

$$(-2,005 \cdot t + \sqrt{1100})^2 = 0 \quad || \sqrt{\quad}$$

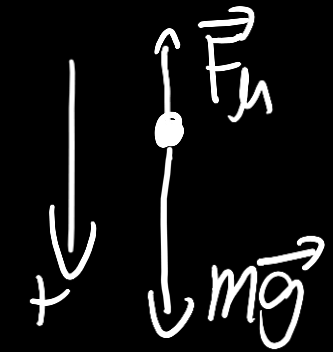
$$\begin{array}{l} -2,005t + \sqrt{1100} \quad || -\sqrt{1100} \\ -2,005t = -\sqrt{1100} \quad || : (-2,005) \end{array}$$

$$t = \frac{\sqrt{1100}}{2,005} \approx \underline{\underline{16,54 \text{ (virkker)}}}$$

Kappale, jonka massa on 1, putoaa alaspäin alkunopeudella 0. Painovoiman lisäksi siihen vaikuttaa ilmanvastus, joka on suoraan verrannollinen kappaleen nopeuteen verrannollisuuskertoimella 2.

- a) Selvitä kappaleen nopeuden lauseke.
- b) Kuinka nopeasti kappale putoaa 0,5 s pudottamisen jälkeen?
- c) Milloin kappaleen nopeus on 2 m/s?

Ratk. NII: $F_{\text{kok}} = ma$



$$mg - F_h = ma \quad || m=1$$

$$g - F_h = a \quad || F_h = 2v$$

$$g - 2v = a \quad || a = v'$$

$$g - 2v = v'$$

$$v' = g - 2v$$

$$\frac{dv}{dt} = g - 2v \quad || \cdot dt$$

$$dv = (g - 2v) dt \quad || : (g - 2v)$$

$$\frac{1}{g - 2v} dv = 1 dt \quad || \int$$

$$\int \frac{1}{g - 2v} dv = \int 1 dt$$

$$\frac{\ln(g - 2v)}{-2} = t + C \quad || \cdot (-2)$$

$$\ln(g - 2v) = -2t + C \quad || e^{}$$

$$g - 2v = e^{-2t + C}$$

$$g - 2v = Ce^{-2t} \quad || + 2v$$

$$2v + Ce^{-2t} = g \quad || - Ce^{-2t}$$

$$2v = g - Ce^{-2t} \quad || : 2$$

$$\underline{\underline{v(t) = \frac{g}{2} - Ce^{-2t}}}$$

'Alkuehdotus on $0^1 \rightarrow v(0) = 0$

$$\frac{g}{2} - C e^{-2 \cdot 0} = 0$$

$$\frac{g}{2} - C \cdot 1 = 0$$

$$\frac{g}{2} - C = 0 \quad || +C$$

$$C = \frac{g}{2}$$

$$v(t) = \frac{g}{2} - \frac{g}{2} e^{-2t} \quad || g = 9,81$$

$$v(t) = \underline{\underline{4,905 - 4,905 e^{-2t}}}$$

Ilman ilmanvastusta ratkaistaan d:si vakavirtaus

$$v(t) = gt = 9,81t$$

$$b) v(0.5) = 4,905 - 4,905 \cdot e^{-2 \cdot 0.5} = 4,905 - 4,905 e^{-1} \approx \underline{\underline{3,15 \text{ m/s}}}$$

$$c) v(t) = 2 \text{ m/s}$$

$$4,905 - 4,905 e^{-2t} = 2 \quad || -4,905$$

$$-4,905 e^{-2t} = -2,905 \quad || : (-4,905)$$

$$e^{-2t} = \frac{2,905}{4,905} \quad || \ln()$$

$$-2t = \ln\left(\frac{2,905}{4,905}\right) \quad || : (-2)$$

$$t = \ln\left(\frac{2,905}{4,905}\right) / (-2) \approx 0,2619 \text{ s} \approx \underline{\underline{0,26 \text{ s}}}$$

Säiliössä on 500 l suolavettä, jossa suolan osuus on 10 kg. Hetkellä $t = 0$ säiliöön ryhdytään pumppaamaan nopeudella 10 l/min suolavettä, jonka suolapitoisuus on 0,01 kg/l. Samanaikaisesti säiliöstä aletaan poistaa suolavettä nopeudella 10 l/min.

a) Kirjoita tilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö.

b) Ratkaise saamasi yhtälö ja laske sen avulla, mikä on säiliössä olevan suolaliuoksen pitoisuus 30 minuutin kuluttua aloituksesta.

Ratk. Tarkastellaan ajanhetkeä t , jolloin suolan massa on $m(t)$, ja hyvin lyhyttä aikaväliä dt . Tällöin

- Säiliöön tulee $10 \frac{\text{l}}{\text{min}} \cdot 0,01 \frac{\text{kg}}{\text{l}} dt \cdot \text{min} = 0,1 \text{ kg } dt$
- Säiliöstä poistuu $10 \frac{\text{l}}{\text{min}} \cdot \frac{m \text{ kg}}{500 \text{ l}} dt \cdot \text{min} = \frac{m}{50} \text{ kg } dt$

Suolan massan muutos $dm = 0,1 dt - \frac{m}{50} dt = (0,1 - \frac{m}{50}) dt$
 $= \frac{5-m}{50} dt = \frac{m-5}{-50} dt$

$$dm = \frac{m-5}{-50} dt \quad || : (m-5) \left[\rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{m-5}{-50} \rightarrow m'(t) = \frac{m-5}{-50} \right]$$

$$\frac{1}{m-5} dm = \frac{1}{-50} dt \quad || \int$$

$$\int \frac{1}{m-5} dm = \int -\frac{1}{50} dt$$

$$\ln(m-5) = -\frac{1}{50}t + C \quad || e^{\quad}$$

$$m-5 = e^{-\frac{1}{50}t+C} \quad || +5$$

$$\underline{\underline{m(t) = Ce^{-t/50} + 5}}$$

Atuksi sudan di 10kg

$$m(0) = 10$$

$$Ce^{-0/50} + 5 = 10$$

$$Ce^0 + 5 = 10$$

$$C + 5 = 10 \quad || -5$$

$$C = 5 \rightarrow \underline{\underline{m(t) = 5e^{-t/50} + 5}}$$

$$m(30) = 5 e^{-30/50} + 5 \approx 7.744058 \text{ kg}$$

$$\frac{7.744058 \text{ kg}}{500 \text{ l}} \approx \underline{\underline{0.0155 \text{ kg/l}}}$$